ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ГИБКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

Саркисян Саркис В.

Սարգիս Վ. Սարգսյան

Ճկուն անիզոտրոպ գլանային թաղանթի տատանումների օպտիմալ ստաբիլիզացիան

Աշխատանքում դիտարկված է համասեռ անիզոտրոպ ճկուն շրջանային գլանային թաղանթի տատանումների օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդիրը: Տատանումները ստաբիլիզացվում են ամբողջ մակերևույթի վրա կիրառված ուժով: Որպես նպատակային ֆունկցիոնալ դիտարկվում են թաղանթի կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաները և ազդող ուժերի աշխատանքը: Լյապունովի ֆունկցիան վեր է ածվել շարքի և կառուցվել են նրա հաջորդական մոտավորությունները: Ոչգծային տատանումների համար ստացվել է օպտիմալ ստաբիլիզացնող ղեկավարումը:

Sargis V. Sargsyan

Optimal Stabilization of Vibrations of Flexible Anisotropic Cylindrical Board

В работе рассматривается задача об оптимальной стабилизации колебаний гибкой однородной анизотропной цилиндрической панели. Колебания стабилизируются нагрузкой, приложенной на всю поверхность оболочки. Для нелинейных колебаний получено оптимальное стабилизирующее воздействие.

Рассматривается однородная анизотропная гибкая круговая панель толщины h, радиуса R, размер которой по образующей (длина) значительно превышает размер вдоль дуги в ширину, так что изогнутую поверхность можно считать цилиндрической.

Принимается, что колеблющая панель скреплена с неподвижными ребрами и загружена силами, которые вызывают как плоские, так и изгибные деформации оболочки.

В основу ставятся гипотезы уточненной теории С.А. Амбарцумяна, учитывающие поперечные сдвиги [1].

Одномерные уравнения колебаний этой панели имеют вид [2]:

$$B_{26}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial y}\right]+B_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$B_{22}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial y}\right]+B_{26}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{h^2}{12}\left[B_{22}\frac{\partial^3\psi_y}{\partial y^3}+B_{26}\frac{\partial^3\psi_x}{\partial y^3}\right]+\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\sigma}{R}-\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{q(y,t)}{h}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{h^2}{12}\left[B_{26}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}+B_{66}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}\right]-k^2\left[B_{55}\psi_x+B_{45}\left(\psi_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]=0$$

$$\frac{h^2}{12}\left[B_{22}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}+B_{26}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}\right]-k^2\left[B_{45}\psi_x+B_{44}\left(\psi_y+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]=0$$

Пусть на движение панели наложены следующие начальные условия:

$$w(y,t)\big|_{t=0} = \Phi(y), \quad \dot{w}(y,t)\big|_{t=0} = \Phi_1(y)$$

где функции $\Phi(y)$, $\Phi_1(y)$ (начальные прогиб и скорость точек срединной поверхности) принадлежат классу L_2 на дуге [0, b].

Для определения оптимального значения нормальной нагрузки $q(y, t)$, которая стабилизирует колебания

$$w(y,t)\big|_{t\to 0} \to 0, \quad \dot{w}(y,t)\big|_{t\to\infty} \to 0$$

минимизируется полная энергия панели и стабилизирующего воздействия

$$J = K + V + \frac{g\chi}{hj}\int_0^\infty\int_0^b q^2(y,t)dydt$$

Здесь K и V– соответственно кинетическая и потенциальная энергии оболочки [1].

Первое приближение системы уравнений (1), с учетом граничных условий и выбора типа управляющей нагрузки, целесообразно искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &w = f(t)\sin\lambda y,\ u = \psi(t)\cos\lambda y,\ \mathrm{v} = \varphi(t)\cos\lambda y \\ &\psi_x = \psi_x(t)\cos\lambda y,\ \psi_y = \psi_y(t)\cos\lambda y \end{aligned} \tag{2}$$

где $\lambda = \pi/b$.

Подставляя $\psi_x(y)$ и $\psi_y(y)$ из (2) в четвертое и пятое уравнения системы (1), получаются их зависимости от w, а из остальных уравнений этой системы и предположения, что взаимное сближение кромок закрепленных длинных краев панели должно быть равно нулю, получается значение σ, зависящее от $f(t)$. Учитывая вышеизложенное и представляя значение управляющей нагрузки в виде

$$q(y,t) = \tilde{q}(t)\sin\lambda y \tag{3}$$

применяя метод Бубнова-Галеркина для каждой гармоники, получается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее нелинейные колебания панели:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 f}{dt^2} - \left\{\frac{h^2\lambda^4}{12}(B_{22}a_2 + B_{26}a_1) + \frac{8}{R^2\pi^2}B_{22}\left(1 + \frac{2B_{26}^2}{B_{22}B_{66}}\right)\right\}\frac{g}{\gamma}f + \\ &\left\{\frac{2\lambda^2}{\pi R}\left(1 + \frac{2B_{26}^2}{B_{22}B_{66}}\right) + \frac{\pi B_{22}}{b^2 R}\right\}\frac{g}{\gamma}f^2 + \frac{B_{22}\pi g}{b^2 R\gamma}f^3 = \tilde{q}\frac{hg}{\gamma} \end{aligned} \tag{4}$$

Для решения нелинейной задачи преобразуем (4), вводя обозначения

$$x_1 = \alpha f,\ x_2 = \dot{f},\ u = \tilde{q}\frac{hg}{\gamma} \tag{5}$$

получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_3 x_1 + u \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{B_{22}\pi g}{b^2 R\gamma},\ \alpha_2 = -\left\{\frac{2\lambda^2}{\pi R}\left(1+\frac{2B_{26}^2}{B_{22}B_{66}}\right)+\frac{\pi B_{22}}{b^2 R}\right\}\frac{g}{\gamma}$$

$$\alpha_3 = \left\{\frac{h^2\lambda^4}{12}\left(B_{22}a_2 + B_{26}a_1\right)+\frac{8}{R^2\pi^2}B_{22}\left(1+\frac{2B_{26}^2}{B_{22}B_{66}}\right)\right\}\frac{g}{\gamma}$$

Теперь задачу оптимальной стабилизации можно сформулировать следующим образом: определить такое оптимальное стабилизирующее управление u^0, которое минимизировало уже целевой функционал

$$J = \int_0^\infty \left(x_1^2 + x_2^2 + u^2\right)dt$$

по всей поверхности панели, и выполнялись условия

$$x_1\big|_{t\to\infty} \to 0,\quad x_2\big|_{t\to\infty} \to 0$$

Система уравнений (6) нелинейная. Для решения задачи оптимальной стабилизации воспользуемся методом, предложенным в [3].

Функция Ляпунова для системы (6) представляется в виде

$$V\left(x_1,x_2\right) = V_2\left(x_1,x_2\right) + V_3\left(x_1,x_2\right) + \ldots,$$

где $V_k\left(x_1,x_2\right)$ $(k = 2,3,\ldots)$–форма k-того порядка.

Для линейного приближения системы (6)

$$\dot{x}_1 = \alpha x_2,\quad \dot{x}_2 = \alpha_3 x_1 + u \qquad (7)$$

принимаем

$$V_2\left(x_1,x_2\right) = C_{11}x_1^2 + 2C_{12}x_1x_2 + C_{22}x_2^2 \qquad (8)$$

Воспользуясь известными уравнениями Бельмана и представлением (8), получим

$$\left(2C_{12}\alpha_3 - C_{12}^2 + 1\right)x_1^2 + \left(2C_{12}\alpha - C_{22}^2 + 1\right)x_2^2 + 2\left(C_{11}\alpha + C_{22}\alpha_3 - C_{11}C_{22}\right)x_1x_2 = 0 \qquad (9)$$

Из (9) определяются коэффициенты C_{ij} (i, j=1, 2), удовлетворяющие условию определенно положительности функции Ляпунова $V_2(x_1,x_2)$.

Для линейного приближения (7) оптимальное управление следующее:

$$u^0 = -C_{12}x_1 - C_{22}x_2\,.$$

Для вычислений последующих приближений функции $V(x_1,x_2)$ используется следующее линейное преобразование:

$$y_1 = \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2,\quad y_2 = \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 \qquad (10)$$

где β_{ij} определяются из уравнений

$$C_{11} = \beta_{11}^2 + \beta_{21}^2,\ C_{12} = \beta_{12}\beta_{11} + \beta_{21}\beta_{22},\ C_{22} = \beta_{12}^2 + \beta_{22}^2$$

приводящие функцию $V_2(x_1,x_2)$ к каноническому виду

$$V_2\left(y_1,y_2\right) = y_1^2 + y_2^2.$$

Используя (10) и обратное к нему преобразование

$$x_1 = e_{11}y_1 + e_{12}y_2,\ x_2 = e_{21}y_1 + e_{22}y_2$$

уравнения (6) примут вид

$$\dot{y}_1 = \frac{\alpha e_{21}e_{22} - \alpha_3 e_{11}e_{12}}{\Delta}y_1 + \frac{\alpha e_{22}^2 - \alpha_3 e_{12}^2}{\Delta}y_2 - \frac{\alpha_2 e_{12}e_{11}^2}{\Delta}y_1^2 - \frac{\alpha_2 e_{12}^3}{\Delta}y_2^2 -$$

$$
-\frac{2\alpha_2 e_{11} e_{12}^2}{\Delta} y_1 y_2 - \frac{\alpha_1 e_{12} e_{11}^3}{\Delta} y_1^3 - \frac{\alpha_1 e_{12}^4}{\Delta} y_2^3 - \frac{3\alpha_1 e_{12}^3 e_{11}}{\Delta} y_1 y_2^2 - \frac{3\alpha_1 e_{12}^2 e_{11}^2}{\Delta} y_1^2 y_2 - \frac{e_{12}}{\Delta} u
$$

$$
\dot{y}_2 = \frac{\alpha e_{21}^2 - \alpha_2 e_{11}^2}{\Delta} y_1 + \frac{\alpha e_{21} e_{22} - \alpha_2 e_{11} e_{12}}{\Delta} y_2 - \frac{\alpha_2 e_{11}^3}{\Delta} y_1^2 - \frac{\alpha_2 e_{11} e_{12}^2}{\Delta} y_2^2 -
$$

$$
-\frac{2\alpha_2 e_{11}^2 e_{12}}{\Delta} y_1 y_2 - \frac{\alpha_1 e_{11}^4}{\Delta} y_1^3 - \frac{\alpha_1 e_{11} e_{12}^3}{\Delta} y_2^3 - \frac{3\alpha_1 e_{11}^2 e_{12}^2}{\Delta} y_1 y_2^2 - \frac{3\alpha_1 e_{11}^3 e_{12}}{\Delta} y_1^2 y_2 - \frac{e_{11}}{\Delta} u
$$

где $\Delta = e_{11} e_{22} - e_{12} e_{21}$, а минимизируемый функционал

$$
J = \int_0^\infty \left[\left(e_{11}^2 + e_{21}^2 \right) y_1^2 + 2\left(e_{11} e_{12} + e_{21} e_{22} \right) y_1 y_2 + \left(e_{12}^2 + e_{22}^2 \right) y_2^2 + u^2 \right] dt
$$

Далее, используя тот же метод [3], для последующих приближений функции Ляпунова будем иметь:

$$
V_3(y_1, y_2) = V_5(y_1, y_2) = V_6(y_1, y_2) = \ldots \equiv 0
$$

$$
V_4(y_1, y_2) = A_1 y_1^4 + A_2 y_1^3 y_2 + A_3 y_1^2 y_2^2 + A_4 y_1 y_2^3 + A_5 y_2^4
$$

где $A_i (i = 1{,}5)$ определяются из системы неоднородных линейных уравнений известным образом [3].

Теперь для $V(y_1, y_2)$ можно записать следующее:

$$
V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 + A_1 y_1^4 + A_2 y_1^3 y_2 + A_3 y_1^2 y_2^2 + A_4 y_1 y_2^3 + A_5 y_2^4
$$

для оптимального управляющего воздействия получится следующее:

$$
u^0 = \frac{e_{12}}{\Delta} \left(y_1 + 2A_1 y_1^3 + \frac{3}{2} A_2 y_1^2 y_2 + A_3 y_1 y_2^2 + \frac{1}{2} A_4 y_2^3 \right) +
$$

$$
+ \frac{e_{11}}{\Delta} \left(y_2 + \frac{1}{2} A_2 y_1^3 + A_3 y_1^2 y_2 + \frac{3}{2} A_4 y_1 y_2^2 + 2A_5 y_2^3 \right)
$$

Воспользовавшись обозначением (5) и преобразованием (10), получаются выражения для функции Ляпунова $V^0(f, \dot{f})$ и оптимального управления $u^0(f, \dot{f})$. Сходимость полученных рядов и конечность целевого функционала легко можно показать [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек.-М.: Наука, 1974. 448с.
2. Саркисян С.В. Некоторые задачи изгиба и колебаний анизотропных гибких цилиндрических оболочек.-Механика. Межвуз. сб. научн. тр. Ереван, ЕГУ, 1984, вып. 3, с.182-192.
3. Альбрехт Э. Г. Об оптимальной стабилизации нелинейных систем.-ПММ, 1961, т. 25, вып.5, с.836-844.
4. Габриелян М.С. О стабилизации механической системы континуума. Уч. записки ЕГУ, 1975, 2, с.49-57.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
29.06.1999