

УДК 539.3

О НЕЛИНЕЙНОМ ФЛАТТЕРЕ ПЛАСТИН В  
СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Белубекян В.М., Минасян М.М.

Վ. Մ. Բելուբեկյան, Մ. Մ. Մինասյան

Գերձայնային զափի հոսանքում սալի ոչ զծային ֆլատտերի մասին

Դիտարկված են հաստատուն էլեկտրական հոսանք փոխադրող ուղղանկյուն սալի ընդլայնական տատանումները: Սալի նյութի հատկությունները կախված են նրա ղեֆորմացիայի արագություններից: Այդպիսի նյութի հայտնի միաչափ մոդելը ընդհանրացված է տարածական լարվածա-ղեֆորմացիոն փնձակի համար: Դրա հիման վրա ստացված են սալի տատանումների հավասարումները: Սալի հարկադրական տատանումների խնդիրը եզրային պայմանների տարբեր դեպքերում լուծված է րվանդրեն, որը դեպքերում հայտնաբերված են քառասյին տատանումներ: Որոշ մասնավոր դեպքերում ստացված են խնդրի անալիտիկ լուծումներ:

V.M. Belubekyan, M.M. Minassian

On the nonlinear flutter of plates in supersonic gas flow

Рассматриваются поперечные колебания прямоугольной пластинки, по которой протекает электрический ток. Свойства материала пластинки зависят от скоростей деформации. Известная одномерная модель подобного материала обобщена для случая пространственного напряженно-деформированного состояния. На ее основе установлены уравнения колебаний пластинки. Задача о вынужденных колебаниях пластинки при различных граничных условиях решена численно, в некоторых случаях обнаружены хаотические колебания. В некоторых частных случаях получены аналитические решения задачи.

**Введение.** В большом разнообразии задач аэроупругости-взаимодействия потока сжимаемой жидкости с обтекаемой упругой конструкцией важное место занимают задачи о потере устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Возникнув на заре развития сверхзвуковой авиации и ракетостроения, эта проблема приковала к себе внимания многих ученых и в настоящее время количество работ, посвященных ей, практически необозримо. Тем не менее, проблема в наиболее общей постановке, когда следует учитывать все существенные особенности внешней среды, все механические характеристики обтекаемого тела и всех механизмов взаимодействия среды и тела далека от завершения. В научной литературе имеется ряд блестящих работ, содержащих как исторический обзор развития проблемы, методы решений многочисленных задач, так и обширную библиографию. Здесь ограничимся приведением только тех, которые в той или иной степени имеют отношение к теме данной работы [1,2,3,4,5].

В вопросе о потере устойчивости пластин особо выделяется так называемый "панельный" флаттер [3]. Для бесконечной пластины, обтекаемой однородным потенциальным потоком идеального газа, для прогиба пластины выводится одно интегро-дифференциальное уравнение,

что обусловлено нелокальностью связи между избыточным давлением газа и движением пластины. Считается (как нам кажется, не вполне обоснованно), что это же уравнение пригодно также для конечных пластин. В последнем случае привлекаются граничные условия чисто механической природы. Хотя и в такой постановке решены многочисленные задачи, однако, результаты, близкие к точному, относятся к весьма частным случаям, в остальных же случаях они носят приближенный характер. Попытки перехода к высшим приближениям наталкиваются на весьма громоздкие вычисления. Из-за отсутствия априорных оценок погрешностей, общих методов сходимости итерационных процессов, отношение к результатам требует осторожного подхода.

В случае больших сверхзвуковых скоростей потока на основании теории подобия задача существенно упрощается. Применяя один из вариантов закона "плоских сечений", интегро-дифференциальное уравнение вырождается в дифференциальное уравнение. Эта трансформация является следствием уже локальной связи давления и движения пластинки ("поршневая теория"). Эта теория оказалась очень плодотворной для эффективного решения многих задач. Однако, вместе с этим, эта теория, не выяснив ряда принципиальных вопросов общей постановки, в свою очередь, привнесла новую проблематику в методы решения задач (достаточно вспомнить известный парадокс флаттера мембраны [8]).

В работах [6,7] предложен метод определения избыточного давления газа на пластинку. По точности это приближение является промежуточным между "поршневой" теорией и нелокальным соотношением, приводящим к интегро-дифференциальному уравнению. Характерной особенностью этого приближения является то, что, сохранив специфику "точной" постановки (нелокальная связь), как и в "поршневой" теории, получается дифференциальное уравнение, правда, более высокого порядка. В линейной задаче для бесконечной пластины в двумерном потоке (задача допускает точный анализ в исходной постановке) авторами показано, что предложенный ими подход качественно и количественно дает более правильные результаты по сравнению с "поршневой" теорией.

В настоящей работе рассматриваются нелинейные колебания конечной пластины в двумерном сверхзвуковом потоке газа в указанном выше приближении.

**Исходные уравнения и граничные условия.** Рассматриваются цилиндрические по форме колебания конечной пластины, смонтированной в абсолютно жесткую диафрагму и односторонне обтекаемую двумерным сверхзвуковым потоком идеального газа. Согласно [6,7] имеем систему уравнений

$$L[w] + p = 0$$

$$\frac{Dp}{Dt} = \rho_0 a_0 \frac{D^2 w}{Dt^2} + \beta \rho_0 a_0^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \left( \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (1)$$

В системе (1)  $L$ -оператор движения пластины в вакууме,  $p$ -избыточное давление газа,  $U$ -невозмущенная скорость потока,  $\rho_0, a_0$ -

невозмущенные параметры газа,  $w(x, t)$  — прогиб пластины. Коэффициент  $\beta$  выбирается из условия наилучшего согласования некоторых критических параметров, вычисленных на основе системы (1) и в другой постановке в задачах, допускающих более или менее точные решения. В работе [7] показано, что по первому приближению после "поршневой"  $\beta = 1$ , по второму же  $-\beta = 0.5$ . Там же показано, что для хорошего согласования наименьшего значения числа Маха потока в зависимости от коэффициентов демпфирования в случае бесконечной пластины  $\beta = 0.86$ . При необходимости, любую другую поправку можно ввести в окончательные данные.

Заметим, что "поршневое" приближение соответствует значению  $\beta = 0$ . Тогда, как видно из (1), второе уравнение системы после интегрирования переходит в соотношение "поршневой" теории

$$p = \rho_0 a_0 \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2)$$

Поскольку порядок системы определяется порядком оператора  $L$ , то это означает, что граничные условия будут диктоваться сугубо механическими способами закрепления краев пластины. В нашем случае порядок системы по  $x$  и  $t$  на единицу больше порядка оператора  $L$ , что потребует добавления по одному начального и граничного условий. Что касается начального условия, то оно естественным образом связано с начальным распределением избыточного давления на пластинку. В данной работе наиболее важным является вопрос граничных условий. Как известно, из-за механической симметрии число граничных условий для первого уравнения системы (1) в каждой кромке равно половине порядка оператора по координате  $x$ . С учетом второго уравнения симметричность кромок нарушается. Учитывая, что аэродинамические возмущения входят в систему через переднюю по потоку сверхзвуковую кромку, естественно, именно там следует поставить дополнительное граничное условие. Это особенно убедительно, когда оператор  $L$  гиперболический (например, случай мембраны), поскольку дополнительная характеристика повышенной по порядку системы входит в цилиндрическую область  $[0, 1] \times (0, \infty)$  плоскости  $(x, t)$  именно через границу  $x = 0$ .

В качестве дополнительного граничного условия примем формулу Аккерета-Буземана для сверхзвуковой передней кромки обтекания угла

$$p(0, t) = \chi \rho_0 a_0 U \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \quad (3)$$

где коэффициент  $\chi(M)$  определяется из теорий подобия сверхзвуковых течений (при очень высоких скоростях  $\chi = 1$ ).

Исключая из системы (1) давление, для функции  $w(x, t)$  получим уравнение

$$L_1[w] = \frac{D}{Dt} L[w] + \rho_0 a_0 \frac{D^2 w}{Dt^2} + \beta \rho_0 a_0^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

Ради простоты возьмем случай шарнирного опирания кромок:

$$w(0, t) = w(1, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(1, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

Дополнительное граничное условие имеет вид

$$L_0[w(0, t)] + \chi \rho_0 a_0 U \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

где  $L_0$  получается вычеркиванием нулевых выражений в  $L$ .

Таким образом, вопрос устойчивости сводится к исследованию уравнения (4) при граничных условиях (5) и (6).

Подобные задачи требуют применения приближенных методов, из которых наиболее эффективными являются проекционные методы. Эти методы сводят упругую систему к некоторой конечномерной системе. Границы применения таких методов обоснованы лишь только в частных случаях самосопряженных задач, каковыми не являются задачи аэроупругости. Степень свободы конечномерной системы зависит от числа удерживаемых членов в разложении решения по координатным функциям (в проекционных методах - это функции сравнения или "балочные" функции). Поскольку в несамосопряженных задачах эти функции не представляют нормальных колебаний, то для определения главных (нижних) частот с достаточной точностью, приходится удерживать несколько первых членов разложения. Флаттерные колебания обусловлены парными взаимодействиями обобщенных координат. Появления флаттера соответствуют замыканию "петель" парциальных частот над пространством параметров задачи. Исследования В.В. Болотина [3,8] по определению границ применения вариационного метода Галеркина для пластин и оболочек показали, что критические параметры следует вычислять из условия замыкания нижних частот. Тогда логично предположить, что при "хорошем" (смысл уточняется ниже) выборе функций сравнения, флаттер, если он есть, можно обнаружить из уравнения частот для первой формы колебания. Необходимым условием для этого является переход частоты через мнимую ось в комплексной плоскости частоты.

**Решение задачи.** Для упругой пластинки выражение  $L[w]$  возьмем в виде

$$L[w] = D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (N + N_e) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \epsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h k w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (7)$$

где  $D$  - изгибная жесткость,  $N$  - осевое усилие,  $\epsilon$  - коэффициент конструкционного демпфирования,  $k$  - коэффициент Винклера,  $N_e$  - нелинейное осевое усилие Бергера.

$$N_c = \frac{Eh}{2l(1-\nu^2)} \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

Введя безразмерные параметры и переменные, уравнение (7) примет вид

$$\Delta[W] = \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + M_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left[ \frac{1}{\pi^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - \left( T_0 + \frac{6T_c}{\pi^4} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + (\varepsilon_0 + \lambda_0) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 W}{\partial \tau^2} + \mu_0 W + \lambda_0 M_1 \frac{\partial W}{\partial \xi} \right] + \beta \lambda_0 M_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad (8)$$

где

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad W = \frac{w}{h}, \quad \omega_0^2 = \frac{\pi^4 D}{\rho h l^4}, \quad M_1 = \frac{U}{l \omega_0}, \quad T_0 = \frac{N}{\rho h l^2 \omega_0^2}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\omega_0}, \quad \mu_0 = \frac{k}{\omega_0^2}, \quad M_0 = \frac{a_0}{\omega_0 l}, \quad \lambda_0 = \frac{\rho_0 a_0}{\rho h \omega_0}, \quad T_c = \int_0^1 \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (9)$$

Граничные условия примут вид

$$W(0, \tau) = W(l, \tau) = 0$$

$$\frac{\partial^2 W(0, \tau)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 W(l, \tau)}{\partial \xi^2} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial^4 W(0, \tau)}{\partial \xi^4} + \delta \frac{\partial W(l, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad (\delta = \chi \pi^4 \lambda_0 M_1)$$

Решение будем искать в следующей форме:

$$W(\tau, \xi) = f(t)(\gamma + 1.5\xi^2 - \xi^3) \sin \pi \xi \quad (\gamma = 24\delta^{-1}) \quad (11)$$

Отметим некоторые особенности этого решения. Оно удовлетворяет всем граничным условиям, имеет несимметричный вид, содержит главный параметр задачи - скорость потока  $U$ , и кроме того, в передней кромке удовлетворяет точному интегро-дифференциальному уравнению, приближениями которого являются как "поршневое" уравнение, так и уравнение (8).

Поскольку узловые точки функции (1) суть кромки пластинки, то ее можно принять в качестве "хорошего" приближения к главной форме колебания. Составив уравнения из условия невязки по методу Бубнова-Петрова

$$\int_0^1 \Delta[W(\tau, \xi)] \sin \pi \xi d\xi = 0 \quad (12)$$

для амплитудной функции  $f(\tau)$  окончательно получим уравнение

$$f''' + Af'' + Bf' + Cf + Ff^3 + Rf^2 f' = 0 \quad (13)$$

где

$$A = \varepsilon_0 + \lambda_0 + \frac{M_1}{1+4\gamma} \left(1 + \frac{3}{\pi^2}\right), \quad B = 1 + \mu_0 + \frac{M_1(\varepsilon_0 + 2\lambda_0)}{1+4\gamma} \left(1 + \frac{3}{\pi^2}\right) + \pi^2 T_0$$

$$C = \frac{9M_1}{1+4\gamma} \left(1 + \frac{49}{3\pi^2}\right) + \frac{M_1 T_0 (3 + 5\pi^2)}{1+4\gamma} + \frac{\mu_0 M_1}{1+4\gamma} - \lambda_0 \pi^2 (M_1^2 + \beta M_0^2)$$

$$F = \frac{6T_e^0 M_1}{\pi^2 (1+4\gamma)} \left(5 + \frac{3}{\pi^2}\right), \quad R = \frac{18T_e^0}{\pi^2}, \quad T_e^0 = \frac{\pi^2}{4} (\gamma + 2\gamma^2) + 0.601$$

Прежде чем перейти к исследованию уравнения (13), в частной задаче получим критическую оценку флаттера для сравнения с имеющимися в литературе оценками. В уравнении (13) примем  $\mu_0 = 0$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $T_0 = 0$ ,  $\chi = 1$ ,  $\beta = 1$  и отбросим нелинейные члены. К укороченному уравнению, применив критерий Гурвица, получим следующую оценку:

$$\frac{h}{l} \approx 0.193 \sqrt{\frac{12\rho_0 a_0 (1 - \nu^2) M (M^2 + 1)}{E (M^2 - 0.68)}} \quad (14)$$

В (14)  $M$  — число Маха потока.

Подобные оценки имеются как для конечных пластин, так и для многопролетных пластин с шарнирно закрепленными узлами. Для сравнения приведем результат работы [9] (имеется также ссылка в [3]), которое в обозначениях, принятых в настоящей работе, имеет вид

$$\frac{h}{l} = 0.153 \sqrt{\frac{12\rho_0 a_0^2 (1 - \nu^2) M^2}{E \sqrt{M^2 - 1}}} \quad (15)$$

При  $M > \sqrt{2}$  различие заключается лишь в значениях коэффициентов. В окрестности же  $M = \sqrt{2}$  значения (14) чуть превышают, и их надо считать более достоверными, ибо (15) получено в рамках "поршневой" теории, т.е. при больших  $M$ . Эффективность предложенного метода очевидна, так как оценка получена из рассмотрения главной моды колебания, в то время как для вывода (15) потребовалось включение высших гармоник.

Теперь вернемся к полному уравнению (13). Линеаризуя его в окрестности невозмущенного положения пластинки  $f = 0$ , согласно критерию Гурвица область устойчивости определим из системы неравенств

$$D_2 = AB - C > 0 \quad (16)$$

$$C > 0 \quad (17)$$

Исследование проводится при фиксированных значениях  $M_0$  и  $\lambda_0$ .

Тогда  $D_2$  и  $C$  становятся функциями только осевого усилия  $T_0$  и числа Маха  $M$ . Для определения границ устойчивости следует совместно решить систему

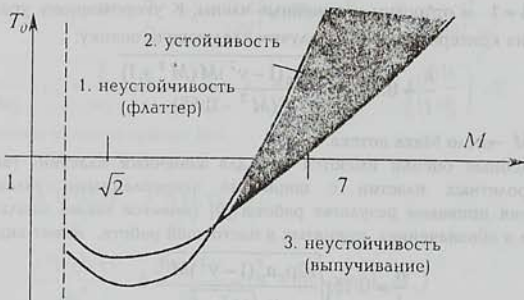
$$D_2(T_0, M) = 0, \quad C(T_0, M) = 0 \quad (18)$$

Линиями, определяемыми системой (18), полуплоскость  $M > 1$  разбивается на области устойчивости и неустойчивости, для выяснения характера которых надо провести дополнительное исследование. Поскольку прямые вычисления громоздки и малонаглядны, то на фиг.1, на основании численных расчетов исследуемая область  $(T, M)$  расчленена линиями  $T_d$  и  $T_c$ , являющимися решениями уравнений

$$D_2(T_d(M), M) = 0 \quad (19)$$

$$C(T_c(M), M) = 0 \quad (20)$$

соответственно.



Фиг. 1

Линии  $T_0 = T_d(M)$  и  $T_0 = T_c(M)$  при  $M > 1$  выходят на свои асимптоты, зависящие от  $M_0$  и  $\lambda_0$ . Понятно, что конкретные графики зависят от выбора  $M_0$  и  $\lambda_0$ . Приведенная на фиг.1 схематичная картина построена для алюминиевой пластинки, обтекаемой на уровне моря при  $h/l = 0.01$ ,  $\epsilon_0 = 0$ ,  $\beta_0 = 0$ ,  $\chi = 0$ . В этом случае область  $(T_0, M > 1)$  разбивается на три подобные области, отмеченные на фиг.1.

В области 1  $C > 0$ ,  $D < 0$  и, следовательно, положение равновесия  $f = 0$  неустойчиво. Уравнение частот линейной системы имеет один положительный корень и два комплексных корня с отрицательными действительными частями. Это — область флаттерных колебаний. Численная симуляция нелинейного уравнения (13) обнаруживает в этом случае предельный цикл.

В области 2 выполняются неравенства (16) и (17). Здесь частотное уравнение имеет один отрицательный корень и опять два комплексных корня с отрицательными действительными частями. Значит, это — область динамической устойчивости, что подтверждается численной симуляцией.

В области 3  $C < 0$ ,  $D > 0$ . Здесь опять имеем неустойчивость, однако

в отличие от области 1, это – неустойчивость типа седла. Уравнение частот имеет один положительный корень и два комплексных с отрицательными действительными частями. Происходит выпучивание пластинки с затухающей колебательной модой. Учет нелинейных членов приводит к бифуркации равновесия, в результате чего появляются два смежных положения равновесия. Численная симуляция показывает, что эти положения динамически устойчивы. При учете конструкционного демпфирования область устойчивости расширяется.

В заключение отметим, что конкретные оценки зависят от конкретных выборов параметров задачи. Объем данной работы не позволил авторам привести численные данные. Основной их целью было то, чтобы показать, что путем качественного уточнения "поршневой" теории в сторону точной и правильного выбора функций сравнения становится возможным исследование задачи о потере устойчивости пластины в сверхзвуковом потоке только по главной моде.

Результаты данной работы говорят в пользу такой возможности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бисплингофф Ф.Л., Эшли Х. и Халфмен Р.Л. Аэроупругость. – М.: ИЛ, 1958.
2. Dowell E.H. Aeroelasticity of Plates and Shells.–Holland: Noordhoff Publ. 1975.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой неустойчивости. – М.: Физматгиз, 1961.
4. Kornecki A. Aeroel. & Hydroel. Instab. II, SM Arch. V.4, Iss.4 Neth. 1979.
5. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Итоги науки, МДТТ, т.11, 1978.
6. Белубекян М.В., Минасян М.М. – О взаимодействии мембраны со сверхзвуковым потоком газа. – В кн.: Пробл. взаим. деформ. сред., Изд. АН Арм.ССР, 1984.
7. Белубекян М.В., Минасян М.М. Об одном новом приближении в проблеме флаттера пластинки в сверхзвуковом потоке. – Изв. НАН Армении, Механика, 1997, т.50, №2, с.27-35.
8. Болотин В.В. О применении вариационного метода Галеркина к задачам флаттера упругих панелей. – Изв. высш. шк., сер. "Машиностроение", 1959, №11.
9. Dowel E.H. The Flutter of Multibay Panels at High Supers.–Sp. AIAA J., 2, 1964.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию  
28.07.1998