ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ**

Մեխանիկա **52, №4, 1999** Механика

УДК 539.3

# СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Гулгазарян Л. Г.

Լ.Գ. Ղուլղազարյան

Օրթոտրոպ շերտի սեփական տատանումների խառը եզրային խնդրի մասին

Դիտարկվում է օրթոտրոպ շերտի սեփական տատանումները, երբ դիմային մակերևույթների վրա տրված են խառը եզրային պայմաններ: Ստացված են հաճախությունների հավասարումները, կառուցված են համապատասխան սեփական ֆունկցիաները և ապացուցված է նրանց օրթոգոնալությունը $-h \le y \le h$ հատվածում:

L.G. Ghulghazaryan

The mixed boundary value problem about free vibrations of the orthotropic strip

В работе рассматриваются собственные колебания ортотропной полосы при смешанных граничных условиях на лицевых поверхностях. Получены уравнения частот, построены собственные функции, доказана их ортогональность на отрезке $-h \le y \le h$

Собственным колебаниям ортотропной полосы посвящены работы [1,2]. В этих работах на продольных сторонах полосы заданы условия I и II краевых задач теории упругости, найдены частоты собственных колебаний и установлены связи между ними и скоростями распространения сейсмических сдвиговых и продольных волн. Случай наличия общей анизотропии рассмотрен в [3]. Собственные колебания двухслойной ортотропной полосы при полном контакте между слоями рассмотрены в [4,5], в [6] найдены частоты собственных колебаний двухслойной ортотропной полосы при неполном контакте между слоями.

В данной работе рассматриваются собственные колебания ортотропной полосы $\Omega = \{(x, y) : x \in [0, l], |y| \le h, h << l\}$ при смешанных граничных условиях на лицевых поверхностях. Получены уравнения частот, построены собственные функции, доказана их ортогональность на отрезке $-h \le y \le h$.

**1.** Задача определения частот и форм собственных колебаний сводится к определению решения однородных динамических уравнений плоской задачи теории упругости

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy}, \ \frac{\partial u_y}{\partial y} = a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy}, \ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = a_{66}\sigma_{xy} \quad (1.1)$$

при начальных

$$u_x = u_{x0}(x,y),\quad u_y = \mathrm{v}_{y0}(x,y)$$
$$u'_{xt} = u_{x1}(x,y),\quad u'_{yt} = \mathrm{v}_{y1}(x,y) \quad \text{при} \quad t=0 \tag{1.2}$$

и граничных условиях

$$\sigma_{yy}(h)=0,\ \sigma_{xy}(h)=0,\ \sigma_{xy}(-h)=0,\ u_y(-h)=0 \tag{1.3}$$

где $\rho$ – плотность полосы, а $a_{ik}$ – упругие коэффициенты.

Решение уравнений (1.1) ищем в виде

$$\sigma_{xx}=\sigma_{11}(x,y)e^{i\omega t},\ \sigma_{yy}=\sigma_{22}(x,y)e^{i\omega t},\ \sigma_{xy}=\sigma_{12}(x,y)e^{i\omega t}$$
$$u_x=\bar{u}_x(x,y)e^{i\omega t},\ u_y=\bar{u}_y(x,y)e^{i\omega t} \tag{1.4}$$

Перейдем к безразмерным переменным $\xi = x/l,\ \zeta = y/h$ и безразмерным компонентам вектора перемещения $u=\bar{u}_x/l,\ \mathrm{v}=\bar{u}_y/l$, в результате получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\rho\omega_*^2 u=0,\quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\rho\omega_*^2\mathrm{v}=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22},\quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial\zeta}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22} \tag{1.5}$$
$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial\xi}=a_{66}\sigma_{12},\quad \omega_*^2=h^2\omega^2$$

Применив метод асимптотических разложений, решение системы (1.5) ищем в виде

$$Q_{ik}=\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^{q_{ik}+s}Q_{ik}^{(s)} \tag{1.6}$$

где $Q_{ik}$ – любая из искомых величин системы (1.5), $q_{ik}$ характеризуют асимптотические порядки этих величин. Считается, что $Q_{ik}^{(m)}=0$, если $m<0$. После подстановки (1.6) в (1.5), получим непротиворечивую систему относительно коэффициентов $Q_{ik}^{(s)}$, если $q_{ik}=-1$ для напряжений, $q_{ik}=0$ для перемещений. Эта система имеет вид

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(s)}}{\partial\zeta}+\rho\omega_*^2u^{(s)}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s)}}{\partial\zeta}+\rho\omega_*^2\mathrm{v}^{(s)}=0$$
$$\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11}^{(s)}+a_{12}\sigma_{22}^{(s)},\quad \frac{\partial\mathrm{v}^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{12}\sigma_{11}^{(s)}+a_{22}\sigma_{22}^{(s)} \tag{1.7}$$
$$\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial\mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{66}\sigma_{12}^{(s)}$$

Из системы (1.7) следует

$$\sigma_{22}^{(s)}=\frac{1}{A_{11}}\frac{\partial\mathrm{v}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{1}{A_{12}}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi},\ \sigma_{11}^{(s)}=-\frac{1}{A_{12}}\frac{\partial\mathrm{v}^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{1}{A_{22}}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}$$

$$\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{a_{66}}\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \xi} \quad (1.8)$$

$$A_{11} = \left(a_{11}a_{22} - (a_{12})^2\right)/a_{11}, A_{12} = \left(a_{11}a_{22} - (a_{12})^2\right)/a_{12}, A_{22} = \left(a_{11}a_{22} - (a_{12})^2\right)/a_{22}$$

а для определения функций $u^{(s)}, v^{(s)}$ получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{66}\omega_*^2 \rho u^{(s)} = -\frac{\partial^2 v^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{66}\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial \zeta^2} + A_{11}\omega_*^2 \rho v^{(s)} = \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial^2 u^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - A_{11}\frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} \quad (1.9)$$

Особый интерес в смысле определения частот собственных колебаний представляет нулевое приближение. При $s=0$ уравнения (1.9) однородны и независимы. Их решения представим в виде

$$u^{(0)} = u_1^{(0)}(\xi)u_0^{(0)}(\zeta), \quad v^{(0)} = v_1^{(0)}(\xi)v_0^{(0)}(\zeta) \quad (1.10)$$

После подстановки (1.10) в (1.9) при $s=0$ получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2 u_0^{(0)}}{d\zeta^2} + a_{66}\rho\omega_*^2 u_0^{(0)} = 0, \quad \frac{d^2 v_0^{(0)}}{d\zeta^2} + A_{11}\rho\omega_*^2 v_0^{(0)} = 0 \quad (1.11)$$

Решениями которых являются

$$u_0^{(0)} = c_1^{(0)} \sin\sqrt{a_{66}\rho}\omega_*\zeta + c_2^{(0)} \cos\sqrt{a_{66}\rho}\omega_*\zeta$$

$$v_0^{(0)} = c_3^{(0)} \sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_*\zeta + c_4^{(0)} \cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_*\zeta \quad (1.12)$$

где $c_i^{(0)} (i = \overline{1,4})$ — произвольные пока постоянные. Подставив (1.10), (1.12) в (1.8), при $s=0$ получим:

$$\sigma_{11}^{(0)} = -1/A_{12}\, v_1^{(0)}(\xi)\sqrt{A_{11}\rho}\omega_*[c_3^{(0)} \cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_*\zeta - c_4^{(0)} \sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_*\zeta]$$

$$\sigma_{22}^{(0)} = 1/A_{11}\, v_1^{(0)}(\xi)\sqrt{A_{11}\rho}\omega_*[c_3^{(0)} \cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_*\zeta - c_4^{(0)} \sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_*\zeta] \quad (1.13)$$

$$\sigma_{12}^{(0)} = 1/a_{66}\, u_1^{(0)}(\xi)\sqrt{a_{66}\rho}\omega_*[c_1^{(0)} \cos\sqrt{a_{66}\rho}\omega_*\zeta - c_2^{(0)} \sin\sqrt{a_{66}\rho}\omega_*\zeta]$$

Подставив (1.12), (1.13) в граничные условия (1.3), получим две системы

$$\begin{cases} c_1^{(0)} \cos\sqrt{a_{66}\rho}\omega_* - c_2^{(0)} \sin\sqrt{a_{66}\rho}\omega_* = 0 \\ c_1^{(0)} \cos\sqrt{a_{66}\rho}\omega_* + c_2^{(0)} \sin\sqrt{a_{66}\rho}\omega_* = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\begin{cases} c_3^{(0)} \cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_* - c_4^{(0)} \sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_* = 0 \\ c_3^{(0)} \sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_* - c_4^{(0)} \cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_* = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Из условия существования ненулевых решений систем (1.14), (1.15) вытекают:

$$\sin\sqrt{a_{66}\rho}\omega_* = 0 \Rightarrow \omega_{*sn} = \frac{\pi n}{\sqrt{a_{66}\rho}} = \pi n v_s \Rightarrow \omega_{sn} = \frac{\pi n v_s}{h}, \quad n \in N \quad (1.16)$$

$$\cos 2\sqrt{A_{11}\rho}\omega_* = 0 \Rightarrow \omega_{*pn} = \frac{\pi(2n-1)}{4\sqrt{A_{11}\rho}} = \frac{\pi(2n-1)v_p}{4} \Rightarrow$$

$$\omega_{pn} = \frac{\pi(2n-1)\mathrm{v}_p}{4h}, \quad n \in N \tag{1.17}$$

где $\mathrm{v}_s$ и $\mathrm{v}_p$ –известные скорости сейсмических сдвиговых и продольных волн соответственно. Таким образом, из уравнений исходного приближения асимтотического представления определяются частоты собственных колебаний. Учитывая (1.16) и (1.17), будем иметь

$$
\begin{gathered}
u_n^{(0)} = C_{2n}^{(0)}(\xi)\cos\pi n\zeta, \quad \sigma_{12n}^{(0)} = -\frac{C_{2n}^{(0)}(\xi)}{a_{66}}\pi n \sin\pi n\zeta \\
\mathrm{v}_n^{(0)} = \frac{C_{4n}^{(0)}(\xi)}{\cos\dfrac{\pi(2n-1)}{4}}\cos\frac{\pi(2n-1)(1-\zeta)}{4} \\
\sigma_{11n}^{(0)} = -\frac{C_{4n}^{(0)}(\xi)}{4A_{12}\cos\dfrac{\pi(2n-1)}{4}}\pi(2n-1)\sin\frac{\pi(2n-1)(1-\zeta)}{4} \\
\sigma_{22n}^{(0)} = \frac{C_{4n}^{(0)}(\xi)}{4A_{11}\cos\dfrac{\pi(2n-1)}{4}}\pi(2n-1)\sin\frac{\pi(2n-1)(1-\zeta)}{4}
\end{gathered}
\tag{1.18}
$$

где $C_{2n}^{(0)}(\xi) = u_1^{(0)}(\xi)c_2^{(0)}, C_{4n}^{(0)}(\xi) = \mathrm{v}_1^{(0)}(\xi)c_4^{(0)}$.

Собственные функции $u_{0n}^{(0)}(\zeta)$ и $\mathrm{v}_{0n}^{(0)}(\zeta)$ составляют ортогональные системы $\{u_{0n}^{(0)}(\zeta)\}$и $\{\mathrm{v}_{0n}^{(0)}(\zeta)\}$ на отрезке [-1;1], так как легко проверить, что

$$\int_{-1}^{1} u_{0n}^{(0)}(\zeta)u_{0m}^{(0)}(\zeta)d\zeta = \begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}, \quad \int_{-1}^{1} \mathrm{v}_{0n}^{(0)}(\zeta)\mathrm{v}_{0m}^{(0)}(\zeta)d\zeta = \begin{cases}2, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases} \tag{1.19}$$

2. Рассмотрим приближения $s > 0$. Решение системы (1.9) будет зависеть от того, какое значение $\omega_*$ взято за основу вычислений, надо рассмотреть как частоты сдвиговых собственных колебаний (1.16), так и частоты продольных собственных колебаний (1.17). В результате общее решение системы (1.9) будет иметь вид:

$$
\begin{aligned}
u_n^{(s)} &= u_1^{(s)}(\xi)(c_{1cn}^{(s)}\sin\sqrt{a_{66}\rho}\,\omega_{*cn}\zeta + c_{2cn}^{(s)}\cos\sqrt{a_{66}\rho}\,\omega_{*cn}\zeta) + \\
&\quad + u_1^{(s)}(\xi)(c_{1pn}^{(s)}\sin\sqrt{a_{66}\rho}\,\omega_{*pn}\zeta + c_{2pn}^{(s)}\cos\sqrt{a_{66}\rho}\,\omega_{*pn}\zeta) + \bar{u}_c^{(s)} + \bar{u}_p^{(s)} \\
\mathrm{v}_n^{(s)} &= \mathrm{v}_1^{(s)}(\xi)(c_{3cn}^{(s)}\sin\sqrt{A_{11}\rho}\,\omega_{*cn}\xi + c_{4cn}^{(s)}\cos\sqrt{A_{11}\rho}\,\omega_{*cn}\zeta) + \\
&\quad + \mathrm{v}_1^{(s)}(\xi)(c_{3pn}^{(s)}\sin\sqrt{A_{11}\rho}\,\omega_{*pn}\xi + c_{4pn}^{(s)}\cos\sqrt{A_{11}\rho}\,\omega_{*pn}\zeta) + \bar{\mathrm{v}}_c^{(s)} + \bar{\mathrm{v}}_p^{(s)} \\
\sigma_{12}^{(s)} &= \sqrt{\rho/a_{66}}\,\omega_{*cn}u_1^{(s)}(\xi)(c_{1cn}^{(s)}\cos\sqrt{a_{66}\rho}\,\omega_{*cn}\zeta - c_{2cn}^{(s)}\sin\sqrt{a_{66}\rho}\,\omega_{*cn}\zeta) + \\
&\quad + \sqrt{\rho/a_{66}}\,\omega_{*pn}u_1^{(s)}(\xi)(c_{1pn}^{(s)}\cos\sqrt{a_{66}\rho}\,\omega_{*pn}\zeta - \\
&\quad - c_{2pn}^{(s)}\sin\sqrt{a_{66}\rho}\,\omega_{*pn}\zeta) + \frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial\bar{u}_c^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\bar{u}_p^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\bar{\mathrm{v}}^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$$\sigma_{11}^{(s)} = -\frac{\sqrt{A_{11}\rho}}{A_{12}}\omega_{*cn}v_1^{(s)}(\xi)(c_{3cn}^{(s)}\cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{*cn}\zeta - c_{4cn}^{(s)}\sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{*cn}\zeta) +$$

$$+\frac{1}{A_{22}}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\sqrt{A_{11}\rho}}{A_{12}}\omega_{*pn}v_1^{(s)}(\xi)(c_{3pn}^{(s)}\cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{*pn}\zeta -$$

$$-c_{4pn}^{(s)}\sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{*pn}\zeta) - \frac{1}{A_{12}}[\frac{\partial\overline{v}_c^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\overline{v}_p^{(s)}}{\partial\zeta}]$$

$$\sigma_{22}^{(s)} = \sqrt{\frac{\rho}{A_{11}}}\omega_{*cn}v_1^{(s)}(\xi)(c_{3cn}^{(s)}\cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{*cn}\zeta - c_{4cn}^{(s)}\sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{*cn}\zeta) -$$

$$-\frac{1}{A_{12}}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi} + \sqrt{\frac{\rho}{A_{11}}}\omega_{*pn}v_1^{(s)}(\xi)(c_{3pn}^{(s)}\cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{*pn}\zeta -$$

$$-c_{4pn}^{(s)}\sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{*pn}\zeta) + \frac{1}{A_{11}}[\frac{\partial\overline{v}_c^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\overline{v}_p^{(s)}}{\partial\zeta}]$$

где $\overline{u}_c^{(s)}, \overline{u}_p^{(s)}, \overline{v}_c^{(s)}, \overline{v}_p^{(s)}$ являются частными решениями соответствующих уравнений (1.9).

Удовлетворив граничным условиям (1.3) и учитывая данные для исходного приближения, получим системы уравнений относительно неизвестных переменных $c_{ij}^{(s)}$, откуда следует, что

$$C_{1pn}^{(s)}(\xi) = -\frac{f^{(s)}(\xi;1) + f^{(s)}(\xi;-1)}{2\cos\sqrt{\rho a_{66}}\omega_{*pn}}, \quad C_{2pn}^{(s)}(\xi) = \frac{f^{(s)}(\xi;1) - f^{(s)}(\xi;-1)}{2\sin\sqrt{\rho a_{66}}\omega_{*pn}}$$

$$C_{3cn}^{(s)}(\xi) = -\frac{\varphi^{(s)}\sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{*cn} + \psi^{(s)}\cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{*cn}}{\cos 2\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{*cn}} \tag{2.2}$$

$$C_{4cn}^{(s)}(\xi) = -\frac{\psi^{(s)}\sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{*cn} + \varphi^{(s)}\cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{*cn}}{\cos 2\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{*cn}}$$

где

$$C_{1pn}^{(s)}(\xi) = u_1^{(s)}(\xi)c_{1pn}^{(s)}, \quad C_{2pn}^{(s)}(\xi) = u_1^{(s)}(\xi)c_{2pn}^{(s)}$$

$$C_{3cn}^{(s)}(\xi) = v_1^{(s)}(\xi)c_{3cn}^{(s)}, \quad C_{4cn}^{(s)}(\xi) = v_1^{(s)}(\xi)c_{4cn}^{(s)}$$

$$f^{(s)}(\xi,\zeta) = \frac{1}{\omega_{*pn}\sqrt{\rho a_{66}}}\left[\frac{\partial\overline{u}_c^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\overline{u}_p^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial\xi}\right], \quad \varphi^{(s)}(\xi) = [\overline{v}_c^{(s)} + \overline{v}_p^{(s)}]\Big|_{\zeta=-1}$$

$$\psi^{(s)}(\xi) = \frac{1}{\omega_{*cn}}\sqrt{\frac{A_{11}}{\rho}}\left[\frac{1}{A_{11}}\left[\frac{\partial\overline{v}_c^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\overline{v}_p^{(s)}}{\partial\zeta}\right] - \frac{1}{A_{12}}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]\Bigg|_{\zeta=1}$$

После подстановки (2.2) в (2.1) получим

$$u_n^{(s)} = C_{2cn}^{(s)}(\xi)\cos\pi n\zeta + \bar{u}^{(s)}(\xi,\zeta),$$

$$\sigma_{12n}^{(s)} = -\frac{\pi n}{a_{66}} C_{2cn}^{(s)}(\xi)\sin\pi n\zeta -$$

$$-\frac{f^{(s)}(\xi;1)\pi(2n-1)\sin(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\,\pi(2n-1)(1+\zeta)/4)}{4\sqrt{A_{11}a_{66}}\,\sin(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\,\pi(2n-1)/2)} -$$

$$-\frac{f^{(s)}(\xi;-1)\pi(2n-1)\sin(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\,\pi(2n-1)(1-\zeta)/4)}{4\sqrt{A_{11}a_{66}}\,\sin(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\,\pi(2n-1)/2)} +$$

$$+\frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial\bar{u}_c^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\bar{u}_p^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]$$

$$\mathrm{v}_n^{(s)} = \frac{C_{4pn}^{(s)}(\xi)}{\cos\dfrac{\pi(2n-1)}{4}}\cos\frac{\pi(2n-1)(1-\zeta)}{4} + \bar{\mathrm{v}}^{(s)}(\xi,\zeta) \qquad (2.3)$$

$$\sigma_{11n}^{(s)} = -C_{4pn}^{(s)}(\xi)\frac{\pi(2n-1)}{4A_{12}\cos\dfrac{\pi(2n-1)}{4}}\sin\frac{\pi(2n-1)(1-\zeta)}{4} -$$

$$-\frac{1}{A_{12}}\left[\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_c^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_p^{(s)}}{\partial\zeta}\right] + \frac{1}{A_{22}}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi} +$$

$$+\frac{\pi n}{A_{12}}\sqrt{\frac{A_{11}}{a_{66}}}\,\frac{\psi^{(s)}(\xi)\cos\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n(1+\zeta)}{\cos 2\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n} +$$

$$+\frac{\pi n}{A_{12}}\sqrt{\frac{A_{11}}{a_{66}}}\,\frac{\varphi^{(s)}(\xi)\sin\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n(1-\zeta)}{\cos 2\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n}$$

$$\sigma_{22n}^{(s)} = C_{4pn}^{(s)}(\xi)\frac{\pi(2n-1)}{4A_{11}\cos\dfrac{\pi(2n-1)}{4}}\sin\frac{\pi(2n-1)(1-\zeta)}{4} +$$

$$+\frac{1}{A_{11}}\left[\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_c^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_p^{(s)}}{\partial\zeta}\right] - \frac{1}{A_{12}}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi} -$$

$$-\frac{\pi n}{\sqrt{A_{11}a_{66}}}\,\frac{\psi^{(s)}(\xi)\cos\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n(1+\zeta)}{\cos 2\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n} -$$

$$-\frac{\pi n}{\sqrt{A_{11}a_{66}}}\,\frac{\varphi^{(s)}(\xi)\sin\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n(1-\zeta)}{\cos 2\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n}$$

$$\overline{u}^{(s)}(\xi,\zeta)=\frac{f^{(s)}(\xi;1)\cos(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\pi(2n-1)(1+\zeta)/4)}{\sin(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\pi(2n-1)/2)}-$$

$$-\frac{f^{(s)}(\xi;-1)\cos(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\pi(2n-1)(1-\zeta)/4)}{\sin(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\pi(2n-1)/2)}+\overline{u}_c^{(s)}+\overline{u}_p^{(s)}$$

$$\overline{\mathrm{v}}^{(s)}(\xi,\zeta)=-\frac{\varphi^{(s)}(\xi)\cos\sqrt{A_{11}/a_{66}}\pi n(1-\zeta)}{\cos 2\sqrt{A_{11}/a_{66}}\pi n}-$$

$$-\frac{\psi^{(s)}(\xi)\sin\sqrt{A_{11}/a_{66}}\pi n(1+\zeta)}{\cos 2\sqrt{A_{11}/a_{66}}\pi n}+\overline{\mathrm{v}}_c^{(s)}+\overline{\mathrm{v}}_p^{(s)}$$

где $C_{2cn}^{(s)}(\xi)=u_1^{(s)}(\xi)c_{2cn}^{(s)}$, $C_{4pn}^{(s)}(\xi)=\mathrm{v}_1^{(s)}(\xi)c_{4pn}^{(s)}$ должны быть определены из начальных условий (1.2).

3. Изложим процедуру удовлетворения начальным условиям (1.2). Компоненты вектора перемещения запишем следующим образом:

$$u^{(s)}=\left[u_{1n}^{(s)}(\xi)u_{0n}^{(s)}(\zeta)+\overline{u}^{(s)}(\xi,\zeta)\right]\sin\omega_{cn}t+\left[u_{2n}^{(s)}(\xi)u_{0n}^{(s)}(\zeta)+\overline{u}^{(s)}(\xi,\zeta)\right]\cos\omega_{cn}t$$

$$\mathrm{v}^{(s)}=\left[v_{1n}^{(s)}(\xi)v_{0n}^{(s)}(\zeta)+\overline{\mathrm{v}}^{(s)}(\xi,\zeta)\right]\sin\omega_{pn}t+\left[v_{2n}^{(s)}(\xi)v_{0n}^{(s)}(\zeta)+\overline{\mathrm{v}}^{(s)}(\xi,\zeta)\right]\cos\omega_{pn}t \quad (3.1)$$

Здесь происходит суммирование по $n$.

Удовлетворим начальным условиям (1.2) для $u^{(s)}$

$$u_{2n}^{(s)}(\xi)u_{0n}^{(s)}(\zeta)+\overline{u}^{(s)}(\xi,\zeta)=u_\xi^{(0,s)}(\xi;\zeta)$$

$$u_{1n}^{(s)}(\xi)u_{0n}^{(s)}(\zeta)+\overline{u}^{(s)}(\xi,\zeta)=\frac{1}{\omega_{cn}}u_\xi^{(1,s)}(\xi;\zeta) \quad (3.2)$$

где $u_\xi^{(0,s)}(\xi;\zeta)=\begin{bmatrix}u_{x0}, & s=0\\ 0, & s>0\end{bmatrix}$, $u_\xi^{(1,s)}(\xi;\zeta)=\begin{bmatrix}u_{x1}, & s=0\\ 0, & s>0\end{bmatrix}$

Разложив функции $u_\xi^{(0,s)}(\xi;\zeta)-\overline{u}^{(s)}(\xi;\zeta)$, $\dfrac{1}{\omega_{cn}}u_\xi^{(1,s)}(\xi;\zeta)-\overline{u}^{(s)}(\xi;\zeta)$, $u_{0n}^{(s)}(\zeta)$

в ряд Фурье по ортогональной системе $\{u_{0n}^{(0)}(\zeta)\}$ на отрезке [-1;1], по известной процедуре определения коэффициентов Фурье получим

$$u_{2n}^{(s)}(\xi)=a_n^{(s)}(\xi),\qquad u_{1n}^{(s)}(\xi)=b_n^{(s)}(\xi) \quad (3.3)$$

где

$$a_n^{(s)}(\xi)=\int_{-1}^{1}\left[u_\xi^{(0,s)}(\xi;\zeta)-\overline{u}^{(s)}(\xi;\zeta)\right]u_{0n}^{(0)}(\zeta)d\zeta$$

$$b_n^{(s)}(\xi)=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\omega_{cn}}u_\xi^{(1,s)}(\xi;\zeta)-\overline{u}^{(s)}(\xi;\zeta)\right]u_{0n}^{(0)}(\zeta)d\zeta \quad (3.4)$$

Аналогичным образом для $\mathrm{v}^{(s)}$ получим

$$\mathrm{v}_{2n}^{(s)}(\xi)=c_n^{(s)}(\xi),\qquad \mathrm{v}_{1n}^{(s)}(\xi)=d_n^{(s)}(\xi) \quad (3.5)$$

где

$$c_n^{(s)}(\xi)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{v}_{\xi}^{(0,s)}(\xi;\zeta)-\overline{\mathrm{v}}^{(s)}(\xi;\zeta)\right]\mathrm{v}_{0n}^{(0)}(\zeta)d\zeta$$

$$d_n^{(s)}(\xi)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\omega_{pn}}\mathrm{v}_{\xi}^{(1,s)}(\xi;\zeta)-\overline{\mathrm{v}}^{(s)}(\xi;\zeta)\right]\mathrm{v}_{0n}^{(0)}(\zeta)d\zeta \qquad (3.6)$$

ЛИТЕРАТУРА


1. Агаловян Л.А. О частотах собственных колебаний анизотропной полосы.- В сб.: Юбил. научн. конф. к 60-летию ГПИ. Гюмри. 1994, с. 23-26.
2. Агаловян М.Л. Об одной задаче на собственные значения, возникающей в сейсмологии. – Докл. НАНА. 1996, т. 96, №2-4, с.23-28.
3. Агаловян М.Л. О собственных значениях и собственных функциях одного дифференциального оператора. – Уч. записки ЕГУ, 1997, № 2 (187), с. 8-14.
4. Агаловян Л.А., Саркисян Л.С. О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы. – В сб.: Труды XVIII Международной конф. по теории оболочек и пластин. РФ. Саратов: 1997, т.1, с. 30-38.
5. Саркисян Л.С. О частотах собственных колебаний двухслойной ортотропной полосы. – Докл. НАНА, 1997, № 3, с. 19-25.
6. Гулгазарян Л. Г. О характере собственных колебаний двухслойной ортотропной полосы при неполном контакте слоев.-Материалы республиканской конференции молодых ученых. Ереван, 1999, с. 39-44.
7. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. – М.: Наука. Физматлит, 1997. 414 с.
8. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.-М.:Наука, 1977. 415 с.



Институт механики
НАН Армении



Поступила в редакцию
27.05.1999