ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №3, 1999 Механика
УДК 539.1

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК КАСАНИЯ ФРОНТОВ ВОЛН

Багдоев А.Г.

Ա.Գ. Բագդոև

Ալիքների ճակատների հպման կետի շրջակայքում գծային և ոչ գծային խնդրի լուծումը

Կամայական միջավայրի համար, որը նկարագրվում է հիպերբոլիկ քվազիգծային հավասարումների համակարգով, որոշված են ճառագայթային լուծումները, գծային լուծումները դիֆրակցիոն խնդրի համար և ոչ գծային լուծումը:

A.G. Bagdoev

Solution of linear and nonlinear problems in vicinity of tangency point of waves fronts

Рассматриваются линейное и нелинейное решения системы квазилинейных гиперболических уравнений в окрестности точек касания произвольной волны с точечной или дифракционной волной.

Подобные решения возникают при прохождении акустических или упругих волн около экрана, отражении волн от тела, имеющего угловую точку. Найдено одномерное или лучевое решение, описывающее решение вдали от точки касания волн, линейное решение в окрестности точки касания и нелинейное решение, сращиваемое с линейным и нелинейным одномерными решениями.

§1. Интенсивность волны вдоль луча для произвольной системы линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами

Пусть имеется произвольная линейная система уравнений с переменными коэффициентами в $n+1$-мерном пространстве времени

$$a_{ij}^{(k)} u_{j,k} + T_{ij} u_j = 0, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)} \tag{1.1}$$

Здесь $k = 0,1,..,n$, $x_0 = t$ обозначает время, $x_k\ (k = 1,..,n)$ – координаты точки, по повторяющимся индексам понимается суммирование. На характеристической поверхности $\varphi(x_k) = 0$ выполняется условие

$$\Delta = \left| a_{ij}^{(k)} \varphi_{,k} \right| = 0 \tag{1.2}$$

Рассматриваются характеристики единичной кратности, что не уменьшает общности. Нужно найти вид решения уравнений (1.1) в окрестности $\varphi = 0$. Пусть $\varphi = 0$ есть уравнение волны. Тогда решение позади волны $(\varphi > 0)$ можно искать в виде лучевого ряда

$$u_j = \sum_{s=0}^{\infty} u_j^{(s)}(x_k) f_s(\varphi); \quad f_s(\varphi) = 0, \quad \varphi < 0 \tag{1.3}$$

$$f'_{s+1}(\varphi) = f_s(\varphi), \quad f_s(\varphi) = \varphi_+^{s+\alpha} / \Gamma(s+\alpha+1) \tag{1.4}$$

Из (1.3) можно найти

$$u_{j,k} = \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ u_j^{(s)} f_{s-1}(\varphi)\varphi,_k + u_{j,k}^{(s)} f_s(\varphi) \right\} \tag{1.5}$$

Наибольшее по порядку слагаемое будет при $s = 0$. Тогда в порядке $\varphi^{\alpha-1}$ получится из (1.1)

$$a_{ij}^{(k)}\varphi,_k u_j^{(0)}(x_k) = 0 \tag{1.6}$$

откуда видно, что поверхность $\varphi = 0$ характеристическая и выполнено условие (1.2). Подставляя (1.3), (1.5) в (1.1) и приравнивая члены порядка φ^{α}, можно получить

$$a_{ij}^{(k)} u_{j,k}^{(0)} + a_{ij}^{(k)} u_j^{(1)}\varphi,_k + T_{ij} u_j^{(0)} = 0 \tag{1.7}$$

Из (1.6), учитывая, что по (1.2) существует нетривиальное решение (1.6), пропорциональное собственному вектору S_j матрицы $a_{ij}^{(k)}\varphi,_k$, можно получить

$$u_j^{(0)} = \Phi S_j, \quad a_{ij}^{(k)}\varphi,_k S_j = 0 \tag{1.8}$$

где Φ –произвольный скаляр, дающий лучевое решение. Характеристический определитель Δ в (1.2), где $\varphi_k = \partial\varphi / \partial x_k$ в силу (1.8) должен быть пропорционален $a_{ij}^{(k)} S_i S_j \varphi_k$, и ввиду произвола в выборе параметра s в уравнениях лучей

$$\frac{dx_i}{ds} = \Delta,_{\varphi_i}, \quad \frac{d\varphi_i}{ds} = -\Delta,_i \tag{1.9}$$

можно полагать

$$\Delta = a_{ij}^{(k)} S_i S_j \varphi_k, \ \Delta = 0 \tag{1.10}$$

Из (1.10) получится

$$\Delta,_{\varphi_k} = a_{ij}^{(k)} S_i S_j + 2a_{ij}^{(l)}\varphi_l S_i S_{j,\varphi_k} \tag{1.11}$$

где использована симметричность $a_{ij}^{(k)}$ по i, j.

В силу (1.8) имеет место вдоль $\varphi = 0$

$$\Delta,_{\varphi_k} = a_{ij}^{(k)} S_i S_j \tag{1.12}$$

Кроме того, можно считать

$$u_j^{(1)} = S_j \varphi_1 \tag{1.13}$$

поскольку в (1.7) коэффициенты при $u_j^{(1)}$ те же, что и у $u_j^{(0)}$ в (1.6). Умножая (1.7) на S_i и подставляя в него (1.8), можно найти

$$a_{ij}^{(k)} S_i S_j \Phi,_k + a_{ij}^{(k)} S_i S_{j,k} \Phi + T_{ij} S_i S_j \Phi = 0 \tag{1.14}$$

Записывая

$$2a_{ij}^{(k)} S_j S_{i,k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{ a_{ij}^{(k)} S_i S_j \right\} - a_{ij,k}^{(k)} S_i S_j \tag{1.15}$$

учитывая, что по (1.9), (1.12)

$$dx_k / dt = a_{ij}^{(k)} S_i S_j / a_{ij}^{(0)} S_i S_j = C_k \tag{1.16}$$

C_k есть вектор лучевой скорости, используя также лемму о решениях обыкновенных дифференциальных уравнений [1], согласно которой

$$\left\{a_{ij}^{(k)}S_iS_j / a_{ij}^{(0)}S_iS_j\right\}_{,k} = d\ln J/dt,\ J = \left|\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(t,\theta_1,\dots,\theta_{n-1})}\right| \tag{1.17}$$

где J есть якобиан от декартовых координат x_k к лучевым координатам θ_s, $s = 1,..,n-1$. $\theta_s = \text{const}$ есть уравнение луча, можно из (1.14)-(1.17) получить, интегрируя вдоль луча

$$\Phi = \frac{C(\theta_s)}{\sqrt{a_{ij}^{(0)}S_iS_jJ}}e^{\Omega},\ \Omega = \int_0^t\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}^{(k)}}{\partial x_k} - T_{ij}\right\}\frac{S_iS_j}{a_{ij}^{(0)}S_iS_j}dt \tag{1.18}$$

Таким образом, получено лучевое решение для системы уравнений (1.1) в форме (1.18). Соотношение (1.17) также можно получить, применяя теорему Гаусса-Остроградского к лучевой трубке [2,3] в виде $\dfrac{\partial C_k}{\partial x_k} = \dfrac{d\ln\lambda\sigma}{dt}$, где λ есть нормальная скорость волны, σ – площадь сечения лучевой трубки, отнесенная к ее начальному значению, причем

$$J = \lambda\sigma \tag{1.19}$$

В частности, для плоской задачи $x_1 = x$, $x_2 = y$, вводя радиус-вектор точек волны $\bar{r} = \bar{r}(t,\theta)$, можно получить

$$\sigma = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial\theta}\right| \tag{1.20}$$

Для идеальных сред уравнение (1.1) можно умножить на u_i и показать, что для получения закона сохранения энергии нужно полагать

$$T_{ij} = \frac{1}{2}a_{ij,k}^{(k)} \tag{1.21}$$

Этот факт был отмечен М.М.Минасяном, которому автор выражает благодарность.

Тогда указанный закон примет вид

$$\left\{a_{ij}^{(k)}u_iu_j\right\}_{,k} = 0,\ k = 0,1,\dots,n \tag{1.22}$$

причем из (1.18), (1.19) получится

$$\Phi = C(\theta_s)\Big/\sqrt{\alpha_{ij}^{(0)}S_iS_j\lambda\sigma} \tag{1.23}$$

В трехмерном пространстве $k = 0,1,2,3$. Можно в качестве Φ взять величину скорости частиц.

Как показано, вариационным методом [4] для произвольной среды и более строгим методом для широкого круга сред в [5, 6, 7] следует для движущихся перед волной сред считать

$$a_{ij}^{(0)}S_iS_j = \rho(c_n + u_n)/c_n \tag{1.24}$$

где ρ – начальная плотность среды, $\lambda = c_n + u_n$ есть нормальная скорость волны, u_n – нормальная к волне невозмущенная скорость частиц.

Таким образом, найдено одномерное по нормали к волне линейное или лучевое решение для произвольных сред, даваемое (1.18), и для идеальных сред (1.23), (1.24) для скорости частиц Φ. Другой подход к определению лучевого решения в магнитной газодинамике для неоднородной движущейся среды дан в [5,6], где указаны также пути обобщения на произвольную идеальную среду.

То, что (1.24) имеет место, можно показать из эвристических соображений. Для неподвижной впереди волны среды с учетом уравнений движения можно полагать $a_{ij}^{(0)} S_i S_j = \rho$. Для движущейся впереди волны среды, учитывая связь исходной системы координат со связанной с частицами среды $X_k = x_k + u_k$, $u_{k,t} n_k = u_n$ можно получить

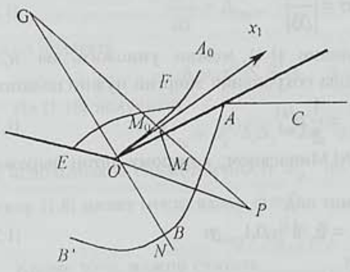
$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{x_k} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{X_k} + u_{k,t} \frac{\partial}{\partial X_k}$$

Кроме того, из условий совместности на волне $\partial / \partial t \to -\lambda \delta'$, $\partial / \partial X_k \to n_k \delta'$ [3] можно получить $\partial / \partial X_k \approx -(n_k / \lambda) \partial / \partial t$ и получится

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{x_k} = (c_n / \lambda) \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{X_k}, \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{X_k} = (1 + u_n / c_n) \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{x_k}$$

откуда в подвижной системе координат следует выбрать соотношение (1.24).

§2. Определение линейного решения в окрестности точки касания произвольной волны с точечной или дифракционной волной



Фиг.1

Рассмотрим две типичные дифракционные волновые задачи. Сначала возьмем непроницаемый полубесконечный плоский экран, на который в момент $t = 0$ падает произвольная волна OA_0 (фиг.1). В момент времени t волна OA_0 занимает положение AB и, кроме того, имеется точечная волна BB', произведенная вершиной O экрана. При наличии нескольких волн в среде следует вернуть их в начальное положение и определить решение на волнах AB с помощью начального условия на волне OA_0. При этом, согласно теории Кирхгофа, следует для решения в окрестности точки B касания волн интегрировать по освещенной части падающей волны, то есть по $x_1 \geq 0$, где ось x_1 касается начальной волны в точке O. Удобно вместо координаты, отсчитываемой по нормали к начальной волне, вводить время пробега от точки интегрирования (x_1, y_1) до начальной волны ζ, полагая $y_1 = -c_0 \zeta$, где $c_0 = c_{n_0} + u_{n_0}$ есть начальная скорость волны, ζ–время пробега от точки (x_1, y_1) до OA_0. Тогда начальное условие для волны AB, вблизи которой $u_1 = S_1 u$, можно взять в виде

$$u = u_1 = a^0(\zeta)_+^{\bar{\lambda}} (x_1)_+^{\bar{\mu}} / \Gamma(\bar{\lambda}+1) \qquad (2.1)$$

где S_1 есть значение собственного вектора на AB. Такое же начальное условие получится из граничной задачи отражения волны AC от угла, при этом для определения отраженных волн $AB, A'B'$ можно решать систему алгебраических уравнений и из граничных условий на сторонах угла определять лучевым методом решение на AB. Тогда начальное условие на волне OA_0 получится продолжением решения на AB к моменту $t = 0$, и поскольку при переходе к решению на точечной волне BB' следует считать решение на BB' равным нулю, при замене граничной задачи на начальную задачу следует, как и выше, полагать $t = 0$, $u_1 = 0$ при $x_1 < 0$ и брать начальное условие в форме (2.1). Тот же вывод получится при решении граничной задачи для системы уравнений с постоянными коэффициентами, например, задачи о проникании клина в магнитоупругую среду при начальном магнитном поле, направленным параллельно поверхности среды. В полученных методом Смирнова-Соболева интегралах по поверхности среды можно показать, что при определении решения вблизи точки B интеграл по отрицательным значениям координаты x есть малая более высокого порядка, чем интеграл по положительным x-ам, что после перехода к начальным условиям на OA_0 позволяет интегрировать решения по OA_0, для значений $x_1 > 0$, и выбирать начальное условие в виде (2.1). Решение системы уравнений (1.1) в окрестности точки B можно искать в виде, обобщающим решение волнового уравнения с переменной скоростью звука [8] и уравнений с постоянными коэффициентами [9]

$$u_1 = S_1 u, \quad u = -\left(2\pi\sqrt{2}\right)^{-1} \iint c_0 \Phi(\varphi)_+^{-\frac{3}{2}} a^0(\zeta)_+^{\bar{\lambda}} (x_1)_+^{\bar{\mu}} / \Gamma(\bar{\lambda}+1)\, dx_1 d\zeta \qquad (2.2)$$

где степень особенности фундаментального решения $\Phi(\varphi)_+^{-\frac{3}{2}}$ вблизи фронта волны выбирается из его поведения вблизи волны [10]. Тогда, подставляя (2.2) в систему (1.1), можно убедиться, что Φ удовлетворяет уравнениям для лучевого решения §1 и дается формулами (1.13), (1.24), а для идеальных сред дается (1.23), (1.24). Выбор постоянной $C(\theta_x)$ в (1.18), (1.23) и степени эйконала в лучевом решении (1.4) $\alpha = -3/2$ для формулы (2.2), как будет показано далее, позволяет удовлетворить решением (2.2) начальному условию (2.1). Выбор $\alpha = -3/2$ следует также из асимптотической формулы для фундаментального решения вблизи волны [10]. Согласно принципу взаимности для фундаментального решения [10, 11] можно в качестве лучевого решения и эйконала брать значения Φ и φ не только для точечной волны BB' с центром в точке O, (а точнее, с центром в точке интегрирования x_1, ζ), но и для обращенной точечной волны или квазиокружности с центром в точке

$M(x,y)$ и вычисляемой в начальном положении. Для удовлетворения начальному условию (2.1) в (2.2), как будет показано нами далее, следует в лучевом решении Ф постоянную C из (1.18), (1.23) брать в виде $C(\theta_s)=\sqrt{\rho_0 / c_{n_0} c_0}$ и получится

$$\Phi=\sqrt{\rho_0 c_n \left\{c_{n_0} c_0 \rho (c_n+u_n)^2 \sigma\right\}^{-1}} \tag{2.3}$$

где ρ_0, c_{n_0}, u_{n_0} – начальные значения ρ, c_n, u_n. Тогда (2.2) дает

$$u=-\left(2\pi\sqrt{2}\right)^{-1} \iint \left[A(t) c_0^{1/2} (\varphi)_+^{-3/2} (\zeta)_+^{\bar{\lambda}} (x_1)_+^{\bar{\mu}} / \Gamma(\bar{\lambda}+1)\right] dx_1 d\zeta$$

$$A(t)=a^0\sqrt{c_n \left\{\rho c_{n_0} (c_n+u_n)^2 \sigma\right\}^{-1}} \tag{2.4}$$

При вычислении формулы для эйконала обращенной волны EF или квазиокружности можно использовать видоизмененные соотношения работы [8] на случай двумерной дифракционной задачи. Величина φ в (2.4) есть время пробега от EF до точки (x_1,ζ) для произвольного луча. Выбрав за базовый луч MM_0 и обозначая через s координату x_1 точки M_0 пересечения указанного луча с начальной волной, через $t-t_\Phi$ время пробега от точки M до волны AB или от волны EF до начальной волны OA_0 вдоль луча MM_0, ибо, когда точка M принадлежит $AB(t-t_\Phi)$, квазиокружность EF касается OA_0 в точке M_0, учитывая, что в точке M_0 происходит касание, обозначая также через k_1 и k_2 кривизны EF и OA_0, вычисленные в точке O, можно, разлагая расстояние $c_0(\varphi+\zeta)$ от EF до OA_0 в ряд Тейлора по степеням x_1-s, получить аналогично одномерному случаю, рассмотренному в [8]

$$\varphi=t-t_\Phi-\frac{k_1-k_2}{2c_0}(x_1-s)^2-\zeta \tag{2.5}$$

Из (2.5), обозначая $\delta=t-t_\Phi$, $-\tau=t-t_g$, где $\delta=0$ дает уравнение AB, $\tau=0$ – уравнение BB' и учитывая, что, когда точка (x,y) принадлежит точечной волне $t=t_g$, обращенная волна или квазиокружность EF проходит через точку O, можно получить $(\varphi=0,\ x_1=0,\ \zeta=0)$

$$t_g-t_\Phi=\frac{k_1-k_2}{2c_0}s^2,\ -\tau=\delta-\frac{k_1-k_2}{2c_0}s^2 \tag{2.6}$$

Кроме того, обозначая через θ угол нормали лучей к точечной волне BB' при выходе из точки O с осью x_1, через θ_0 значение θ для точки B, через $\theta_0-\theta$ угол между указанными нормалями, проведя через точку M_0 нормали M_0P и M_0Q к волнам EF, OA_0, можно получить (фиг.1) $\theta_0 - \theta = \angle OQM_0 + \angle OPM_0$ или, поскольку $\angle OQM_0 = -k_2 s$, $\angle OPM_0 = k_1 s$ получится

$$\theta_0 - \theta = s(k_1 - k_2) \qquad (2.7)$$

Полученное соотношение проверено прямым вычислением для уравнений с постоянными коэффициентами, а также с коэффициентами, зависящими от одной координаты [9, 12]. В (2.4) интегралы понимаются в смысле главного значения или берется конечная часть интеграла [12]. Тогда согласно (2.4), (2.5), после интегрирования по частям, конечная часть интеграла имеет вид

$$u = \left(\pi\sqrt{2}\right)^{-1} \iint \left[A(t) c_0^{1/2} (\varphi)_+^{-1/2} \bar{\lambda}(\zeta)_+^{\bar{\lambda}-1} (x_1)_+^{\bar{\mu}} / \Gamma(\bar{\lambda}+1)\right] dx_1 d\zeta \qquad (2.8)$$

В силу равенства

$$t - t_\Phi - \frac{k_1 - k_2}{2c_0}(x_1 - s)^2 = \varphi', \quad \int_0^{\varphi'} \frac{\zeta^{\bar{\lambda}-1}}{\sqrt{\varphi' - \zeta}} d\zeta = (\varphi')^{\bar{\lambda}-1/2} B(\bar{\lambda}, 1/2) \qquad (2.9)$$

можно получить

$$u = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{\bar{\lambda} A B(\bar{\lambda}, 1/2)}{\Gamma(\bar{\lambda}+1)} c_0^{1/2} \int (x_1)_+^{\bar{\mu}} (\varphi')_+^{\bar{\lambda}-1/2} dx_1 \qquad (2.10)$$

В дальнейшем различаются две области в окрестности B: позади точечной волны BB' и между AB, BB'. В области позади BB' имеет место $t > t_g$. В (2.10) следует интегрировать в пределах от O до значения x_1, обращающего φ' в нуль

$$x_1 = s \pm \tilde{s}, \ \tilde{s} = \sqrt{2c_0 \delta (k_1 - k_2)} \qquad (2.11)$$

причем при $t > t_g$ имеет место $\tilde{s} > s$ и знак минус в (2.11) не подходит. Поэтому областью интегрирования будет $0 \le x_1 \le s + \tilde{s}$. Вычисление (2.10) дает решение при $t > t_g$ [9]

$$u = A_1 \Im\left(\frac{1}{2} - \bar{\lambda}, \bar{\lambda} + \frac{1}{2}, \bar{\lambda} + \frac{3}{2} + \bar{\mu}, \frac{1-\omega}{2}\right) \qquad (2.12)$$

где $\Im$ есть гипергеометрическая функция

$$A_1 = A\delta^{\bar{\lambda}+\bar{\mu}/2} \left(\frac{2c_0}{k_1 - k_2}\right)^{\bar{\mu}/2} \times$$

$$\times 2^{\bar{\lambda}-1/2} c_0 \Gamma(1+\bar{\mu})(1-\omega)^{\bar{\lambda}+1/2+\bar{\mu}} / \sqrt{\pi(k_1 - k_2)}\, \Gamma(\bar{\lambda} + 3/2 + \bar{\mu}) \qquad (2.13)$$

где $\omega = (\theta - \theta_0)\{2c_0\delta(k_1 - k_2)\}^{-1/2}$.

Полагая в (2.12), (2.13) $\bar{\lambda} = 0, \bar{\mu} = 0$, что соответствует в (2.1) начальной волне со скачком решения, можно получить решение около точки B при $t > t_g$ в виде

$$u = \frac{A(t) c_0}{\pi\sqrt{k_1 - k_2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2c_0}\sqrt{k_1 - k_2}\sqrt{-\tau}}{\theta - \theta_0} \qquad (2.14)$$

В области $t < t_g$ впереди точечной волны можно получить, интегрируя в пределах (2.11)

$$u = \frac{Ac_0\delta^{\bar\lambda}}{(k_1 - k_2)^{\bar\mu+1/2}} \frac{(\theta_0 - \theta)^{\bar\mu}}{\Gamma(\bar\lambda+1)} \Im\left(-\frac{\bar\mu}{2}, \frac{1-\bar\mu}{2}, \bar\lambda+1, \frac{1}{\omega^2}\right) \tag{2.15}$$

На самой волне AB $\delta \approx 0$ и $\omega \approx \infty$

$$u = \frac{Ac_0}{\sqrt{k_1 - k_2}} \frac{\delta^{\bar\lambda} s^{\bar\mu}}{\Gamma(\bar\lambda+1)} \tag{2.16}$$

Тогда можно перейти к начальной волне OA_0, на которой $\delta = \zeta$ и (2.16) дает

$$u_1 = \frac{Ac_0}{\sqrt{k_1 - k_2}} \frac{\zeta^{\bar\lambda} s^{\bar\mu}}{\Gamma(\bar\lambda+1)} \tag{2.17}$$

где согласно (2.4) при $t \to 0$ получится $A(t) = \alpha^0 / c_0\sqrt{\sigma}$.

Исходя из принципа взаимности для фундаментального решения [1] можно, вводя радиус-вектор для обращенной волны EF $\bar r' = \bar r'(\beta, t)$, причем $\beta = \text{const}$ дает лучи волны EF, получить при $t \to 0$ $|\sigma| = \left|\frac{\partial \bar r'}{\partial \beta}\right| = k_1^{-1}$ и поскольку $k_1 >> k_2$, получится $(k_1 - k_2)\sigma \approx 1$. Тогда (2.17) дает

$$u_1 \approx \alpha^0 \zeta^{\bar\lambda} s^{\bar\mu} / \Gamma(\bar\lambda+1) \tag{2.18}$$

то есть начальное условие (2.1) удовлетворяется решением (2.2). Для неоднородной задачи мелкой воды решение (2.13), (2.15) получено в [14]. Решение (2.12), (2.13) вблизи точечной волны BB' вдали от B в силу (2.6) можно записать в виде $\tau \approx 0$, $1 - \omega \approx -c_0(k_1 - k_2)\tau / (\theta - \theta_0)^2$

$$u = A_1, \quad A_1 \approx \frac{A}{(\theta - \theta_0)^{\bar\mu+1}} \frac{\Gamma(1+\bar\mu)c_0^{1/2-\bar\lambda-\bar\mu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\bar\lambda + 3/2 + \bar\mu)} (-\tau)^{\bar\lambda+1/2+\bar\mu} \tag{2.19}$$

и поскольку τ есть эйконал и дает профиль лучевого решения (1.4) на волне BB', а вдоль лучей $\theta = \text{const}$, из (2.19) следует, что $A(t)$, даваемое (2.14), в самом деле есть амплитуда для точечной волны BB' лучевого решения.

§3. Определение нелинейного решения в окрестности точки B касания волн

Как следует из линейного решения (2.14) для скачкообразной начальной волны при малых $\Phi \sim \gamma$ в окрестности волны, имеющей порядок $\tau \sim \gamma$, $\partial u / \partial \tau \sim 1$ и нелинейные члены в уравнениях движения среды следует удерживать. Поскольку наибольшие трудности представляет получение нелинейного уравнения в проекции на направление наиболее быстрого изменения параметров, здесь предлагается метод получения этого уравнения с помощью уравнения характеристики. Уравнение волны AB в линейной задаче согласно (2.6) имеет вид $\delta = 0$.

$$\tau = (\theta - \theta_0)^2 / 2c_0(k_1 - k_2) \tag{3.1}$$

Отсюда видно, что дифференциальные уравнения характеристик линейной задачи вблизи точки B имеют вид

$$\Gamma = \frac{c_0}{2}\frac{d(k_1 - k_2)}{dt}, \quad \frac{\partial\tau}{\partial t} = -\Gamma\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)^2 \tag{3.2}$$

Но дифферециальное уравнение характеристической кривой имеет вид

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = (C_n + v_n)|\mathrm{grad} F| \tag{3.3}$$

где C_n–нормальная скорость нелинейной характеристики относительно частиц среды. v_n–нормальная к волне скорость частицы среды.

Обозначаем через c_n и u_n соответственные значения невозмущенных величин C_n и v_n и полагаем $u = v_n - u_n$, $C_n = c_n + (\alpha^0 - 1)\mu$, где u мало, $\alpha^0 u$ дает вклад в скорость $C_n + v_n$ за счет нелинейных членов в выражении C_n через параметры среды, который можно найти из условий совместности на нелинейной характеристике. u_i находятся через u из уравнений

$$a_{ij}^{(k)} u_j \tau,_k = 0 \tag{3.4}$$

Таким образом, α^0 всегда может быть найдено [12]. Тогда из (3.3) получится, что уравнение одномерных по τ нелинейных характеристик имеет вид $\partial\tau/\partial t = \alpha^0 u / H_1$, $H_1 = c_n + u_n$ и после сравнения с (3.2) можно убедиться, что уравнение нелинейных двумерных характеристик вблизи B имеет вид

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} + \Gamma\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)^2 = \frac{\alpha^0}{H_1}u \tag{3.5}$$

При этом дифференциальное уравнение в проекции на τ, имеющее (3.5) своим уравнением характеристик, запишется в виде

$$\Psi,_{t\tau} - \Gamma\Psi,_{\theta\theta} + \alpha^0 H_1^{-1} u \Psi,_{\tau\tau} - ud \ln\Phi / dt = 0 \tag{3.6}$$

Здесь в силу произвола выбора Ψ можно полагать $u = \Psi,_\tau$, и добавлено слагаемое $-ud\ln\Phi/dt$, дающее с точностью до независящего от t множителя одномерное по τ линейное или лучевое решение Φ §1 около BB'.

Вводя функцию $v_\theta = \Psi,_\theta$, можно (3.6) записать в виде

$$u,_t - \Gamma v,_\theta + \alpha^0 H_1^{-1} u u,_\tau - ud\ln\Phi/dt = 0, \; u,_\theta = v_{\theta},_\tau \tag{3.7}$$

Можно искать решение уравнений (3.7), переходящее для конечных $\tau < 0$ в линейное решение (2.14) в виде [9]

$$u\sqrt{k_1-k_2}=\Phi\mu,\ v_\theta=\sqrt{k_1-k_2}\Phi\nu,\ \nu=\frac{\theta-\theta_0}{\pi(k_1-k_2)c_0}\mathrm{tg}\mu\pi-\frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}\frac{\mu}{c_0}$$

$$\tau=-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2(k_1-k_2)c_0}\mathrm{tg}^2\mu\pi+\int_0^t\frac{\alpha^0}{H_1}\frac{\Phi}{\sqrt{k_1-k_2}}\mu dt+C_1(C) \tag{3.8}$$

$$C=\frac{\sin\mu\pi}{\sqrt{k_1-k_2}}$$

где произвольная функция $C_1(C)$ может быть выбрана из условия наилучшего удовлетворения соотношений на ударной волне BB' [9] в окрестности точки B, в которой $\mu=1$, причем условия на BB' точно удовлетворены в точке B при предположении $C_1(0)=0$.

Как показано в [13], для однородной сжимаемой жидкости для выполнения условия перехода решения (3.8) в значение u на волне BB' верное вдали от B, следует полагать $C_1\equiv 0$, что имеет место и для данной задачи в произвольной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.К. Курс высшей математики. Т.IV. - М.: Гостехиздат, 1950.
2. Лере Ж., Гординг Л., Котаке Т. Задача Коши. - М.: Мир, 1967.
3. Jeffrey A., Tanuiti T. Non-linear wave propagation. - New York-London: 1964. 250 p.
4. Уизем Дж.Б. Волны с дисперсией и вариационные принципы. Нелинейные волны. - М.: Мир, 1977, с.155-160.
5. Минасян М.М. О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике. - Докл.АН Арм.ССР, 1972, т.4, №5, с.273-280.
6. Минасян М.М. Приближенные уравнения нелинейных волн в неоднородных движущихся средах с учетом диссипации и дисперсии. - Уч.записки ЕГУ, естест.науки, 1978, №3 (139), с.46-52.
7. Минасян М.М. Распространение слабых ударных волн в неоднородных движущихся средах. - Уч.записки ЕГУ, естест.науки, 1975, №1, с.55-64.
8. Бабич В.М. Распространение нестационарных волн и каустики. - Уч.записки ЛГУ, 1958, №32.
9. Багдоев А.Г., Даноян З.Н. Исследование движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке.- Ж.вычис.матем. и матем.физики, 1972, т.12, №6, с.1512-1529.
10. Бабич В.М. Фундаментальные решения гиперболических уравнений с переменными коэффициентами. _ Математ. сб.: 1960, т.52 (94), №2.
11. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1965.
12. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. - Ереван: Изд.АН Арм.ССР, 1981. 303 с.
13. Zahalak G.J. and Myers M.K. Conical flow near singular rays. - Journal of Fluid Mechanics, 1974, vol.63, №3.
14. Багдоев А.Г., Безиргенян Г.С. Решение дифракционной задачи вблизи касания дифракционной и падающей гравитационной волн в линейной постановке. - Изв.НАН Армении, Механика, 1994, т.47, №3-4, с.37-53.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
24.07.1998

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №3, 1999 Механика

Вводное слово к дискуссии

15 апреля и 6 мая 1999 г. редакцией журнала Известия НАН Армении "Механика" была организована дискуссия на тему: "О методах приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным".

В настоящее время эти вопросы представляются важными для определения пределов применимости тех или иных расчетных моделей тонкостенных элементов конструкций в зависимости от их физико-механических и геометрических характеристик и условий нагружения.

По решению редколлегии журнала в настоящем номере печатаются некоторые материалы, представленные на дискуссии.

Редколлегия