ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **52, №4, 1999** Механика

УДК 534.22

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН В СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Мухсихачоян А. Р.

Ա. Ռ. Մուխսիխաչոյան

Սահքի ալիքների անդրադարձումը և բեկումը երկու միջավայրերի բաժանման եզրից

Դիտարկված է համասեռ կիսատարածությունից ըստ խորության թույլ անհամասեռ կիսատարածության եզրին ընկած սահքի ալիքի անդրադարձումը և բեկումը: Հետազոտված է ընկնող ալիքի ամբողջությամբ երկրորդ միջավայր ներթափանցելու հարցը: Ստացված են սահքի մակերևույթային ալիքի գոյության պայմանները: Թվային հետազոտությամբ ուսումնասիրված են ինչպես անդրադարձման և բեկման գործակիցների, այնպես էլ ալիքի փուլի վարքերը միջավայրի անհամասեռությունից կախված:

A.R. Mukhsikhachoyan
The shear waves propagation in weakly inhomogeneous elastic media

Рассматривается отражение и преломление сдвиговых волн, падающих из однородного полупространства на границу раздела по глубине слабонеоднородного полупространства. Исследован вопро полного проникания падающей волны во второе полупространство. Показано, что пр некоторых условиях могут существовать сдвиговые поверхностные волны и получены эти условия. Численно исследованы коэффициенты отражения, преломления и фаза волн.

Роль границы в волновых процессах в упругих телах раскрывается при анализе отражения и преломления плоских волн на поверхности раздела двух полупространств из разных материалов.

1.Рассмотрим два упругих полупространства, одно из которых является однородным, другое – слабонеоднородным по глубине с общей границей, совпадающей с плоскостью $y=0$. Слабая неоднородность среды заключается в том, что считаются медленно изменяющимися упругие характеристики рассматриваемой среды и амплитуда искомой волны, вследствие чего пренебрегается и вторая производная амплитуды и произведения производных от амплитуд и от упругих характеристик. Волновое движение антиплоской гармонической волны сдвига (SH-волны) считаем плоским, т.е. все его характеристики не зависят от координаты z. $U=\{0;0;U_3(x,y,t)\}$. Полупространства характеризуются соответственно модулями сдвига $G_1, G_2(y)$ и плотностями $\rho_1, \rho_2(y)$.

Система условий сопряжения на границе раздела двух жестко скрепленных полупространств, при которых соблюдается равенство кинематических и силовых характеристик по направлению нормали к поверхности раздела, имеет вид

$$U^{(1)} = U^{(2)}, \sigma_{32}{}^{(1)} = \sigma_{32}{}^{(2)}, y = 0 \qquad (1.1)$$

Пусть из однородного полупространства на границу раздела $y = 0$ под углом α_0 падает сдвиговая волна с единственной отличной от нуля компонентой вектора смещений, удовлетворяющим уравнению движения Ламе

$$\frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial y^2} = \frac{\rho_1}{G_1} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial t^2} \qquad (1.2)$$

В случае граничных условий (1.1), как и при контакте двух однородных полупространств, отражение и преломление сдвиговых волн происходят без генерации других типов волн. Поле упругих перемещений падающих и отраженных волн можно записать в виде

$$U^1 = \left\{U_0 \exp\left[ik_1\left(x + \sqrt{\eta_1 - 1}y\right)\right] + U_1 \exp\left[ik_1\left(x - \sqrt{\eta_1 - 1}y\right)\right]\right\}\exp(-i\omega t) \qquad (1.3)$$

здесь U_0 и U_1 – амплитуды соответственно падающей и отраженной сдвиговых волн $\eta_1 = v_1{}^2 / c_1{}^2, v_1 = \omega / k_1$ – скорость распространения волн вдоль поверхности $y = 0$ в полупространстве $y < 0, c_1 = (G_1 / \rho_1)^{1/2}$ – скорость сдвиговой волны в однородном полупространстве.

Уравнение движения для неоднородной среды, неоднородность которой задана по глубине полупространства, записывается в форме

$$\frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{1}{G_2(y)} \frac{\partial}{\partial y}\left[G_2(y) \frac{\partial U^{(2)}}{\partial y}\right] = \frac{\rho_2(y)}{G_2(y)} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial t^2} \qquad (1.4)$$

Решая уравнение (1.4) по методу медленно изменяющихся амплитуд [1] с точностью допущения слабо изменяющихся функций, получим решение в виде

$$U^{(2)} = \frac{U_2 \exp(-i\omega t)}{\sqrt{G_2(y)} \sqrt[4]{\eta_2(y) - 1}} \exp\left[ik_2\left(x + \int_0^y \sqrt{\eta_2(\zeta) - 1} d\zeta\right)\right] \qquad (1.5)$$

здесь $\eta_2 = \eta_2(y) = v_2{}^2 / c_2{}^2(y), v_2 = \omega / k_2$ – скорость распространения волны вдоль поверхности $y = 0$ в полупространстве $y > 0$, $c_2(y) = [G_2(y)/\rho_2(y)]^{1/2}$ – переменная скорость сдвиговой волны в слабонеоднородном полупространстве.

Удовлетворяя граничным условиям (1.1) и переходя от трансцендентных уравнений к алгебраическим относительно произвольных постоянных U_0 и U_1 с учетом закона Снеллиуса для углов α_1 и α_2 отраженной и преломленной волн

$$k_1 \cos\alpha_0 = k_1 \cos\alpha_1 = k_2 \cos\alpha_2 = k \qquad (1.6)$$

выражения для коэффициентов отражения и преломления получим в виде

$$\frac{U_1}{U_0}=\frac{2\dfrac{G_0}{G_0'}\chi_0^2k(\chi_1g-\chi_0)-i\left[\chi_0^2-\dfrac{G_0}{G_0'}\dfrac{c_0'}{c_0}(\chi_0^2+1)\right]}{2\dfrac{G_0}{G_0'}\chi_0^2k(\chi_1g+\chi_0)+i\left[\chi_0^2-\dfrac{G_0}{G_0'}\dfrac{c_0'}{c_0}(\chi_0^2+1)\right]} \tag{1.7}$$

$$\frac{U_2(0)}{U_0}=\frac{4\dfrac{G_0}{G_0'}\chi_0^2\chi_1kg}{2\dfrac{G_0}{G_0'}\chi_0^2k(\chi_1g+\chi_0)+i\left[\chi_0^2-\dfrac{G_0}{G_0'}\dfrac{c_0'}{c_0}(\chi_0^2+1)\right]} \tag{1.8}$$

где

$$\chi_1=(\eta_0c_s^2-1)^{1/2}=\mathrm{tg}\alpha_1,\ \chi_0=(\eta_0-1)^{1/2}=\mathrm{tg}\alpha_2,\ g=G_1/G_2,\ G_0=G_2(0)$$
$$c_0=c_2(0),\ c_0'=c_2'(0),\ \eta_0=\eta_2(0)=\nu^2/c_0^2,\ \eta_1=\nu^2/c_1^2,\ c_s=c_0/c_1 \tag{1.9}$$

Здесь предполагалось, что $G_0' \neq 0$. Связь между углами падения, отражения и преломления, как следует из (1.6), имеет вид

$$\alpha_1=\alpha_0,\ \cos\alpha_2=c_s\cos\alpha_0 \tag{1.10}$$

Легко заметить, что в случае однородных сред получаются известные зависимости амплитуд отраженной и преломленной волн от амплитуды падающей волны [2]. Эти же зависимости получаются и при формальном предельном переходе $k\to\infty$ (коротковолновое приближение). Результат этого перехода можно истолковать тем, что короткая волна не "чувствует" слабую неоднородность.

Прежде всего ясно, что здесь коэффициенты отражения и преломления являются комплексными и зависят как от величин физико-механических характеристик среды и их производных на поверхности $y=0$, так и от длины волны. При скользящем падении

$$U_1=-U_0,\ U_2=0 \tag{1.11}$$

т.е. падающая волна как бы не "чувствует" слабую неоднородность контактирующего полупространства. Однако при скользящем падении подстановкой (1.11) в (1.3) убедимся, что движение отсутствует. Это обстоятельство следует считать указанием на неприменимость соотношений (1.7) и (1.8) для случая скользящего падения. Подобные к (1.11) выражения получаются и при формальном предельном переходе $k\to 0$ (длинноволновое приближение).

При $\alpha_0<\alpha_0^{kp}$, где $\cos\alpha_0^{kp}=c_s$, величина χ_1 становится чисто мнимой. Тогда из (1.10) для определения угла α_2 следует, что при $c_s>1$ возможны такие углы α_0 ,при которых α_2 становится чисто мнимым. Однако, разумеется, это невозможно при действительном угле падения α_0. Тогда в обоих полупространствах возбуждается неоднородная волна, в которой компонент смещения убывает от поверхности раздела по экспоненциальному закону, т.е. существуют сдвиговые поверхностные (локализованные) волны (СПВ). Формальная возможность существования таких волн определяется обращением в нуль знаменателя в выражении (1.7) или в (1.8), при некоторых чисто мнимых углах $\alpha_0 = i\beta_0, \alpha_2 = i\beta_2$. Тогда получим

$$L(V) = 2k\frac{G_0}{G_0'}(1-\eta_0)\left[(1-\eta_0)^{1/2} + g(1-\eta_1)^{1/2}\right] + \left(\frac{G_0}{G_0'}\frac{c_0'}{c_0} - 1\right)\eta_0 + 1 = 0 \quad (1.12)$$

которое и является дисперсионным уравнением СПВ. Очевидно, что при $g = 0$, т.е. когда рассматривается слабонеоднородное полупространство, дисперсионное уравнение упрощается и принимает вид [1]. Надо отметить, что при выводе последнего уравнения учитывалось, что

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = i\sqrt{1-\eta_0 c_s^2} = i\operatorname{th}\beta_0,\ \operatorname{tg}\alpha_2 = i\sqrt{1-\eta_0} = i\operatorname{th}\beta_2$$

Условие затухания СПВ запишется в виде $0 < \eta_0 < c_s^{-2}$, если $c_s > 1$, $0 < \eta_0 < 1$, если $c_s < 1$.

При $c_s < 1$ условия существования СПВ получаются сравнительно проще и представляются в виде:

при $G_0' > 0$ и $c_0' < 0$ могут существовать СПВ любой длины.

при $G_0' < 0$ и $c_0' < 0$ могут существовать СПВ длиною $k > k_*$.

при $G_0' < 0$ и $c_0' > 0$ могут существовать СПВ длиною $k < k_*$,

где $k_* = -G_0'\left[2G_0(1+g)\right]^{-1}$.

Представляет интерес исследование вопроса при каких условиях U_1 может быть равным нулю, т.е. падающая SH волна не сможет отражаться. При однородных средах последнее имеет место, когда угол падения опеделяется по уравнению

$$\cos^2\alpha_0^* = \left(1-g^2c_s^2\right)\left(1-g^2\right)^{-1}c_s^{-2} \quad (1.13)$$

Оно имеет один вещественный корень в диапазоне $(0;90^0)$ при выполнении одного из условий

$$0 < g < c_s^{-1} < 1 \quad (1.14)$$

$$1 < c_s^{-1} < g < \left(1 + c_s^{-2}\right)^{1/2} \quad (1.15)$$

Однако при рассмотрении слабонеоднородной среды к вышеупомянутым условиям должны присоединить условие, связывающее физико-механические характеристики с параметрами неоднородности среды

$$g^2\left(c_s^2 - 1\right)\left(1-g^2\right)^{-1} = \left(G_0/G_0'\right)\left(c_0'/c_0\right) \quad (1.16)$$

Подчеркнем, что неоднородность влияет на величину угла падения, при которой волна не отражается. Исходя из (1.13) и (1.16), можно установить непосредственную связь между углом падения α_0^*, при которой отражение отсутствует, и неоднородностью среды следующим образом:

$$\cos^2 \alpha_0^{*} = c_s^{-2}\left[1-\left(G_0/G_0'\right)\left(c_0'/c_0\right)\right] \tag{1.17}$$

2. Поскольку с точки зрения физики более целесообразно иметь дело с реальными характеристиками волны, поэтому, разделяя действительные и мнимые части на правых сторонах уравнений (1.7) и (1.8) для амплитуд отраженной и преломленной волн, получим

$$U_{1(2)} = U_0 . r_{1(2)} \exp\left(i\varphi_{1(2)}\right) \tag{2.1}$$

где

$$r_1 = \left(a^2+b^2\right)^{1/2}\left(d^2+b^2\right)^{-1/2}, \ \varphi_1 = \operatorname{arctg}\left[b(a+d)\left(b^2-ad\right)^{-1}\right]$$

$$r_2 = h\left(d^2+b^2\right)^{-1/2}, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}(-b/d) \tag{2.2}$$

$$a = 2k\left(G_0/G_0'\right)\chi_0^2\left(\chi_1 g-\chi_0\right), \ d = 2k\left(G_0/G_0'\right)\chi_0^2\left(\chi_1 g+\chi_0\right)$$

$$b = \chi_0^2-\left(G_0/G_0'\right)\left(c_0'/c_0\right)\left(\chi_0^2+1\right), h = 4k\left(G_0/G_0'\right)\chi_0^2\chi_1 g \tag{2.3}$$

Заметим, что (2.1)-(2.3) получены для углов больших критического (в силу чего χ_1 будет реальной) и для $c_s < 1$ (вследствие чего χ_0 тоже будет реальной).Сколь-нибудь полный анализ процесса отражения и преломления можно выполнить численно.

3.Допустим, неоднородная среда является периодически слабонеоднородной, т.е. плотность и модуль сдвига среды изменяются по следующим законам:

$$\rho = \rho_0\left(1+\varepsilon_1 \sin(\pi/l)y\right), \ G = G_0\left(1+\varepsilon_2 \sin(\pi/l)y\right), \ -1 << \varepsilon_{1,2} << 1 \tag{3.1}$$

где ρ_0, G_0 -соответствующие значения ρ, G на границе $y=0$, а l – период изменения неоднородности по глубине полупространства. Для простоты расчетов предположим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}09$, а $K = 2kl/\pi = 1$. Материалы сред выбраны таким образом, что однородной средой является алюминий, а граничным материалом неоднородной среды – вольфрам (табл.1), т.е. $c_s = 0{,}92$, а $g = 0{,}17$.

Таблица 1

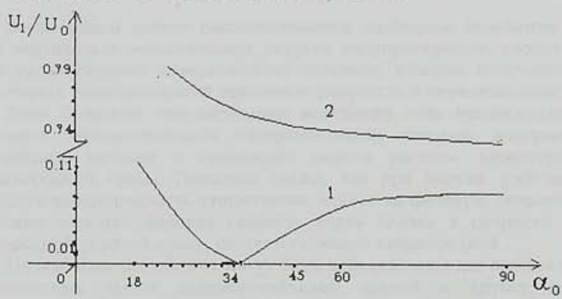
Материалы сред	$G \cdot 10^{10}$	G м/с
Алюминий (1)	2,6	3110
Вольфрам (0)	15,3	2860
Медь (1)	4,5	2250
Латунь (0)	3,9	2140

В табл. 2 приведены данные об изменении величин коэффициентов отражения r_1 и преломления r_2 сдвиговых волн от угла падения. Исходя из этих данных, убедимся, что как для сред рассматриваемой задачи, так и для двух однородных кантактирующих сред с увеличением угла падения коэффициенты отражения убывают (фиг.1, кривая 2), а коэффициенты преломления, наоборот, увеличиваются. Однако, сравнивая величины коэффициентов отражения и преломления рассматриваемой задачи с соответствующими коэффициентами задачи двух однородных сред, заметим, что при фиксированном значении α_0, r_1^n, (неоднородной среды) всегда больше r_1^0 (однородной среды), тогда как r_2^n всегда меньше r_2^0. Объясняется это, вероятно, тем, что неоднородность не позволяет проникнуть во вторую среду (в виде преломленной волны) столько энергии, сколько могла бы проникнуть в случае двух однородных сред. Разностная энергия остается в первой среде (в виде отраженной волны). Фаза отраженной волны φ_1 с возрастанием угла падения убывает, фаза преломленной же волны φ_2 принимает только отрицательные значения и монотонно возрастет.

Таблица 2

α_0	24^0	26^0	28^0	30^0	45^0
r_1^n	0,7938	0,7864	0,7797	0,7737	0,7471
r_1^0	0,7901	0,7830	0,7766	0,7708	0,7457
r_2^n	0,0612	0,0682	0,0756	0,0832	0,1463
r_2^0	0,0617	0,0687	0,0761	0,0836	0,1465
$tg\varphi_1$	0,0325	0,0321	0,0314	0,0307	0,0227
$tg\varphi_1$	-0,1247	-0,1178	-0,1111	-0,1050	-0,0672

Заметим, что для выбранной пары материалов ни одно из условий (1.14), (1.15) не выполняется, т.е. полное проникание волны во вторую (неоднородную) среду невозможно. Однако при другом сочетании материалов медь (однородная среда) и латунь (граничный материал неоднородной среды), исходя из физико-механических характеристик (табл.1), убедимся, что условие (1.15) выполняется.



Фиг.1

Вследствие чего существует угол падения $\alpha_0^* = 34^0 20'$, при котором падающая волна не отражается (фиг.1, кривая 1), а этому значению соответствует скорость $V \approx 1{,}1c_0 = 2354$ м/с. Учитывая (3.1) и (1.16) для рассматриваемой пары материалов при фиксированном $\varepsilon_1 = 0{,}01$, получим $\varepsilon_2 = 0{,}0024$.

Для неоднородностей типа (3.1) влияние неоднородности (при фиксированном $\varepsilon_2 = 0{,}01$) на $\alpha_0^{\bullet}$ определяется следующим образом:

$$\cos\alpha_0^{\bullet} = \sqrt{2(1+100)\varepsilon_1} \big/ (2c_s) \tag{3.2}$$

где $-0{,}01 < \varepsilon_1 < 0{,}01\left(2c_s^{\,2} - 1\right)$ при $c_s > 1$, $-0{,}01 < \varepsilon_1 < 0{,}01\left(2c_s^{\,4} - 1\right)$ при $c_s < 1$. Как видно из (3.2), при увеличении параметра неоднородности угол полного прохождения уменьшается. В конце отметим, что вычисления для обеих пар материалов приведены лишь для углов больших критического, т.е. $\arccos c_s = \alpha_0^{kp} < \alpha_0 < \pi/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В., Мухсихачоян А.Р. Сдвиговая поверхностная волна в слабонеоднородных упругих средах. // Акуст. ж., 1996, т.42, N2, с.179-182.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.- Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. 872 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
8.09.1998