ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **53, №1, 2000** Механика
УДК 539.3.01

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Белубекян М.В., Казарян К.Б.

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Կ. Բ. Ղազարյան

Սահքի մակերևույթային ալիքների գոյության հարցը ոչ համասեռ առաձգական կիսատարածությունում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է SH տիպի մակերևույթային ալիքների գոյության հարցը ըստ խորության անհամասեռ կիսատարածությունում: Հաստատված է, որ այս հարցի հետազոտումը սերտ կապված է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ օպերատորի սպեկտրի հետազոտման հետ: Որոշված են մակերևույթային ալիքի գոյության ընդհանուր պայմանները:

M.V. Belubekyan, K.B. Kazaryan

On Existense Problem for Surface Shear Waves in Non-Homegeneous Elastic Semi-Space

В работе исследуется вопрос существования поверхностных SH-волн в неоднородном по глубине упругом полупространстве. Показано, что исследование этого вопроса тесно связано с исследованием спектра самосопряженного дифференциального оператора второго порядка. Определены общие условия существования поверхностных сдвиговых волн в зависимости от неоднородности среды и класс функции, характеризующих неоднородность.

Исследованию вопроса распространения сдвиговых поверхностных волн с заданными характеристиками неоднородности посвящены многочисленные работы, в частности укажем на работы [1-3]. Отметим также работу [4], где исследован вопрос существования дискретного вещественного спектра собственных частот колебаний полубесконечной неоднородной мембраны.

1. Перед тем, как перейти к рассмотрению вопроса в общей постановке, приведем иное решение классической задачи Лява для упругого слоя $(0 < x < h)$, лежащего на упругом полупространстве $(h < x < \infty)$.

Пусть, двухслойная упругая среда имеет следующие характеристики:

$$\rho(x) = \rho_1 \qquad \mu(x) = \mu_1 \qquad x \in (0,h)$$
$$\rho(x) = \rho_0 \qquad \mu(x) = \mu_0 \qquad x \in (h,\infty)$$

где ρ - плотность, μ - модуль сдвига среды.

Упругое поле сдвиговых волн характеризуется вектором перемещений $\vec{U}(x,y,t) = [0,0,U(x,y,t)]$ и уравнением движения

$$\mu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = \rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

Изучая вопрос распространения монохроматической волны вдоль границы полупространства $-\infty < y < \infty$, примем

$$U(x,y,t) = U(x)\exp i(ky - \omega t)$$

Для функции $U(x)$, характеризирующей изменение амплитуды волн по глубине полупространства, имеем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-\frac{d^2U}{dx^2} + g(x)U = \lambda U \quad x \in (0,\infty) \tag{1.1}$$

$$g(x) = \omega^2\left(\frac{\rho_0}{\mu_0} - \frac{\rho_1}{\mu_1}\right) \quad x \in (0,h), \quad g(x) = 0 \quad x \in (h,\infty), \quad \lambda = \frac{\omega^2\rho_0}{\mu_0} - k^2$$

Уравнение (1.1) должно рассматриваться совместно с граничным условием на границе $x = 0$. На свободной или закрепленной границах имеем, соответственно

$$\frac{dU}{dx} = 0, \quad U = 0 \tag{1.2}$$

К краевой задаче (1.1, 1.2) может быть использована известная в теории дифференциальных операторов теорема [5], которую сформулируем следующим образом.

Пусть функция $g(x)$ является суммируемой в интервале $(0,\infty)$. Тогда непрерывная часть спектра всякого самосопряженного расширения оператора $\hat{L}(U)$, порожденного дифференциальным выражением (1.1), заполняет всю положительную полуось $\lambda \geq 0$, а на отрицательной полуоси $\lambda < 0$ может находиться только дискретная часть спектра оператора. При этом собственные функции имеют следующую асимптотику при $x \to \infty$:

$$U(x,\lambda) = \exp\left(-\sqrt{|\lambda|}x\right) \tag{1.3}$$

$$\frac{dU(x,\lambda)}{dx} = -\sqrt{|\lambda|}\exp\left(-\sqrt{|\lambda|}x\right)$$

На основе этой теоремы сразу следует следующий вывод, соответствующий решению классической задачи Лява.

Краевая задача (1.1) не имеет решения с асимптотикой (1.3), если $g(x) \geq 0, \lambda < 0$. Действительно, в этом случае имеем

$$\left[U(x)U'(x)\right]' = U^2(x)\left[g(x) - \lambda\right] > 0 \qquad (\ )' = \frac{d}{dx}$$

Функция $U(x)U'(x)$, будучи монотонной, не может иметь в любом интервале более одного нуля, и, следовательно, если функция $U(x)$ имеет нуль, то $U'(x)$ не может иметь нуля и наоборот. Следовательно, для рассматриваемых граничных условий имеем $U(x) \equiv 0$.

Приведем решение задачи (1.1) с помощью метода интегральных уравнений. Представляя решение $U(x,\lambda)$ в виде

$$U(x,\lambda)=\tilde{U}(x,p)\exp(-px) \qquad p=\sqrt{|\lambda|}$$

получим следующее интегральное уравнение относительно функции $\tilde{U}(x,p)$:

$$\tilde{U}(x,p)=1+\frac{1}{2p}\int_x^\infty\left(1-e^{2px}e^{-2ps}\right)g(s)\tilde{U}(s,p)ds \quad x\in(0,\infty)$$

Так как $g(x)$ – финитная функция, то

$$\tilde{U}(x,p)=1+g_0\int_x^\infty\left(1-e^{2px}e^{-2ps}\right)\tilde{U}(s,p)ds \qquad x\in(0,h)$$

$$\tilde{U}(x,p)=1 \qquad x\in(h,\infty)$$

где $g_0=\dfrac{\omega^2}{2p}\left(\dfrac{\rho_0}{\mu_0}-\dfrac{\rho_1}{\mu_1}\right)$

Вводя в рассмотрение функции

$$Z_1(x,p)=g_0\int_x^h\tilde{U}(s,p)ds\,,\; Z_2(x,p)=g_0\int_x^h e^{-2ps}\tilde{U}(s,p)ds$$

имеем $\tilde{U}(x,p)=1+Z_1(x,p)-e^{2px}Z_2(x,p)$

Функции $Z_1(x,p),Z_2(x,p)$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\frac{dZ_1}{dx}+g_0(1+Z_1)-g_0e^{2px}Z_2=0,\; \frac{dZ_2}{dx}-g_0Z_2+g_0e^{-2px}(1+Z_1)=0 \qquad (1.4)$$

Из решения системы (1.4) для функции $U(x,p)$ имеем классическое решение Лява [6]:

$$U(x,p)=e^{-ph}\left[\cos\beta(x-h)-\frac{p\mu_1}{\beta\mu_0}\sin\beta(x-h)\right] \qquad x\in(0,h)$$

$$U(x,p)=e^{-px} \qquad x\in(h,\infty),\; \beta=\sqrt{-\left(p^2+2pg_0\right)}=\sqrt{\frac{\omega^2\rho_1}{\mu_1}-k^2}$$

2. Перейдем теперь к рассмотрению задачи для неоднородного полупространства, характеризируемого функциями $\mu(x)>0,\rho(x)>0$, заданными в области $x\in(0,\infty)$.

Имеем следующее уравнение для амплитуды поверхностной волны $U(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)\frac{dU}{dx}\right]-k^2\mu(x)U=-\rho(x)\omega^2 U$$

Переходя от функции $U(x)$ к функции $V(x)=\sqrt{\mu(x)}U(x)$, получим

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\left[\frac{\omega^2\rho(x)}{\mu(x)}-k^2-\varphi^2-\frac{d\varphi}{dx}\right]V=0 \qquad (2.1)$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\mu}\frac{d\mu}{dx}$$

Пусть функции $\mu(x),\rho(x)$ таковы, что

$$\frac{d\varphi}{dx}+\varphi^2=\psi_1(x)+\alpha$$

$$\frac{\rho(x)}{\mu(x)}=\frac{1}{c_0^2}\left[1+\psi_2(x)\right] \qquad |\psi_2(x)|<1 \qquad (2.2)$$

где α – некоторая постоянная, а $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ - суммируемые функции в интервале $(0,\infty)$. Тогда, записывая краевую задачу (2.1) в виде

$$-\frac{d^2V}{dx^2}+g(x)V=\lambda V \qquad x\in(0,\infty) \qquad (2.3)$$

$$\frac{dV}{dx}=\varphi(x)V \qquad x=0 \qquad (2.4)$$

$$V=0 \qquad x=0$$

где

$$g(x)=\psi_1(x)-\frac{\omega^2}{c_0^2}\psi_2(x),\quad \lambda=\frac{\omega^2}{c_0^2}-k^2-\alpha,\quad c_0^2=\lim_{x\to\infty}\frac{\mu(x)}{\rho(x)}$$

придем к следующему выводу.

Краевая задача (2.3), (2.4) при выполнении условий (2.2) имеет решение с асимптотикой (1.3), при $\lambda<0$. При этом из краевых условий определяются отрицательные собственные значения, множество которых конечно.

Представляет отдельный интерес случай $g(x)>0$. В этом случае функция $V(x)$, а следовательно, и функция $U(x)$ не может иметь более одного нуля. В силу того , что функция $\left[V(x)V'(x)\right]'>0$, а в точке $x=0$ имеем $V'(0)V(0)=\varphi(0)V^2(0)$, из монотонности функции $V(x)V'(x)$ следует , что для существования стремящегося к нулю на бесконечности решения необходимо, чтобы $\varphi(0)<0$. Таким образом, при $g(x)>0$ и $\varphi(0)<0$ краевая задача имеет единственное собственное значение и соответствующее ему одну собственную функцию.

В случае граничного условия $V(0)=0$ рассматриваемая краевая задача имеет только решение $V(x)\equiv 0$.

Уравнение (2.3) имеет решение, удовлетворяющее следующему интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$V(x,p)=e^{-px}\tilde{V}(x,p) \tag{2.5}$$

$$\tilde{V}(x,p)=1+\frac{1}{2p}\int_x^\infty (1-\exp 2p(x-s))g(s)\tilde{V}(s,p)ds$$

Для заданной функции $g(x)$ можно всегда получить решение интегрального уравнения в виде бесконечного ряда.

Применяя к уравнению (2.5) метод последовательных приближений, получим

$$\tilde{V}(x,p)=1+\sum_{n=1}^\infty H_n(x,p) \tag{2.6}$$

где

$$H_1(x,p)=\int_x^\infty K_0(x,s,p)ds,\ H_2(x,p)=\int_x^\infty K_0(x,s,p)\left(\int_s^\infty K_0(s,\xi,p)d\xi\right)ds$$

$$K_0(x,s,p)=[1-\exp 2p(x-s)]g(s),\ H_{n+1}(x,p)=\int_x^\infty K_0(x,s,p)H_n(s,p)ds$$

В частности, для функции $g(x)=-ae^{-qx}$ имеем

$$H_n(x,p)=\frac{(-1)^n a^n e^{-qx}}{q^n(2p+q)(2p+2q)(2p+3q).....(2p+nq)}$$

Покажем, что функция $H_n(x,p)$ удовлетворяет оценке

$$|H_{n+1}(x,p)|\le\frac{\eta^{n+1}(x)}{(n+1)!} \tag{2.7}$$

где

$$\eta(x)=\frac{1}{2p}\int_x^\infty |g(s)|ds$$

Так как $|K_0(x,s,p)|\le\frac{1}{2p}|g(s)|$, то при $n=0$ оценка очевидна.

Допустим, что эта оценка справедлива для n и покажем ее справедливость и для $n+1$.

Так как $\frac{d\eta}{dx}=-\frac{1}{2p}|g(x)|$, то имеем

$$|H_{n+1}(x)|\le\int_x^\infty |K_0(x,s,p)|\frac{\eta^n(s)}{n!}ds\le\frac{1}{2p}\int_x^\infty |g(s)|\frac{\eta^n(s)}{n!}ds\le\frac{\eta^{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

Из оценки (2.7) следует сходимость ряда (2.6), а также, что

$$|\tilde{V}(x,p)|\le\exp[\eta(x)],\quad |V(x,p)|\le\exp[\eta(x)-px]$$

Из граничного условия (2.4) получим следующее уравнение, корни которого определяют отрицательные собственные значения, множество которых конечно.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[H_n'(0,p)-(\varphi(0)+p)H_n(0,p)\right]=\varphi(0)+p$$

3.Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров неоднородности. Сначала рассмотрим случай слабо неоднородной среды [1-2].

Пусть $\rho(x)=\rho_0\left(1+\varepsilon_\rho e^{-qx}\right)$, $\mu(x)=\mu_0\left(1+\varepsilon_\mu e^{-qx}\right)$, $|\varepsilon_\mu|<1,|\varepsilon_\mu|<1$, $q>0$.

Для этой среды функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x),\varphi(x)$ имеют вид

$$\psi_1(x)=\frac{q^2\varepsilon_\mu e^{-qx}(2+\varepsilon_\mu e^{-qx})}{4\left(1+\varepsilon_\mu e^{-qx}\right)^2},\ \psi_2(x)=\frac{(\varepsilon_\rho-\varepsilon_\mu)e^{-qx}}{c_0^2\left(1+\varepsilon_\mu e^{-qx}\right)},\ \varphi(x)=-\frac{\varepsilon_\mu q e^{-qx}}{2\left(1+\varepsilon_\mu e^{-qx}\right)}$$

Так как функции $\psi_1(x),\psi_2(x)$ являются суммируемыми, то в этой среде возможно существование решений в виде поверхностных волн.

В частности, если $\varepsilon_\rho<\varepsilon_\mu,\varepsilon_\mu>0$, то в этом случае $g(x)>0,\varphi(0)<0$ и, следовательно, краевая задача имеет единственное решение. В остальных случаях имеем конечное множество решений.

Теперь обратимся к другому примеру неоднородности, допускающего решение с помощью функций Бесселя.

Пусть

$$\mu(x)=\mu_0\mathrm{ch}^2(\alpha x+\beta),\ \rho(x)=\rho_0\mathrm{ch}^2(\alpha x+\beta)\left(1+\gamma e^{-2qx}\right),\ \alpha>0,q>0,|\gamma|<1$$

В этом случае функция $g(x)$ имеет вид

$$g(x)=-\frac{\omega^2\gamma}{c_0^2}e^{-2qx}$$

а для λ имеем

$$\lambda=\frac{\omega^2}{c_0^2}-k^2-\alpha^2,c_0^2=\frac{\mu_0}{\rho_0}$$

На основе вышеизложенных результатов можно заключить, что при $\gamma>0,\lambda<0$ задача имеет не более чем счетное число собственных функций, сответствующих поверхностным волнам.

В случае, когда $\gamma<0$, задача имеет единственное решение, если

$$\varphi(0)=\alpha\mathrm{th}\beta<0,\qquad \alpha>0,\beta<0$$

Аналогичные результаты можно получить также из непосредственного решения уравнения (2.3).

Уравнение (2.3) с помощью замены переменной $z(x)=\dfrac{\omega\sqrt{\gamma}}{c_0q}e^{-qx}$ приводится к уравнению Бесселя

$$z^2V''+zV'+(z^2-\upsilon^2)V=0;\quad \upsilon=\frac{\sqrt{|\lambda|}}{q} \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) при $\gamma>0$ имеет решение $V(z)=C_1J_\upsilon(z)+C_2K_\upsilon(z)$

В точке $z=0$ функция $K_\upsilon(z)$ имеет особенность, а функция $J_\upsilon(z)$

нуль υ- порядка и, следовательно, принимая $C_2 = 0$, имеем

$$V(z) = J_\upsilon\left(\frac{\omega\sqrt{\gamma}}{c_0 q} e^{-qx}\right)$$

При $x \to \infty$ $(z \to 0)$ имеем $V \sim e^{-\sqrt{|\lambda|}x}$.

Из граничных условий получим следующие уравнения, определяющие собственные значения:

$$-z_0 J_\upsilon'(z_0) = \frac{\varphi(0)}{q} J_\upsilon(z_0), \qquad z_0 = \frac{\omega\sqrt{\gamma}}{c_0 q}$$

или

$$J_\upsilon(z_0) = 0 \tag{3.2}$$

Трансцендентные уравнения (3.2) имеют конечное число решений, относительно индекса υ (собственных чисел)

При $\gamma < 0$ имеем, соответственно

$$V(z) = C_1 J_\upsilon(iz) = C_1 I_\upsilon(z), \; z = \frac{\omega\sqrt{|\gamma|}}{c_0 q} e^{-qx}$$

где $I_\upsilon(z)$ есть модифицированная функция Бесселя первого рода . Функция $I_\upsilon(z)$ является монотонно возрастающей функцией от своего аргумента, имеющая в точке $z = 0$ нуль υ- порядка.

Соответствующее трансцендентное уравнение

$$-z_0 I_\upsilon'(z_0) = \frac{\varphi(0)}{q} I_\upsilon(z_0), \qquad z_0 = \frac{\omega\sqrt{|\gamma|}}{c_0 q}$$

в силу монотонности функции $I_\upsilon(z_0)$, $\left(I_\upsilon'(z_0)\right) > 0$ имеет единственное решение, если $\varphi(0) < 0$. В остальных случаях оно не имеет решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах.- М.: Наука, 1981. 288с.
2. Белубекян М.В., Мухсихачоян А.Р. Сдвиговые поверхостные волны в слабо неоднородных упругих средах.-Акустический журнал, 1996, т. 42, №2, с.179-182.
3. MauginG.A. Elastic Surface Waves with Transverse Horizontal Polarization.- Advances in Applied Mechanics. 1983, v.23, p.373-474.
4. Абрамян А.К., Индейцев Д.А. Ловушечные моды колебаний в мембране с неоднородностью.-Акустический журнал, 1998, т.44, №4, с.437-442.
5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы.-М.: Наука, 1969. 526с.
6. Новацкий В. Теория упругости.-М.: Мир, 1975. 872с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
24.03.1999