ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №3, 1999 Механика
УДК 539.3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Агаловян Л.А.

Լ.Ա. Աղալովյան

Ասիմպտոտիկ մեթոդի մասին սալերի և թաղանթների տեսությունում

Շարադրված է շերտ-հեծանների, սալերի և թաղանթների եզրային խնդիրների լուծման ասիմպտոտիկ մեթոդը: Բերված է ակնարկ բարակ մարմինների ստատիկ և դինամիկ, դասական և ոչ դասական եզրային խնդիրների լուծումների և կարևոր արդյունքների, որոնք ստացվել են լուծելով առաձգականության տեսության համապատասխան հավասարումները ասիմպտոտիկ մեթոդով:

L.A. Aghalovyan

On Asymptotic Method in the Theory of Plates and Shells

Излагается асимптотический метод решения краевых задач балок-полос, пластин и оболочек. Приведен обзор работ и результатов по статическим и динамическим, классическим и неклассическим краевым задачам тонких тел на основе асимптотического метода решения соответствующих уравнений теории упругости.

Суть метода. Уравнения теории упругости, написанные в безразмерной системе координат для балок, пластин и оболочек, являются сингулярно возмущенными малым параметром ε. В качестве ε обычно выбирают для балок отношение диаметра поперечного сечения к длине балки, а для пластин и оболочек — отношение полутолщины к характерному размеру срединной поверхности.

Существует принципиальная разница между регулярно и сингулярно возмущенными уравнениями. Проиллюстрируем сказанное на двух простейших примерах.

Уравнение
$$u'' + \varepsilon u' = 0 \tag{1}$$
является регулярно возмущенным малым параметром ε. Его решение $u = c_1 + c_2 e^{-\varepsilon x}$ является непрерывной функцией от ε. Решение задачи Коши или краевой задачи для уравнения (1) можно найти простым разложением по степеням малого параметра:
$$u = \varepsilon^s u_s, \quad s = \overline{0, \infty} \tag{2}$$

Здесь и далее обозначение $s=\overline{0,\infty}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование от нуля до ∞. Подставив (2) в (1), получим рекуррентные уравнения

$$u_s'' + u_{s-1}' = 0 \qquad (3)$$

При $s=0$ есть полное соответствие между порядком укороченного (невозмущенного) уравнения $u_0''=0$ и числом начальных и краевых условий. Решение при малом ε близко к решению при $\varepsilon=0$. Задача в дальнейшем заключается в улучшении этого результата с помощью вычисления более высоких приближений.

Для сингулярно возмущенного уравнения (малый параметр является коэффициентом старшей производной)

$$\varepsilon u'' + u' = 0 \qquad (4)$$

решение $u = c_3 + c_4 e^{-x/\varepsilon}$ терпит разрыв при $\varepsilon = 0$.

Возникает вопрос: можно ли решение уравнения (4) определить разложением в степенной ряд по малому параметру ε. Непосредственное применение разложения (2) приводит к рекуррентным уравнениям

$$u_s' + u_{s-1}'' = 0 \qquad (5)$$

то есть к понижению порядка, а следовательно, к невозможности удовлетворения всем начальным и граничным условиям. Но оказалось, что разложением (2) можно найти регулярную часть решения. Возникает вопрос: можно ли представлением типа (2) определить и сингулярную часть $(\exp(-x/\varepsilon))$ решения. Оказалось, что можно, но для этого необходимо сделать в уравнении (4) замену переменной $t = x/\varepsilon$ и решение вновь полученного уравнения отыскать в виде (2) (второе расщепление исходного оператора). Этому расщеплению соответствуют разрывные по ε решения, известные как решения пограничного слоя. Оказалось, что оперируя этими двумя типами решения, можно удовлетворить начальным и граничным условиям.

Таким образом, решение сингулярно возмущенного уравнения невозможно найти одним разложением по малому параметру. Его определение асимптотическим методом включает следующие этапы: а) построение решений, соответствующих первому расщеплению (решений укороченного уравнения и уравнений для последующих приближений типа (5)). В теории балок, пластин и оболочек это решение называют решением внутренней задачи или основным решением; б) построение решений пограничного слоя, соответствующих второму расщеплению исходного возмущенного оператора; в) сопряжение (сращивание, согласование) найденных, качественно различных решений при помощи краевых и начальных условий.

Более подробное представление о сингулярно возмущенных уравнениях и методах их решения можно составить, например, по монографиям [1-6].

Система уравнений теории упругости для тонкостенных тел имеет ту специфику, что параметр является коэффициентом не всего старшего оператора, а только его части. Это приводит к тому, что вырожденная (невозмущенная) система имеет меньшую пространственную размерность, число же пограничных функций становится бесконечным, но счетным [7].

При асимптотическом подходе очень важным также является правильное определение асимптотических порядков искомых величин, ибо не все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения имеют одинаковый вклад в напряженно-деформированное состояние. Установление такой асимптотики является одним из основных этапов асимптотического подхода. Оно имеет более глубокие корни, ибо сформулируя любой физический закон, или принимая ту или иную гипотезу, фактически задается некая асимптотика. Не случайно, что установление этой асимптотики (закона) многие авторы считают искусством [8,9].

Отметим, что последний подход широко практиковался и продолжает практиковаться в гидроаэромеханике, в механике же деформируемого твердого тела его использование связано с применением асимптотического метода.

Для большей наглядности изложение асимптотического метода начнем с плоских задач теории упругости.

§1. Плоская задача для полосы (растяжение-сжатие стержней и изгиб балок)

Требуется определить решение плоской задачи теории упругости в области $\Omega = \{(x,y) : x \in [0,l], |y| \le h, 2h << l\}$, когда на продольных сторонах прямоугольника заданы значения напряжений σ_{xy}, σ_y, а на торцах $x = 0, l$ – значения напряжений, перемещений или смешанные условия.

При переходе к безразмерным координатам $\xi = x/l, \zeta = y/h$ и безразмерным компонентам вектора перемещения $U = u/l, V = v/l$, уравнения плоской задачи для изотропной полосы записываются в виде

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial\zeta} = 0, \qquad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_y}{\partial\zeta} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\xi} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \qquad \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \tag{1.1}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta} + \frac{\partial V}{\partial\xi} = \frac{1}{G}\sigma_{xy}, \qquad \varepsilon = h/l$$

Система (1.1) сингулярно возмущена малым параметром ε (большим параметром ε^{-1}). Попробуем найти решение этой системы по схеме, изложенной выше. Решение складывается из решения внутренней задачи (основное в смысле классической теории балок и пластин решение) и пограничного слоя. Решение внутренней задачи будем искать в виде [10]

$$Q(\xi,\zeta)=\varepsilon^{-q}\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{s}Q^{(s)}(\xi,\zeta) \tag{1.2}$$

где Q – любое из напряжений и безразмерных перемещений, q – целое число, которое характеризует асимптотический порядок данной величины. Оно вообще различно для различных напряжений и перемещений и определяется таким образом, чтобы после подстановки (1.2) в (1.1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε, получить рекуррентную систему относительно $Q^{(s)}$. В нашем случае задача разбивается на симметричную задачу (растяжение-сжатие) с граничными условиями

$$\sigma_{xy}=\pm\varepsilon^{-1}X_1,\ \sigma_y=Y_1 \text{ при } y=\pm h \tag{1.3}$$

и на кососимметричную (изгиб) задачу с граничными условиями

$$\sigma_{xy}=\varepsilon^{-1}X_2,\ \sigma_y=\pm Y_2 \text{ при } y=\pm h \tag{1.4}$$

где

$$X_i=\left(X^{+}\pm X^{-}\right)/2,\ \ Y_i=\left(Y^{+}\mp Y^{-}\right)/2,\quad i=1,2 \tag{1.5}$$

$X^{\pm}$, $Y^{\pm}$ – тангенциальные и нормальные составляющие внешней нагрузки, действующие на продольных кромках полосы $y=\pm h$.

Несложно установить, что

$$q=2 \text{ для } \sigma_x, U;\ q=1 \text{ для } \sigma_{xy},\ q=0 \text{ для } \sigma_y \tag{1.6}$$

для V: $q=1$ в симметричной и $q=3$ в кососимметричной задачах.

Отметим, что асимптотика (1.2), (1.6) единственная, которая приводит к непротиворечивой системе относительно $Q^{(s)}$. Эта асимптотика соответствует граничным условиям (1.3), (1.4). Если изменить граничные условия при $y=\pm h$, то существенным образом меняется и асимптотика (1.6). Поэтому одним из основных моментов асимптотического метода является установление правильной асимптотики, при этом сказанное относится не только к задачам теории упругости, но и к любой физической задаче, рассматриваемой в узкой области. Иногда для этого бывает полезным использовать решения задач, найденных иным методом. Например, асимптотика (1.2), (1.6) вытекает также из точного (в смысле Сен-Венана) решения для консольной балки, изгибаемой равномерно распределенной нормальной нагрузкой интенсивности q [11, с.64]

$$\sigma_x=-\frac{3}{4}\frac{q}{h^3}\left(x^2y-\frac{2}{3}y^3\right)$$

$$\sigma_y=-\frac{3}{4}\frac{q}{h^3}\left(\frac{1}{3}y^3-h^2y+\frac{2}{3}h^3\right) \tag{1.7}$$

$$\sigma_{xy}=-\frac{3}{4}\frac{q}{h^3}\left(h^2-y^2\right)x$$

Точное решение (1.7) получено методом использования полиномов в качестве бигармонической функции. Если в (1.7) перейти к безразмерным переменным $\xi=x/l,\ \zeta=y/h$, оно примет вид

$$\sigma_x = -\frac{3}{4}q\left(\varepsilon^{-2}\xi^2\zeta - \frac{2}{3}\zeta^3\right)$$

$$\sigma_y = -\frac{3}{4}q\left(\frac{1}{3}\zeta^3 - \zeta + \frac{2}{3}\right) \tag{1.8}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{3}{4}q\varepsilon^{-1}\left(1-\zeta^2\right)\xi$$

то есть $\sigma_x \sim 0(\varepsilon^{-2})$, $\sigma_{xy} \sim 0(\varepsilon^{-1})$, $\sigma_y \sim 0(\varepsilon^{0})$, что подтверждает справедливость асимптотики (1.2), (1.6). В связи с этим отметим некорректность утверждения одного из участников затянувшейся дискуссии по теории пластин и оболочек [12-22] о том, что "исходные асимптотические порядки напряжений и перемещений ... обоснования не имеют ..." [21].

В [10,23] доказано, что асимптотическим методом можно получить не только решение (1.7), но и все те решения, которые найдены путем выбора бигармонической функции в виде полиномов. Более того, асимптотическим методом выведены рекуррентные формулы, автоматически обеспечивающие бигармоничность полиномов. Решения широкого спектра таких задач приведены в [23].

Подставив (1.2), (1.6) в (1.1), в симметричной задаче (U, σ_x, σ_y − четные, σ_{xy}, V − нечетные по ζ функции, в задаче изгиба − наоборот) все величины $Q^{(s)}$ выражаются через $u^{(s)}$, которое определяется из уравнения

$$EF\frac{d^2u^{(s)}}{dx^2} = -q_x^{(s)} \tag{1.9}$$

в кососимметричной же задаче (изгиб) все величины выражаются через $v^{(s)}$, которое определяется из уравнения

$$EI\frac{d^4v^{(s)}}{dx^4} = q^{(s)} \tag{1.10}$$

где EF − жесткость при растяжении-сжатии, EI − жесткость при изгибе, I − момент инерции поперечного сечения. При $s=0$ уравнение (1.9) совпадает с классическим уравнением растяжения-сжатия стержней, а уравнение (1.10) − с классическим уравнением изгиба балки. Таким образом, установлен факт, что построение исходного приближения внутренней задачи идентично теории растяжения-сжатия стержней и изгиба балок, основанной на гипотезе плоских сечений. Более того, исходное приближение при асимптотическом подходе дает больше информации, чем классическая теория балок Бернулли-Кулона-Эйлера, ибо позволяет вычислить также напряжения σ_{xy}, σ_y, последним из которых в классической теории вообще пренебрегают.

Согласно (1.9), (1.10) решение внутренней задачи содержит две произвольные постоянные в симметричной и четыре в кососимметричной задачах. Их этих постоянных соответственно одна в симметричной и две в кососимметричной задачах будут характеризовать жесткое смещение, остальные же постоянные должны быть определены из условий при $x=0, l$. Очевидно, что одной постоянной в решении симметричной и двумя в кососимметричной задачах невозможно удовлетворить условиям в каждой точке торцов $x=0, l$, что косвенным образом подтверждает сингулярную возмущенность уравнений исходной задачи. Следовательно, необходимо построить принципиально новое решение тоже. Естественно выяснить возможность существования решения типа пограничного слоя.

Для построения вблизи $x=0$ решения пограничного слоя, в уравнения (1.1) вводится новая замена переменной $t=\xi/\varepsilon$, и решение вновь полученной системы отыскивается в виде функций типа погранслоя [10, 23, 24]

$$R_p=\varepsilon^{\chi_p+s}R_p^{(s)}(\zeta)\exp(-\lambda t),\quad s=\overline{0,N} \tag{1.11}$$

Устанавливается, что $\chi_{\sigma_i}=\chi$, $\chi_{u_i}=\chi+1$, а значение целого числа χ однозначно определяется в ходе сопряжения (сращивания) внутреннего и погранслоя решений. Решение (1.11) должно при $\zeta=\pm1$ удовлетворять однородным граничным условиям

$$\sigma_{xyp}=\sigma_{yp}=0 \tag{1.12}$$

Для коэффициентов $R_p^{(s)}(\zeta)$ представления (1.11) имеем

$$\sigma_{yp}^{(s)}=F_nA_n^{(s)},\ \sigma_{xyp}^{(s)}=\frac{F_n'}{\lambda_n}A_n^{(s)},\ \sigma_{xp}^{(s)}=\frac{1}{\lambda_n^2}F_n''A_n^{(s)}$$

$$u_p^{(s)}=\frac{1}{E}\left[-\frac{F_n''}{\lambda_n^3}+\frac{\nu}{\lambda_n}F_n\right]A_n^{(s)},\ V_p^{(s)}=-\frac{1}{E\lambda_n^2}\left[\frac{F_n'''}{\lambda_n^2}+(2+\nu)F_n'\right]A_n^{(s)} \tag{1.13}$$

где в симметричной задаче

$$F_n(\zeta)=\zeta\sin\lambda_n\zeta-\operatorname{tg}\lambda_n\cos\lambda_n\zeta \tag{1.14}$$

а λ_n - корень уравнения $\sin2\lambda_n+2\lambda_n=0$

в кососимметричной задаче

$$F_n(\zeta)=\sin\lambda_n\zeta-\zeta\operatorname{tg}\lambda_n\cos\lambda_n\zeta$$

$$\sin2\lambda_n-2\lambda_n=0 \tag{1.15}$$

Решение (1.11), (1.13)-(1.15) для произвольного s является точным, то есть удовлетворяет всем уравнениям теории упругости и граничным уловиям (1.12). Фактически это решение является известным однородным решением Шиффа-Папковича-Лурье.

Таким образом, принимая гипотезу плоских сечений, тем самым теряется целый класс точного решения. Укажем также, что это решение невозможно получить ни по теории Рейсснера, ни по теории типа Тимошенко, ни по одной из существующих других прикладных теорий балок, пластин и оболочек. Без этого решения невозможно достаточно точно удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности. Забегая вперед, укажем, что в пространственных краевых задачах для изотропных и ортотропных пластин и оболочек помимо плоского погранслоя существует также антиплоский погранслой (краевое кручение). Теории Рейсснера, Амбарцумяна, типа Тимошенко учитывают этот пограничный слой, однако они не описывают плоский погранслой. Построение обоих пограничных слоев не является прихотью сторонников асимптотического метода, а отражает математическую сущность краевой задачи для тонких тел. Укажем также, что, как правило, погранслои через граничные условия на боковой поверхности влияют также на проникающее (основное) решение, поэтому без их целостного построения вряд ли уместно утверждать об уточнении результатов классической теории. Функции пограничного слоя убывают как $\exp(-\mathrm{Re}\,\lambda_n t)$ и для того, чтобы напряженно-деформированное состояние в прямоугольнике можно было бы расчленить на внутреннее и типа погранслоя, его продольный размер l должен быть таким, чтобы величины порядка $0\left[\exp\left(-\frac{l}{h}\mathrm{Re}\,\lambda_1\right)\right]$ были пренебрежимо малы по сравнению с единицей. Учитывая, что в симметричной задаче $\mathrm{Re}\,\lambda_1 \approx 2{,}11$, а в кососимметричной $\mathrm{Re}\,\lambda_1 \approx 3.75$, это требование будет практически выполнено уже на расстоянии от торца полутора-двух толщин.

Решение погранслоя (1.11), (1.13) имеет весьма важное свойство: напряжения $\sigma_{xp}, \sigma_{xyp}$ в произвольном поперечном сечении $t = t_k$ самоуравновешенны:

$$\int_{-1}^{1}\sigma_{xp}d\zeta = 0,\quad \int_{-1}^{1}\zeta\sigma_{xp}d\zeta = 0,\quad \int_{-1}^{1}\sigma_{xyp}d\zeta = 0 \tag{1.16}$$

что позволяет непосредственно сращивать (сопрягать) внутреннее и погранслоя решения.

Таким образом, асимптотическим решением исходной сингулярно возмущенной краевой задачи является

$$I = Q + R_p^{(1)} + R_p^{(2)} \tag{1.17}$$

где Q – решение внутренней задачи; $R_p^{(1)}, R_p^{(2)}$ – решения погранслоев, соответствующие торцевым сечениям $x = 0, l$. Решение (1.17) содержит достаточное количество произвольных постоянных для удовлетворения любым граничным условиям при $x = 0, l$. Например, в случае задания при $x = 0$ значений напряжений, однозначно устанавливается $\chi = -2$ и используя свойство самоуравновешенности напряжений погранслоя (1.16), определяются все произвольные постоянные в решении внутренней задачи. Их ровно столько, сколько условий (1.16), что указывает на более глубокую логическую согласованность внутреннего и погранслоя решений. В случае первой краевой задачи самоуравновешенная часть торцевой нагрузки не влияет на решение внутренней задачи, пограничный же слой берет на себя самоуравновешенную часть этой нагрузки. Этот чисто математический результат подтверждает справедливость принципа Сен-Венана в плоских задачах. Иллюстрирующие сказанное примеры приведены в [10,23].

Перемещения погранслоя не обладают самоуравновешенностью (1.16) (то есть принцип Сен-Венана для перемещений несправедлив), поэтому сопряжение внутреннего и погранслоя решений осуществляется иным способом. Для сопряжения решений можно использовать вариационные принципы, методы граничной коллокации, наименьших квадратов и др. [23].

В заключении этого раздела отметим, что примененный для плоских задач прием построения решений внутренней задачи, погранслоя, сопряжения этих решений, без особого труда распространяется на анизотропные полосы, пространственные задачи изотропных и анизотропных пластин и оболочек, поэтому и мы так подробно остановились на плоской задаче.

§2. Пространственная краевая задача для пластин и оболочек

Решение уравнений пространственной задачи теории упругости для пластин и оболочек, как и в случае балок-полос, складывается из решений внутренней задачи и пограничных слоев. Асимптотические порядки компонентов тензора напряжений и вектора перемещения во внутренней задаче для изотропных пластин установлены в [25,26]. Эта асимптотика задается формулой (1.2) с той лишь разницей, что $Q^{(s)} = Q^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$, а

$$q = 2 \text{ для } \sigma_{\alpha\alpha},\ \sigma_{\alpha\beta},\ \sigma_{\beta\beta},\ u_\alpha,\ u_\beta;\ q = 1 \text{ для } \sigma_{\alpha\gamma},\ \sigma_{\beta\gamma} \tag{2.1}$$

$q = 1$ для $\sigma_{\gamma\gamma}$; для u_γ: $q = 1$ в симметричной, $q = 3$ в кососимметричной задачах.

Асимптотика (2.1) остается в силе для ортотропных пластинок и пластинок с общей анизотропией (21 постоянная упругости) с подчеркнутой разницей о том, что порядок коэффициентов $Q^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$ разложения (1.2) существенно зависит от соотношения значений постоянных упругости по различным направлениям [23,27].

В симметричной задаче все величины выражаются через две двумерные функции, которые определяются из уравнений обобщенного плоского напряженного состояния, в кососимметричной же задаче все величины выражаются через функцию прогиба, которая определяется из уравнения в частных производных четвертого порядка типа классического уравнения изгиба пластинок. Эти уравнения, написанные для исходного приближения, совпадают с классическими уравнениями растяжения-сжатия и изгиба пластинок. Последующие приближения приводят к повторному решению этих уравнений, но с новыми правыми частями. Как и в случае плоской задачи, решения этих уравнений не содержат достаточного количества произвольных постоянных (функций) для удовлетворения граничным условиям пространственной задачи на боковой поверхности. Преимущество той или другой теории следует оценить именно в этом плане: насколько точно с позиций трехмерной задачи удовлетворены граничные условия на боковой поверхности, разумеется, при одновременном удовлетворении уравнений равновесия и соотношений состояния - обобщенного закона Гука.

В силу сингулярной возмущенности задачи, недостающим решением является решение типа пограничного слоя. Доказано, что в изотропных и ортотропных пластинках и оболочках могут существовать два типа погранслоя: антиплоский (краевое кручение) и плоский [24,25,28,29]. Первый из этих погранслоев отсутствует в плоских задачах. В ортотропных пластинах при удалении от боковой поверхности $\alpha = \alpha_0$ вовнутрь пластины они затухают по экспоненциальному закону, но со существенно различными скоростями [23,24]. В симметричной задаче (растяжение-сжатие) антиплоский погранслой затухает как

$$\exp\left(-\sqrt{\frac{G_{23}}{G_{12}}}\pi\frac{\alpha-\alpha_0}{h}\right) \tag{2.2}$$

а в кососимметричной задаче (изгиб) как

$$\exp\left(-\sqrt{\frac{G_{23}}{G_{12}}}\frac{\pi}{2}\frac{\alpha-\alpha_0}{h}\right) \tag{2.3}$$

При модулях сдвига $G_{23} << G_{12}$ этот погранслой может проникать достаточно глубоко (слабый погранслой), а при $G_{23} \to \infty$ антиплоский погранслой исчезает – факт, который был известен и из других исследований.

Плоский погранслой затухает как

$$\exp\left(-\mathrm{Re}\lambda_1\frac{\alpha-\alpha_0}{h}\right) \tag{2.4}$$

где $\mathrm{Re}\lambda_1$ – действительная часть первого корня с $\mathrm{Re}\lambda_1 > 0$ соответствующего характеристического трансцендентного уравнения. В зависимости от значений постоянных упругости возможны следующие варианты трансцендентных уравнений [23]:

а) $\sin 2\beta\lambda_n \pm 2\beta\lambda_n = 0$ (2.5)

б) $\omega\sin z_n \pm \sin\omega z_n = 0$

$z_n = (\beta_1+\beta_2)\lambda_n,\quad \omega = (\beta_2-\beta_1)/(\beta_1+\beta_2),\ 0<\omega<1$ (2.6)

в) $\omega\sin z_n \pm \mathrm{sh}\omega z_n = 0$

$z_n = 2\beta\lambda_n,\quad \omega = \alpha/\beta,\ 0<\omega<1$ (2.7)

где $\alpha, \beta, \beta_1, \beta_2$ – вещественные параметры, вычисляемые через постоянные упругости. Случай а) практически имеет место для изотропных пластинок, случай б) – при $G_{13} < \sqrt{E_1E_3}$, случай в) – при $G_{13} > \sqrt{E_1E_3}$.

Решение пограничного слоя удовлетворяет некоторым условиям, известным как условия согласованности погранслоя и внутренней задачи. Они впервые были выведены А.Грином [29] и являются обобщением условий (1.16) на случай пространственной задачи. Эти условия используются для сопряжения внутреннего и погранслоя решений.

Для ортотропных пластинок асимптотическое решение пространственной задачи теории упругости имеет вид

$$I = Q^{BH} + \varepsilon^{\chi}Q^{a} + \varepsilon^{\mu}Q^{p} \tag{2.8}$$

где Q^{BH} – решение внутренней задачи, Q^a, Q^p – решения антиплоского и плоского погранслоев, вещественные числа χ и μ характеризуют интенсивности погранслоев, их значения зависят от типа граничных условий на боковой поверхности и определяются в ходе сопряжения внутреннего и погранслоя решений. Появление в решении (2.8) произвольных пока коэффициентов ε^{χ}, ε^{μ} естественно, поскольку погранслой определяется из однородных уравнений при однородных граничных условиях.

Используя (2.8) и условия согласованности внутреннего и погранслоя решений, удается удовлетворить пространственным граничным условиям на боковой поверхности. В результате, решение трехмерной задачи сводится к решению краевых задач меньшей размерности для внутреннего и погранслоя состояний. Ограничившись тем или иным приближением для внутренней задачи и пограничных слоев, с определенной точностью, в смысле решения трехмерной задачи, вычисляется напряженно-деформированное состояние пластинки. Если ограничиться построением исходного приближения внутренней задачи, то приведенные двумерные уравнения и соответствующие им граничные условия совпадают с классическими. Важно отметить, что различным граничным условиям пространственной задачи могут соответствовать одни и те же условия классической теории пластинок. Например, граничным условиям

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} = w = 0 \text{ и } \sigma_{\alpha\alpha} = v = w = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0 \tag{2.9}$$

пространственной задачи в кососимметричной задаче соответствуют классические условия шарнирного опирания

$$M_\alpha = 0,\ W = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0 \tag{2.10}$$

Условиям пространственной задачи

$$u = v = w = 0 \text{ и } u = \sigma_{\alpha\beta} = w = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0 \tag{2.11}$$

в задаче изгиба соответствуют условия жесткой заделки классической теории

$$W = 0,\ \frac{\partial W}{\partial s_\alpha} = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0 \tag{2.12}$$

В симметричной же задаче (растяжение-сжатие) первой группе условий (2.9) соответствуют условия свободного края классической теории растяжения-сжатия пластинки

$$T_\alpha = 0,\ S_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0 \tag{2.13}$$

а второй группе условий (2.9) - условия свободного в продольном направлении края:

$$T_\alpha = 0,\ V = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0 \tag{2.14}$$

Следовательно, перед тем как рассуждать о погрешности классической теории, необходимо выяснить соответствующую пространственную краевую задачу, которой она соответствует.

При рассмотрении последующих приближений в результате сопряжения решений внутренней задачи и пограничного слоя выясняется, что погранслой через граничные условия влияет на внутреннее напряженно-деформированное состояние. Например, в случае свободного края это сопряжение приводит к следующим новым граничным условиям для ортотропных пластин [23, 30]:

$$T_\alpha = 0,\ S_{\alpha\beta} = 0$$

$$M_\alpha - \sqrt{\frac{G_{12}}{G_{23}}} Ah \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta} = 0 \tag{2.15}$$

$$N_\alpha + \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta} - \underline{\sqrt{\frac{G_{12}}{G_{23}}}\, Ah \frac{\partial\left(k_{\beta_0} H_{\alpha\beta}\right)}{\partial s_\beta}} = 0$$

Первой группе условий (2.9) (шарнирное закрепление первого рода) соответствуют приведенные условия:

$$\begin{aligned}
&T_\alpha + \underline{h\frac{E_1E_2}{E_3^2}\frac{\nu_{32}^2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}k_{\beta_0}D_2T_\beta} = 0\\
&S_{\alpha\beta} - \underline{h\frac{E_1E_2}{E_3^2}\frac{\nu_{32}^2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}D_2\frac{\partial T_\beta}{\partial s_\beta}} = 0\\
&M_\alpha - \underline{\sqrt{\frac{G_{12}}{G_{23}}}\,Ah\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta} + hk_{\beta_0}\frac{E_1E_2}{E_3^2}\frac{\nu_{32}^2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}D_1M_\beta} = 0\\
&W = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Второй же группе условий (2.9) (шарнирное закрепление второго рода) соответствуют:

$$\begin{aligned}
&T_\alpha + \underline{h\frac{E_1E_2}{E_3^2}\frac{\nu_{32}^2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}k_{\beta_0}D_2T_\beta} = 0\\
&V = 0 \qquad\qquad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0\\
&M_\alpha + \underline{hk_{\beta_0}\frac{E_1E_2}{E_3^2}\frac{\nu_{32}^2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}D_1M_\beta} = 0\\
&W = 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

где G_{ik}, E_i, ν_{ik} – соответственно, модули сдвига, Юнга, коэффициент Пуассона, k_{β_0} – геодезическая кривизна, D_i – некоторая постоянная упругости материала, ∂s_β - элементарная дуга линии $\alpha = \alpha_0$, $A = 1.26$ – постоянная Гольденвейзера-Колос для изотропной пластинки, подчеркнутые члены – поправки к классическим граничным условиям. В (2.15) подчеркнутые члены отражают влияние антиплоского погранслоя, в (2.16) – влияние, как антиплоского, так и плоского (слагаемые, содержащие E_1E_2/E_3^2) погранслоев, в (2.17) - влияние плоского погранслоя.

Как следует из (2.15), в случае свободного края ($\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\gamma} = 0$ при $\alpha = \alpha_0$) главенствующую роль играет антиплоский погранслой, плоским же погранслоем можно пренебречь. В случае шарнирного закрепления первого рода ($\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} = w = 0$ при $\alpha = \alpha_0$) из (2.16) следует, что важную роль играют оба погранслоя, в случае же шарнира второго рода ($\sigma_{\alpha\alpha} = v = w = 0$ при $\alpha = \alpha_0$) главную роль играет плоский погранслой, антиплоским же погранслоем можно пренебречь. Из сказанного можно сделать вывод, что чем жестче закреплена боковая поверхность, тем ярче проявляется воздействие плоского погранслоя, в противном случае проявляет себя антиплоский погранслой, что физически вполне очевидно. Отметим также, что если классическая теория пластин не ставит разницы между двумя вариантами условий (2.9), то условия (2.16), (2.17) подчеркивают их отличие. Как было отмечено выше, теории Рейсснера, типа Тимошенко учитывают лишь антиплоский погранслой, следовательно, ими можно воспользоваться в тех случаях, когда закрепление свободно в тангенциальном направлении, например, в случае свободного края. Это необходимо особо подчеркнуть в связи с дискуссией по теории пластин [12-22].

Естественно выяснить соотношения асимптотической теории с другими прикладными теориями. Установлено, что если во внутренней задаче асимптотической теории ограничиться первыми тремя приближениями, то полученное разрешающее уравнение для прогиба практически совпадает с уравнением изгиба итерационной теории С.А.Амбарцумяна [31]. Приведем эти уравнения для трансверсально-изотропных пластин. По асимптотической теории [23,31]

$$D\Delta\Delta W = Z - \left(2\frac{G}{G'} - 0{,}75\frac{E}{E'}\nu'\right)\frac{(2h)^2\Delta Z}{10(1-\nu)} \tag{2.18}$$

По итерационной теории [32]

$$D\Delta\Delta W = Z - \left(2\frac{G}{G'} - \frac{E}{E'}\nu'\right)\frac{(2h)^2\Delta Z}{10(1-\nu)} \tag{2.19}$$

где штрихами отмечены упругие характеристики в плоскости, перпендикулярной плоскости изотропии, Z − нормальная составляющая внешней нагрузки, D − жесткость при изгибе. Уравнения (2.18) и (2.19) отличаются лишь коэффициентом при E/E'. Это различие вызвано тем, что в (2.19) не учтено поперечное обжатие. Как следует из (2.18), (2.19), поправка к классической теории зависит от отношений $G/G', E/E'$ и если $G/G' >> E/E'$, обжатием можно пренебречь. Поперечное обжатие учтено в "Новой итерационной теории" С.А. Амбарцумяна [33], тогда уравнения асимптотической теории внутренней задачи, соответствующие первым трем приближениям, совпадут с основными уравнениями "Новой итерационной теории". Отметим, что итерационные теории не учитывают пограничные слои. "Общая теория" же С.А. Амбарцумяна учитывает антиплоский погранслой. В монографии [23] рассмотрена задача изгиба полубесконечной трансверсально-изотропной полосы $\Omega = \{(x,y,z): x \in [0,\infty), |y| \le l, |z| \le h\}$ под воздействием изгибающего момента, приложенного на боковую поверхность $x = 0$ и шарнирно закрепленной по боковым поверхностям $y = \pm l$.

Задача решена в рамках уравнений асимптотической теории при новых граничных условиях (2.15) (естественно, с неоднородными правыми частями, то есть с учетом приложенного торцевого изгибающего момента) и аналогичных (2.16) граничных условиях на боковых поверхностях $y = \pm l$. Проведено сравнение найденного решения с решением той же задачи по "Общей теории" С.А. Амбарцумяна, то есть на основе уравнений [32], стр.140

$$\Delta\Delta W = 0$$

$$\Delta\Phi - \delta^2\Phi = 0,\ \ \delta^2 = \frac{5}{2h^2}\frac{G'}{G} \tag{2.20}$$

при граничных условиях типа Пуассона.

Сравнение решений по обеим теориям показало их практическое совпадение. Например, по теории С.А. Амбарцумяна сдвиговой краевой эффект затухает, как

$$\exp\left[-\frac{\pi}{l}\sqrt{1+\frac{10G'}{\pi^2 G}\frac{l^2}{(2h)^2}}x\right] \tag{2.21}$$

а по асимптотической теории, как

$$\exp\left[-\sqrt{\frac{G'}{G}}\pi\frac{x}{2h}\right] \tag{2.22}$$

Как правило, $\frac{10G'}{\pi^2 G}\frac{l^2}{(2h)^2} >> 1$, пренебрегая в (2.21) единицей под радикалом и принимая $\pi^2 \approx 10$, приведенные выше скорости затухания совпадут. Совпадают также решение внутренней задачи и решение по теории С.А. Амбарцумяна. Здесь знаменательным является то, что эти решения были получены при помощи различных уравнений с различными граничными условиями. Отсюда вытекает, что полезно сравнивать не уравнения теорий, а окончательные результаты. Если учет сдвига в теории С.А. Амбарцумяна приводит к появлению второго уравнения (2.20), то в асимптотической теории он приводит к новым граничным условиям (2.15).

Так обстоит и с теорией Рейсспера. Она учитывает сдвиговой краевой эффект и его влияние на проникающее решение. Однако эти теории не учитывают плоский погранслой и его влияние на внутреннее напряженное состояние. При асимптотическом подходе процесс получения последующих результатов детерминирован, при остальных же подходах он отсутствует и замыкается в рамки возможностей принятых гипотез.

Асимптотический метод позволил положительно решить вопрос определения напряженно-деформированных состояний пластинок, материал которых обладает анизотропией общего вида (21 упругая постоянная). Решение проблемы сведено к последовательному решению классических уравнений растяжения-сжатия и изгиба пластинок, имеющих плоскость упругой симметрии. Пограничный слой таких пластинок, в отличие от изотропных и ортотропных, не распадается на плоский и антиплоский погранслои и определяется из краевой задачи для обыкновенного дифференциального оператора шестого порядка [23].

Изложенная для пластинок процедура определения внутреннего и погранслоя напряженных состояний распространена на изотропные и анизотропные оболочки [23,34].

§3. Неклассические краевые задачи балок, пластин и оболочек

Асимптотический метод проявил преимущества в особенности при решении принципиально новых классов задач для тонкостенных тел, когда гипотезы классической теории неприемлемы, а формулировка новых гипотез затруднена. К такого рода задачам относятся неклассические краевые задачи балок-полос, пластин и оболочек. Под этим подразумеваются задачи, когда на лицевых поверхностях тонкостенных тел заданы не компоненты тензора напряжений, как в классических задачах, а иные условия – вектор перемещения, смешанные условия и др., хотя такие краевые задачи с позиций теории упругости также являются классическими. Эти задачи являются основными в фундаментостроении, расчетах аэродромных и других покрытий, прокладок, в сейсмологии. Для их решения использовались, в основном, методы математической теории упругости – метод Фурье, интегральных преобразований, теория потенциала, и то в большинстве своем для бесконечных и полубесконечных областей [35,36].

В первой же работе по этой проблеме с применением асимптотического метода, посвященного определению напряженно-деформированного состояния полосы-балки $\Omega = \{(x, y) : x \in [0, l], |y| \le h, h << l\}$, когда на одной из ее лицевых поверхностей задано значение вектора перемещения $(u(-h) = u^-(x),\ v(-h) = v^-(x))$, а на другой – значения вектора перемещения; компоненты тензора напряжений или смешанные условия, была установлена принципиально новая асимптотика для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения. Решение внутренней задачи имеет вид [37]

$$Q = \varepsilon^{q+s} Q^{(s)},\ s = \overline{0, N} \tag{3.1}$$

где $q = -1$ для $\sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_y$; $q = 0$ для u, v (3.2)

Асимптотика (3.1), (3.2) резко отличается от асимптотики в случае первой краевой задачи, которая приведена в §1. В отличие от классического случая, здесь все напряжения равноправны, гипотеза же плоских сечений здесь не применима. Другой отличительной чертой является то, что решение внутренней задачи полностью определяется из граничных условий при $y = \pm h$, условия же при $x = 0,\ l$ не влияют на это решение, ими обусловлен погранслой. Для широкого класса граничных условий получено точное решение внутренней задачи [23,37] . Например, если полоса в своей плоскости обладает анизотропией общего вида, нижняя грань жестко закреплена $u^- = v^- = 0$, а на верхнюю грань $y = h$ действуют нагрузки с постоянной интенсивностью: $\sigma_{xy}(h) = \tau^+$, $\sigma_y(h) = \sigma_2^+$, $\tau^+, \sigma_2^+ = \mathrm{const}$, решение имеет вид

$$\begin{gathered}
\sigma_x = -(a_{12}\sigma_2^+ + a_{16}\tau^+)/a_{11},\ \sigma_{xy} = \tau^+,\ \sigma_y = \sigma_2^+ \\
u = (A_{66}\tau^+ + A_{16}\sigma_2^+)(y+h),\ v = (A_{11}\sigma_2^+ + A_{16}\tau^+)(y+h) \\
A_{11} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/a_{11}^{-1},\quad A_{16} = (a_{11}a_{26} - a_{12}a_{16})/a_{11}^{-1}, \\
A_{66} = (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)/a_{11}^{-1}
\end{gathered} \tag{3.3}$$

где a_{ik} – упругие постоянные, для ортотропной полосы $a_{16} = a_{26} = A_{16} = 0$.

В работе [38] было доказано, что асимптотика (3.1), (3.2) остается верной и для двухслойных и многослойных полос-балок, моделирующих, в частности, совместную работу фундамента и основания сооружения по модели сжимаемого слоя. На основе полученных точных решений выявлены рамки применимости прикладных моделей оснований -

фундаментов, в частности, модели Винклера-Фусса. Доказано, что для основания с общей анизотропией эта модель непригодна, она применима для изотропных и ортотропных оснований. В последнем случае коэффициентом постели служит [38,23]

$$K = \frac{1}{A_{11}^{(2)} h_2} = \frac{E_2^{(2)}}{\left(1 - \nu_{12}^{(2)} \nu_{21}^{(2)}\right) h_2} \tag{3.4}$$

Для изотропного слоя $K = E_{(2)} / \left(1 - \nu_{12}^2\right) h_2$ и совпадает с ранее известным и выведенным иным путем коэффициентом [39], что еще раз подтверждает обоснованность асимптотического метода.

Асимптотическим методом получено решение для слоя с переменным по толщине упругим модулем, что позволило вывести формулу вычисления коэффициента постели для моделей Вигхардта, Клейна и др. Например, если основанием служит слой мощности (толщины) h_2, а модуль Юнга меняется по толщине слоя линейно, принимая значения $[E_2, E_3]$, коэффициентом постели является [40]

$$K = K_0 \frac{c - 1}{\ln c}, \quad c = E_3 / E_2 \tag{3.5}$$

где $K_0 = E_2 / \left(1 - \nu_2^2\right) h_2$ – коэффициент постели основания с постоянным модулем упругости E_2 и мощностью h_2.

Асимптотическим методом решены неклассические краевые задачи для полос при сосредоточенных и кусочно-непрерывных нагрузках, для полос переменной ширины, однослойных и многослойных полос с реологическими свойствами [41,42,43].

Следует особо подчеркнуть то важное обстоятельство, что асимптотика напряжений и перемещений чутко реагирует на замену граничных условий при $y = \pm h$. Например, если на лицевой поверхности $y = +h$ заданы значения напряжений, а на поверхности $y = -h$ – нормальная компонента вектора перемещения и касательное напряжение (то есть если в классических условиях заменить условие относительно $\sigma_y(-h)$ условием для $\mathrm{v}(-h)$), то имеем совершенно иную асимптотику [44,45]:

$$q = -1 \text{ для } \sigma_x, \sigma_y, u, \mathrm{v}; \; q = 0 \text{ для } \sigma_{xy} \tag{3.6}$$

Поэтому для тонкостенных тел весьма важным становится правильный выбор исходной физической модели.

Примененный для решения плоских смешанных краевых задач асимптотический метод нами использован для решения неклассических краевых задач анизотропных пластин. При этом анизотропия может быть общей (21 упругая постоянная), помимо поверхностных могут присутствовать объемные силы, а также температурные поля. Когда на одной из лицевых поверхностей пластины задан вектор перемещения, на противоположной – условия первой, второй или смешанных краевых задач теории упругости, найдена принципиально отличающаяся от классической асимптотика [46]

$$q = -1 \text{ для } \sigma_{ik}; \; q = 0 \text{ для } u_\alpha, u_\beta, u_\gamma \tag{3.7}$$

позволившая определить в самом общем виде интеграл трехмерной задачи. Эти результаты распространены на слоистые анизотропные термоупругие пластины [47,48]. На основе полученных результатов, в частности, установлена формула коэффициента постели n-слойного ортотропного основания:

$$K_n = 1 / \sum_{i=1}^{n} h_i A_{33}^{(i)}, \quad A_{33}^{(i)} = \frac{1 - \nu_{\beta\gamma}^{(i)}\nu_{\gamma\beta}^{(i)} - \nu_{\alpha\gamma}^{(i)}\nu_{\gamma\alpha}^{(i)} - \nu_{\alpha\beta}^{(i)}\nu_{\beta\alpha}^{(i)} - 2\nu_{\alpha\beta}^{(i)}\nu_{\beta\gamma}^{(i)}\nu_{\alpha\gamma}^{(i)}}{\left(1 - \nu_{\alpha\beta}^{(i)}\nu_{\beta\alpha}^{(i)}\right)E_{\gamma}^{(i)}} \tag{3.8}$$

Асимптотический метод оказался эффективным также для решения краевых задач пластин переменной толщины [49], слоистых пластин с чередующимися упругими и реологическими слоями [50].
Как и в случае балок-полос, асимптотика компонентов тензора напряжений и вектора перемещения пластин чутко реагирует на вид граничных условий на лицевых поверхностях [51]. Например, если на лицевой поверхности $z = h$ пластинки заданы значения напряжений σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{zz}, а на $z = -h$ значения σ_{xz}, σ_{yz}, w, асимптотика такова [51]

$$q = -1 \quad \text{для } \sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_y, \sigma_z, u, \text{ v}, w$$
$$q = 0 \quad \text{для } \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \tag{3.9}$$

которая принципиально отличается от асимптотики классической теории. Существенно отличаются и соответствующие двумерные уравнения. При асимптотике (3.1), (3.9) все искомые величины выражаются через тангенциальные перемещения, относительно которых вытекают двумерные дифференциальные уравнения. Относительно же w, в противовес классической теории, где в задаче изгиба оно играет главенствующую роль, не получается никакого дифференциального уравнения.

Асимптотическим методом получены также решения неклассических задач для однослойных и двухслойных анизотропных оболочек. Построен общий интеграл внутренней задачи, который проиллюстрирован решением ряда прикладных задач. В частности, получено решение для ортотропной цилиндрической оболочки, внешняя поверхность которой жестко закреплена, а внутри действует постоянное давление [23,52].

Из работ этого направления укажем также работу А.Л. Гольденвейзера [53].

О выполненных работах с применением асимптотического метода можно составить дополнительное представление по обзору [54].

§4. Задачи на собственные и вынужденные колебания

Асимптотический метод оказался эффективным не только для решения статических, но и для решения динамических задач. Он оказался эффективным, в частности, в задачах определения частот и форм собственных колебаний ортотропных и анизотропных полос-балок и пластин [55-57], имеющих важное значение в сейсмостойком строительстве и сейсмологии. В работах [55,56] на основе динамических уравнений теории упругости определены частоты и формы собственных колебаний ортотропной полосы-балки $\Omega = \{(x, y): x \in [0, l], |y| \le l, h << l\}$, когда одна из лицевых поверхностей жестко закреплена, а другая свободна, жестко закреплена или стеснена в тангенциальном направлении. Например, когда обе продольные стороны ортотропной полосы жестко закреплены $\left(u(\pm h)=\mathrm{v}(\pm h)=0\right)$, доказано, что в полосе возникают два типа собственных колебаний : сдвиговые с частотами

$$\omega_n^{\text{сд}}=\frac{\pi n}{2h}\sqrt{\frac{G_{12}}{\rho}}=\frac{\pi n}{2h}\mathrm{v}_s,\quad n\in N \tag{4.1}$$

и продольные с частотами

$$\omega_n^{\text{пр}}=\frac{\pi n}{2h}\sqrt{\frac{E_2}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})}}=\frac{\pi n}{2h}\mathrm{v}_p,\quad n\in N \tag{4.2}$$

где v_s, v_p –известные в сейсмологии скорости распространения сдвиговых и продольных волн.

Если же продольная сторона $y=h$ ортотропной полосы свободна $\left(\sigma_{xy}(h)=\sigma_y(h)=0\right)$, а сторона $y=-h$ жестко закреплена, частотами собственных колебаний являются

$$\omega_n^{\text{сд}}=\frac{\pi}{4h}(2n+1)\mathrm{v}_s,\quad \omega_n^{\text{пр}}=\frac{\pi}{4h}(2n+1)\mathrm{v}_p,\quad n\in N \tag{4.3}$$

Определены собственные функции (формы собственных колебаний) и доказана их ортогональность. Эти результаты обобщены на слоистые полосы-балки [58-60]. Для двухслойной полосы доказано, что хотя в ней и возникают сдвиговые и продольные собственные колебания, однако нет явной связи типа (4.1)-(4.3) между частотами собственных колебаний и скоростями сейсмических волн. Например, когда продольные стороны двухслойной полосы $\Omega=\{(x,y):x\in[0,l],\,-h_2\le y\le h_1\}$ жестко закреплены, частоты собственных колебаний определяются из уравнения

$$a\sin(b\omega_*)=c\sin(d\omega_*) \tag{4.4}$$

где $\omega_*^2=h^2\omega^2$, $h=\max(h_1,h_2)$. Для сдвиговых собственных колебаний

$$a=1+\sqrt{\frac{\rho^{II}G^{II}}{\rho^{I}G^{I}}},\quad b=\sqrt{\frac{\rho^{I}}{G^{I}}}\zeta_1+\sqrt{\frac{\rho^{II}}{G^{II}}}\zeta_2$$

$$c=1-\sqrt{\frac{\rho^{II}G^{II}}{\rho^{I}G^{I}}},\quad d=\sqrt{\frac{\rho^{I}}{G^{I}}}\zeta_1-\sqrt{\frac{\rho^{II}}{G^{II}}}\zeta_2 \tag{4.5}$$

$\zeta_1=h_1/h,\ \zeta_2=h_2/h,\ \rho^{I},\ \rho^{II}$ – плотности слоев.

Для продольных собственных колебаний

$$a=1+\sqrt{\frac{\rho^{II}D_2^{II}}{\rho^{I}D_2^{I}}},\quad b=\sqrt{\frac{\rho^{I}}{D_2^{I}}}\zeta_1+\sqrt{\frac{\rho^{II}}{D_2^{II}}}\zeta_2$$

$$c=1-\sqrt{\frac{\rho^{II}D_2^{II}}{\rho^{I}D_2^{I}}},\quad d=\sqrt{\frac{\rho^{I}}{D_2^{I}}}\zeta_1-\sqrt{\frac{\rho^{II}}{D_2^{II}}}\zeta_2 \tag{4.6}$$

$$D_2^{i}=\frac{E_2^{i}}{1-\nu_{12}^{i}\nu_{21}^{i}},\quad i=I,II$$

В случае ортотропных пластинок, на основе асимптотического решения уравнений пространственной задачи установлено, что в пластине с жестко закрепленной лицевой поверхностью $z=-h$ и свободной поверхностью $z=h$ могут возникнуть два типа сдвиговых собственных колебаний и продольное колебание [57].

Отметим, что изучению собственных колебаний оболочек на основе уравнений классической теории и широким использованием асимптотических методов посвящена монография [61].

Решению задач теории теплопроводности и термоупругости асимптотическим методом посвящены [62,63].

Построению асимптотической теории магнитоупругости пластин и оболочек посвящены работы [64,65].

В заключение отметим, что автор остановился на тех вопросах, которые находятся в кругу своих научных интересов. Несомненно, существуют и другие работы, в которых асимптотическим методом получены интересные результаты. Нет сомнений в том, что на его основе нас ждут новые результаты в различных областях механики сплошной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1.Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1968. 464 с.

2.Найфе А.Х. Методы возмущений. - М.: Мир, 1976. 455 с.

3.Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. 272 с.

4.Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981. 398 с.

5.Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. - М.: Наука, 1989. 336 с.

6.Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1983. 352 с.

7.Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек //Тр. II Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике, вып.3. М.: Наука, 1966. С.116-136.

8.Бабич В.М., Булдырев В.С. Искусство асимптотики //Вестник Ленинград. ун-та. 1977, №13, вып.3, с.5-12.

9.Баранцев Р.Г. Об асимптотологии // Вестник Ленингр. ун-та. 1976, №1, вып.1, с.69-71.

10.Агаловян Л.А. О характере взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы //Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1977, т.30, №5, с.48-62.

11.Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости.- М.: Наука, 1979. 560с.

12.Васильев В.В. О теории тонких пластин //Изв.АН СССР. МТТ, 1992, №3, с.26-47.

13.Жилин П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв.АН СССР. МТТ, 1992, №3, с.48-64.

14.Алфутов Н.А. О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин //Изв.АН СССР. МТТ, 1992, №3, с.65-72.

15.Гольденвейзер А.Л. Алгоритмы асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана //ПММ, 1994, т.58, вып.6, с.96-108.

16.Волох К.Ю. О классической теории пластин //ПММ, 1994, т.58, вып.6, с.156-165.

17.Даревский В.М. О статических граничных условиях в классической теории оболочек и пластин //Изв.РАН. МТТ, 1995, №4, с.130-133.
18.Жилин П.А. О классической теории пластин и преобразования Кельвина-Тэта //Изв.РАН МТТ, 1995, №4, с.134-140.
19.Васильев В.В. К дискуссии по классической теории пластин //Изв. РАН. МТТ, 1995, №4, с.140-150.
20.Гольденвейзер А.Л. О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв.РАН. МТТ, 1997, №3, с.134-149.
21.Васильев В.В. Об асимптотическом методе обоснования теории пластин //Изв. РАН. МТТ, 1997, №3, с.150-155.
22.Гольденвейзер А.Л. Замечания о статье В.В. Васильева "Об асимптотическом методе обоснования теории пластин" //Изв. РАН. МТТ, 1997, №4, с.150-158.
23.Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. - М.: Наука, 1997. 414 с.
24.Агаловян л.А. О погранслое пластинок //Докл.АН Арм.ССР, 1972, т.45, №3, с.149-155.
25.Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ, 1962, т.26, вып.4, с.668-686.
26.Friedrichs K.O. and Dressler R.F. A Boundary-Layer Theory for Elastic Plates // Comm.Pure and Appl.Math. 1961, vol. 14, №1.
27.Агаловян Л.А. К теории изгиба ортотропных пластин //Изв. АН СССР. МТТ, 1966, №6, с.114-121.
28.Гольденвейзер А.Л. Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки //ПММ, 1969, т.33, вып.6, с.996-1028.
29.Green A.E. Boundary Layer Equations in the Linear Theory of Thin Elastic Shells // Proc.Roy. Soc., Ser.A., 1962, vol.269, №1339.
30.Агаловян Л.А. К вопросу приведения граничных условий трехмерной задачи к двумерным в теории анизотропных пластинок //Уч.записки Ереванск.ун-та. Ест.науки, 1978, №2(138), с.20-27.
31.Агаловян Л.А. Об уравнениях изгиба анизотропных пластин //Тр.VII Всесоюзн.конференции по теории оболочек и пластинок. - М.: Наука, 1970. С.17-21.
32.Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.-М.: Наука, 1967. 266с.
33.Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974. 446 с.
34.Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, 1976. 510 с.
35.Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. - М.: Наука, 1963. 367 с.
36.Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. - М.: Наука, 1974. 455 с.
37.Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Межвуз.сб.: Механика. Изд. Ереванск. ун-та. 1982, вып.2, с.7-12.
38.Агаловян Л.А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера // В сб.: XIII Всесоюзн.конф. по теории пластин и оболочек. Часть I. Таллин, 1983, с.13-18.
39.Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. - М.: Стройиздат, 1984. 679 с.

40.Агаловян Л.А., Адамян С.Х. О коэффициенте постели для оснований с переменными упругими характеристиками // Докл.АН Арм.ССР, 1987, т.84, №3, с.115-118.
41.Агаловян Л.А, Асратян М.Г., Геворкян Р.С. К асимптотическому решению задач о действии сосредоточенной силы и кусочно-непрерывной нагрузки на двухслойную полосу // ПММ, 1990, т.54, вып.5, с.831-836.
42.Агаловян Л.А., Хачатрян Г.Г. Об асимптотическом методе решения второй и смешанной краевых задач теории упругости для анизотропной полосы переменной ширины //В сб.: Механика деформ.тверд.тела., Изд.АН Арм.ССР, 1993, с.33-41.
43.Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Асимптотическое решение смешанных краевых задач двухслойной полосы, состоящей из упругого и реологического слоев //Изв.РАН. МТТ, 1992, №5, с.120-128.
44.Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. О смешанной краевой задаче для анизотропной термоупругой полосы // Докл. АН Арм.ССР, 1991, т.92, №2, с.76-81.
45.Агаловян Л.А О влиянии граничных условий на характер напряженно-деформированного состояния тонких тел //Изв. НАН и ГИУ РА. Техн. науки, 1995, т.48, №3, с.136-140.
46.Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией // В сб.: Механика конструкций из композиционных материалов. Новосибирск. Наука, 1984, с.105-110.
47.Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок //ПММ, 1986, т.50, вып.2, с.271-278.
48.Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. О неклассических краевых задачах трехслойных термоупругих пластин и некоторых приложениях // В сб.: Тр. XIV Всесоюзн.конф.по теории пластин и оболочек. Тбилиси. Изд. Тбилисского ун-та. Том I. 1987, с.28-34.
49.Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Хачатрян Г.Г. Смешанные краевые задачи для анизотропных пластин переменной толщины. - ПММ, 1996, т.60, вып.2, с.290-298.
50.Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных краевых задач слоистых пластин, состоящих из чередующихся упругих и реологических слоев // Изв. НАН Армении, Механика, 1991, т.44, №2, с.67-78.
51.Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки // Изв.НАН РА. Механика, 1993, т.46, №3-4, с.3-11.
52.Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении неклассических краевых задач для двухслойных анизотропных термоупругих оболочек // Изв.АН Арм.ССР. Механика, 1989, т.42, №3, с.28-36.
53.Гольденвейзер А.Л. Общая теория тонких упругих тел (оболочки, покрытия, прокладки) // Изв. РАН, МТТ, 1992, №3, с.5-17.
54.Агаловян Л.А. О некоторых результатах по асимптотической теории балок, пластин и оболочек // В сб.: Проблемы механики деформируемого твердого тела. - Ереван: Изд. НАН Армении, 1997, с.31-50.
55.Агаловян Л.А. О частотах собственных колебаний анизотропной полосы // В сб.: Юбил. научн.конф. к 60-летию ГПИ. Гюмри. 1994. С.23-26.

56.Агаловян М.Л. Об одной задаче на собственные значения, возникающей в сейсмологии //Докл.НАН Армении, 1996, т.96, №2-4, с.23-28.
57.Агаловян М.Л. К определению частот собственных колебаний и собственных функций в пространственной смешанной краевой задаче для пластин // В сб.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. - Ереван: Изд. ЕГУ, 1997, с.128-131.
58.Агаловян Л.А., Саркисян Л.С. О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы // В сб.: Тр. XVIII Междунар.конф. по теории оболочек и пластин. - Саратов: 1997. Т.1. С.30-38.
59.Саркисян Л.С. О частотах собственных колебаний двухслойной ортотропной полосы // Докл. НАН Армении, 1997, №3, с.19-25.
60.Саркисян Л.С. Об ортогональности форм собственных колебаний в смешанной краевой задаче для двухслойной полосы // В сб.: Современные проблемы оптимального управления и устойчивости систем. - Ереван: Изд. ЕГУ, 1997, с.163-167.
61.Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. - М.: Наука, 1979. 384 с.
62.Зино И.Е., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. - Л.: Изд. ЛГУ, 1978. 224 с.
63.Рогачева Н.Н. Уточненная теория термоупругих оболочек // Тр. X Всесоюзн.конф. по теории оболочек и пластин. - Тбилиси. Изд. Мецниереба, 1975, т.1, с.251-259.
64.Саркисян С.О. Построение асимптотической двумерной теории магнитоупругости проводящих тонких оболочек, находящихся в неоднородном и нестационарном магнитном поле //Изв.АН Арм.ССР. Механика, 1989, т.42, №5, с.25-34.
65.Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. - Ереван: Изд. АН Армении, 1992. 235 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
22.03.1999