ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №4, 1999 Механика

УДК 517:934

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ

Саркисян Саркис В., Шагинян С.Г.

Սարգիս Վ. Սարգսյան, Ս.Գ. Շահինյան
Սալի ոչ գծային տատանումների օպտիմալ ստաբիլիզացիան

Դիտարկվում է հոդակապորեն ամրացված ուղղանկյուն սալի ոչ գծային տատանումների օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդիրը: Ստաբիլիզացիան կատարվում է սալի վերին հարթության վրա կիրառված ուղղահայաց բեռի օգնությամբ: Խնդիրը բերված է երկրորդ կարգի անջատվող փոփոխականներով սովորական ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների անվերջ համակարգի օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդրին: Որոշված է Լյապունովի օպտիմալ ֆունկցիան և օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունը համակարգի էներգիայի մինիմիզացիայի դեպքում:

Sarkis V. Sarkisyan, S.G. Shahinyan
Optimal Stabilization of Nonlinear Vibrations of a Plate

Рассмотрена задача оптимальной стабилизации нелинейных колебаний пластинки распределенной силой, приложенной к поперечному направлению верхней поверхности. Представляя решения в виде рядов Фурье, задачи свободных колебаний сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно времени. Далее рассматривается следующая задача оптимальной стабилизации: определить такое оптимальное стабилизирующее воздействие, которое минимизирует функционал, представляющий собой полную энергию по всей поверхности пластинки, и удовлетворяет всем граничным и начальным условиям.

Функция Ляпунова разлагается в ряд, где первый член – функция Ляпунова для линейной системы, а последующие – нелинейное приближение. Применяя теорему Ляпунова-Бельмана, решается линейная задача. Далее для остальных приближений используются преобразования, с помощью которых определяют последующие приближения функции Ляпунова.

Получены выражения для оптимального управления и стабилизирующей силы. Используя известные методы, доказана равномерная сходимость рядов решений и конечность мимнимизирующих интегралов.

Рассматриваются нелинейные колебания шарнирно опертой прямоугольной пластинки плотности ρ, постоянной толщины h, $(a \times b)$ с краями, свободно смещающимися в плоскости опорного контура [1]. Пластинка стабилизируется при помощи поперечной нагрузки $q(x,y,t)$, приложенной к верхней поверхности пластинки. Поперечное перемещение срединной поверхности пластинки обозначим через $w(x,y,t)$. Дифференциальные уравнения нелинейных колебаний будут [1]

$$\frac{D}{h}\nabla^4 w = L(w,\Phi) - \frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{q}{h}$$
$$\frac{1}{E}\nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2}L(w,w) \qquad (1)$$

где D – жесткость пластинки, Φ – функция напряжения срединной поверхности,

$$\nabla^4 = \nabla^2\nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$L(w,\Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \tag{2}$$

Края пластинки удовлетворяют следующим условиям шарнирного опирания:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad \begin{matrix} x = 0, x = a \\ y = 0, y = b \end{matrix} \tag{3}$$

а перемещение w и функция напряжений Φ связаны между собой известным соотношением [1].

Начальные условия для решения системы (1) таковы :

$$w(x,y,0) = \Psi(x,y) \qquad \dot{w}(x,y,0) = \Psi_1(x,y) \tag{4}$$

где $\Psi(x,y)$ и $\Psi_1(x,y)$ –соответственно, начальный прогиб и начальная скорость срединной поверхности.

Задача оптимальной стабилизации заключается в следующем: определить оптимальное стабилизирующее воздействие $q(x,y,t)$ так, чтобы выполнялись условия

$$w(x,y,\infty) \to 0, \ \dot{w}(x,y,\infty) \to 0 \tag{5}$$

при минимизации функционала

$$J[u] = K + V + \frac{g}{h\gamma}\int_0^\infty\int_0^b\int_0^a q^2\,dxdydt$$

где K – кинетическая, V – потенциальная энергии системы.

Выберем для прогиба выражение:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t)\sin\frac{\pi x m}{a}\sin\frac{\pi y n}{b} \tag{6}$$

Далее, как обычно, решая систему уравнений (1) применяя метод Бубнова-Галеркина, приходим к следующим безразмерным обыкновенным дифференциальным уравнениям, описывающим нелинейные колебания пластинки [1]:

$$\frac{d^2\xi_{mn}}{dt^2} + \omega_{0,mn}^2\left(\xi_{mn} + \eta_{mn}\xi_{mn}^{\ 3}\right) = \bar{q}_{mn}(t) \tag{7}$$

где

$$\xi_{mn}(t) = \frac{f_{mn}(t)}{h}, \quad \eta_{mn} = \frac{3}{4}(1-\mu^2)\left[1+\left(\frac{n}{m}\lambda\right)^4\right] \Big/ \left[1+\left(\frac{n}{m}\lambda\right)^2\right]^2$$

$$\omega_{0,mn}^2 = \frac{\pi^4 m^4\left(1+\frac{n^2}{m^2}\lambda^2\right)^2}{12\lambda^2(1-\mu^2)}\left(\frac{ch}{ab}\right)^2, \bar{q}_{mn}(t) = \frac{16}{\pi^2 E}\left(\frac{c}{h}\right)^2 q_{mn}(t), \ \lambda = \frac{a}{b}$$

а $q_{mn}(t)$ - коэффициент разложения в ряд Фурье нагрузки $q(x,y,t)$

$$q(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}q_{mn}(t)\sin\frac{\pi xm}{a}\sin\frac{\pi yn}{b} \quad (8)$$

Теперь задачу оптимальной стабилизации для каждых m,n можно сформулировать следующим образом: определить оптимальное стабилизирующее воздействие так, чтобы выполнялись условия

$$\xi_{mn}(\infty)\to 0, \qquad \dot{\xi}_{mn}(\infty)\to 0 \quad (9)$$

и минимизировался функционал

$$J_{mn}=\int_0^{\infty}\left[\left(\frac{d\xi_{mn}}{dt}\right)^2+\omega_{0,mn}^2\xi_{mn}{}^2+\bar{q}_{mn}^2\right]dt \quad (10)$$

по всей поверхности пластинки (так как минимум суммы равен сумме минимумов). Как управляющая функция рассматривается $\bar{q}_{mn}(t)$.

Преобразуем систему (7), вводя обозначения

$$x_1=\omega_0\xi;\;\; x_2=\dot{\xi};\;\; u=\bar{q}(t) \quad (11)$$

Ввиду того, что аналогичным образом нужно поступать для всех значений индексов m и n, они опущены.

Из (7) и (11) получим

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=\omega_0 x_2\\ \dot{x}_2&=-\omega_0 x_1-\frac{\eta}{\omega_0}x_1^3+u\end{aligned} \quad (12)$$

Используя обозначения (11), функционал (10) примет следующий вид:

$$J=\int_0^{\infty}\left(u^2+x_1^2+x_2^2\right)dt \quad (13)$$

Система уравнений (12) нелинейная. Для тривиального решения задачи оптимальной стабилизации воспользуемся методом, предложенным в [2].

Функция Ляпунова для системы (12) представляется в виде

$$V(x_1,x_2)=V_2(x_1,x_2)+V_3(x_1,x_2)+\cdots \quad (14)$$

где $V_k(x_1,x_2)$ –форма k-того порядка.

Линейное приближение системы (10) следующее:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=\omega_0 x_2\\ \dot{x}_2&=-\omega_0 x_1+u\end{aligned} \quad (15)$$

для которого принимаем

$$V_2(x_1,x_2)=c_1x_1^2+2c_2x_1x_2+c_3x_2^2 \quad (16)$$

Воспользуясь известным уравнением Бельмана и представлением (16), получим

$$\begin{aligned}&(2c_1x_1+2c_2x_2)\omega_0x_2-(2c_2x_1+2c_3x_2)\omega_0x_1-\\ &-\frac{1}{4}(2c_2x_1+2c_3x_2)^2+x_1^2+x_2^2=0\end{aligned} \quad (17)$$

Коэффициенты c_1, c_2, c_3, удовлетворяющие условию определенно-положительности функции $V_2(x_1, x_2)$, будут:

$$c_1 = \frac{\sqrt{1 - 2\omega_0^2 + 2\omega_0\sqrt{\omega_0^2 + 1}}\sqrt{\omega_0^2 + 1}}{\omega_0}$$

$$c_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 1} - \omega_0 \tag{18}$$

$$c_3 = \sqrt{1 - 2\omega_0^2 + 2\omega_0\sqrt{\omega_0^2 + 1}}$$

Для линейного приближения (13) оптимальное управление следующее:

$$u_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial V_2}{\partial x_2} = -c_2 x_1 - c_3 x_2 \tag{19}$$

Для упрощения вычислений последующих приближений функции $V(x_1, x_2)$, воспользуемся следующим линейным преобразованием, приводящим функцию $V_2(x_1, x_2)$ к каноническому виду:

$$y_1 = \sqrt{c_1}x_1 + \frac{c_2}{\sqrt{c_1}}x_2$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_1}}x_2 \tag{20}$$

$$V_2(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 \tag{21}$$

Используя преобразования (20), уравнения (12) примут следующий вид:

$$\dot{y}_1 = -\frac{c_2\omega_0}{c_1}y_1 + \frac{\omega_0\left(c_1^2 + c_2^2\right)}{c_1 c_4}y_2 - \frac{c_2\eta}{c_1^2\ \omega_0}y_1^3 +$$

$$+\frac{3c^2{}_2\eta}{c_1^2\ \omega_0 c_4}y_1^2 y_2 - \frac{3c^2{}_2\eta}{c_1^2\ \omega_0 c_4^2}y_1 y_2^2 + \frac{c^4{}_2\eta}{c_1^2\ \omega_0 c^3{}_4}y_2^3 + \frac{c_2}{\sqrt{c_1}}u$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{c_4\omega_0}{c_1}y_1 + \frac{\omega_0 c_2}{c_1}y_2 - \frac{c_4\eta}{c_1^2\ \omega_0}y_1^3 + \frac{3c_2\eta}{c_1^2\omega_0}y_1^2 y_2 - \tag{22}$$

$$-\frac{3c_2^2\eta}{c_1^2\omega_0 c_4}y_1 y_2^2 + \frac{c^3{}_2\eta}{c_1^2\ \omega_0 c^2{}_4}y_2^3 + \frac{c_4}{\sqrt{c_1}}u$$

а минимизируемый функционал (11) –

$$J = \int_0^\infty\left(u^2 + \frac{1}{c_1\omega_0^2}y_1^2 - \frac{2c_2}{c_1\omega_0^2 c_4}y_1 y_2 + \frac{c_2^2 + c_1^2\omega_0^2}{c_1\omega_0^2 c_4^2}y_2^2\right)dt \tag{23}$$

где $c_4 = \sqrt{c_1 c_3 - c_2^2}$

Далее, используя метод, предложенный в [2], для последующих приближений функции Ляпунова будем иметь:

$$V_3(y_1,y_2)=V_5(y_1,y_2)=V_7(y_1,y_2)=\cdots\equiv 0$$
$$V_4(y_1,y_2)=A_1y_1^4+A_2y_1^3y_2+A_3y_1^2y_2^2+A_4y_1y_2^3+A_5y_2^4 \tag{24}$$
$$V_6(y_1,y_2)=B_1y_1^6+B_2y_1^5y_2+B_3y_1^4y_2^2+B_4y_1^3y_2^3+B_5y_1^2y_2^4+B_6y_1y_2^5+B_7y_2^6$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

где $A_i(i=1,\cdots,5)$ – следующие:

$$A_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad A_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad A_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},\quad A_4=\frac{\Delta_4}{\Delta},\quad A_5=\frac{\Delta_5}{\Delta} \tag{25}$$

а коэффициенты остальных форм четного порядка определяются аналогичным образом.

Здесь

$$\Delta=\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 4d_{21} & d_{22} & 2d_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 3d_{21} & d_{33} & 3d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 2d_{21} & d_{44} & 4d_{23} \\ 0 & 0 & 0 & d_{21} & d_{55} \end{vmatrix}$$

$\Delta_i \quad (i=(1,\cdots,5))$ – соответствующие алгебраические дополнения, а

$$d_{11}=4c_2(\omega_0+c_2);\quad d_{12}=c_4(c_1+c_2);\quad d_{21}=c_1^2\omega_0+c_2^2\omega_0-c^2{}_4c_2$$
$$d_{23}=-d_{12};\ d_{22}=-c_4(2c_2\omega_0+2c_2^2+c_1c_3);\ d_{33}=-2c_1c_3c_4$$
$$d_{44}=-c_4(3c_1c_3-2c_2^2-2\omega_0c_2);\ d_{55}=-4c_4(c_1c_3-c_2^2-\omega_0c_2)$$
$$d_1=-\frac{2c_2\eta}{c_1\omega_0};\quad d_2=\frac{(2c_1c_3-8c_2^2)\eta}{c_1\omega_0};\quad d_3=\frac{6c_2\eta(2c_2^2-c_1c_3)}{c_1c_4\omega_0}$$
$$d_4=\frac{2c_2^2\eta(2c_2^2-3c_1c_3)}{c_1c_4^2\omega_0};\quad d_5=-\frac{2c_2^3\eta}{c_1c_4\omega_0}$$

То есть для $V(y_1,y_2)$ можно записать:

$$V(y_1,y_2)=y_1^2+y_2^2+A_1y_1^4+A_2y_1^3y_2+A_3y_1^2y_2^2+A_4y_1y_2^3+A_5y_2^4+\ldots \tag{26}$$

а оптимальное управляющее воздействие –

$$u^0(y_1,y_2)=-\frac{c_2}{2\sqrt{c_1}}\left(2y_1+4A_1y_1^3+3A_2y_1^2y_2+2A_3y_1y_2^2+A_4y_2^3\right)-$$
$$-\frac{c_4}{2\sqrt{c_1}}\left(2y_2+A_2y_1^3+2A_3y_1^2y_2+3A_4y_1y_2^2+4A_5y_2^3\right)+\cdots. \tag{27}$$

В [2] доказаны сходимость рядов (26) и (27).

Воспользовавшись обозначением (11) и преобразованием (20), т.е.

$$y_1 = \sqrt{c_1}\omega_0\xi + \frac{c_2}{\sqrt{c_1}}\dot{\xi}$$
$$y_2 = \frac{c_4}{\sqrt{c_1}}\dot{\xi} \tag{28}$$

получаются выражения для функции Ляпунова $V^0\ (\xi,\dot{\xi})$ и оптимального управления $u^0(\xi,\dot{\xi})$, зависящие от ξ и $\dot{\xi}$.

Так как $\frac{\partial^4 W}{\partial x^i \partial y^{4-i}}$ $(i=0,...,4)$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ принадлежат, по крайней мере, классу L_2, то полученные ряды по m и n сходятся [3,4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек.-М:. Наука, 1972.
2. Альбрехт Э.Г. Об оптимальной стабилизации нелинейных систем.- ПММ, 1961, т. 25, вып. 5, с.836-844.
3. Саркисян В.С., Габриелян М.С., Юсиф ДЖ. Юсиф
   а) Об оптимальной устойчивости ортотропной прямоугольной пластинки.- Уч. записки ЕГУ, 1987, вып.3, с.37-42.
   б) К задаче оптимальной устойчивости колебательной ортотропной прямоугольной пластинки.- Уч.записки ЕГУ, 1991, вып.2, с.69-73.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.-М.: Наука, 1976.

Кафедра теоретической
механики ЕГУ

Поступила в редакцию
17.02.1999