ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №3, 1999 Механика

УДК 532.516

ЭРОЗИЯ ПОЧВЫ НА СКЛОНАХ ВОЗВЫШЕННОСТЕЙ ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОТОКОМ СЛОЯ ЖИДКОСТИ, ОБРАЗОВАННОГО ДОЖДЕМ

Сагомонян А.Я.

Ա. Յա. Սագոմոնյան
Հողի էրոզիան բարձրունքների լանջերին անձրևից առաջացած հեղուկի շերտի տուրբուլենտ հոսանքով

Որոշվում է լանջի մակերևույթին առաջացած, հող չներթափանցած անձրևի կաթիլների հեղուկի շերտի տուրբուլենտ հոսանքը: Մոտավոր մեթոդով ստացված է խնդրի շերտի հաստությամբ հոսանքի պարամետրերը որոշող անալիտիկ լուծումը: Դիտարկված է մասնավոր դեպք, երբ հոսանքում կախված հողի մասնիկները զանգվածով և ծավալով միատեսակ են: Օգտագործելով Պրանդտլի մեթոդը որոշված է հողի մասնիկների բաշխումը հեղուկի շերտի հաստությամբ, որը թույլ է տալիս որոշել նրանց զանգվածային ծախսը վայրկյանում շերտի լայնական կտրվածքով:

A.Ja.Sagomonyan
Soil Erosion on the Slopes of the Hills Formed by a Turbulent Flow of a Rain-made Layer

Определяется турбулентный поток жидкости капель дождя, не проникшей в почву, в образовавшемся слое на поверхности склона. Приближенным методом получено аналитическое решение задачи, определяющее параметры потока по толщине слоя. Проведен анализ решения. Рассмотрен частный случай, когда взвешенные в потоке частицы почвы по массе и объему одинаковы. Используя метод Прандтля, изложенный в книге [3] в списке литературы рукописи, автором определено распределение частиц почвы по толщине слоя жидкости, позволяющее определить массовый секундный расход их через поперечное сечение слоя.

1. Часть непроникшей в почву жидкости капель дождя образует на поверхности склона слой жидкости, стекающей к его подножию под действием силы тяжести. Другая часть жидкости капель, проникшая в поры почвы через поверхность склона, образует водонасыщенную область почвы, примыкающей к этой поверхности. Предполагается, что среда в этой области остается в покое. Ударное воздействие капель дождя, проникание жидкости в поры и замачивание частиц почвы приводят к разрушению слабосвязанных частиц на более мелкие, свободные от сил сцепления частицы. Опыт показывает, что дальше происходит замедленное движение мелких частиц в слое жидкости в направлении нормали к поверхности склона. Скорость этих частиц в направлении потока практически равна скорости частиц жидкости. Восхождение отдельных частиц по нормали может продолжаться вплоть до свободной поверхности слоя жидкости. Более прочные крупные частицы почвы (гальки) при этом приходят в очень медленное движение вдоль поверхности склона, сосредотачиваясь вблизи этой поверхности. После прекращения восходящего движения частиц, под действием силы тяжести начинается их падение (осаждение) в слое, преодолевая сопротивление жидкости. Падающие частицы достигают поверхности

склона в точках, лежащих ниже по течению потока в слое от точек их старта. На смену осаждающихся частиц с поверхности склона поднимаются другие частицы. В результате этого процесса достигается равновесное движение частиц почвы в потоке жидкости в слое. Эту среду в слое естественно назвать суспензией. Процесс уноса частиц почвы равновесным потоком суспензии вниз к подножию называется дождевой (водной) эрозией почвы. Дождевая эрозия на склонах возвышенностей вместе с частицами уносит наиболее продородную часть вещества почвы на склонах. Поэтому исследование этого явления актуально при выработке противоэрозийных мер. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных изучению водной эрозии почв. В их числе значительное место занимают результаты полевых и лабораторных исследований. В недавно вышедшей книге [1] большой список работ по проблеме эрозии почв. Поток суспензии в слое характерен завихренностью, интенсивность которой зависит от интенсивности дождя и степени шероховатости поверхности склона [2,3]. Наличие завихренности позволяет представить качественную картину начала восходящего движения мелких и легких частиц почвы, покоящихся на поверхности склона. В результате обтекания этих свободных от сил сцепления частиц возникает циркуляция скорости потока вокруг них. Это приводит к появлению подъемной силы, действующей на частицу. Во многих случаях эта сила превосходит все другие силы, действующие на эту же частицу. При этом условии, очевидно, что частица начнет восходящее движение с уменьшающейся составляющей скоростью по нормали к поверхности склона. Далее предполагается, что между поверхностью склона и прилегающей к ней поверхностью крупных частиц силы сцепления действуют дискретно в отдельных точках их связи. То есть, между этими поверхностями имеется сквозная щель (зазоры) очень малой толщины.

В рассматриваемой суспензии объемная концентрация обычно мала и можно ее моделировать несжимаемой вязкой жидкостью с плотностью ρ. Поток жидкости в тонкой щели порождает сдвиговые напряжения, действующие на поверхность гальки, способные разрушить связи и устранить силы сцепления. Возникающая после этого подъемная сила, действующая на крупную частицу, не может преодолеть силы сопротивления, но она может двигаться вдоль поверхности склона под действием в этом направлении гидродинамических сил. При этом, количество уходящих частиц с данного места равно количеству приходящих на это место. То есть, количество проходящих частиц вдоль поверхности склона не изменяется [2,3,4,5].

Из теоретических работ, посвященных проблеме восхождения, осаждения и переноса твердых частиц в потоке жидкости, следует отметить фундаментальную работу Н.Е. Жуковского, опубликованную в 1919 году [6]. В этом исследовании на основе теории вихревого движения построена математическая модель, позволившая автору получить ряд конкретных результатов, имеющих большое научное и практическое значение. Модель Н.Е. Жуковского может служить основой для решения современных задач проблемы. Необходимо еще отметить исследования Ф.И.Франкля под названием "К теории движения взвешанных частиц", опубликованных в книге [7], (с.669-687). В этой работе выведены обобщенные уравнения "диффузионной теории" движения наносов [5,7].

2.Постановка задачи. Обычно объемная концентрация мелких частиц в слое водной суспензии мала, порядка $10^{-4}-10^{-5}$. Чаще она моделируется вязкой несжимаемой жидкостью, коэффициент вязкости η которой определяется по формуле А.Эйнштейна [8]

$$\eta = \mu(1+\gamma z), \; z << 1$$

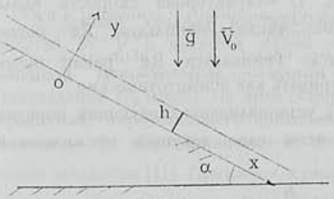
где μ — коэффициент вязкости воды, z — объемная концентрация частиц почвы, γ — постоянный множитель. Для сферических твердых частиц $\gamma = 2{,}5$.

В настоящей работе движение суспензии определяется без учета влияния твердых частиц, поток суспензии заменяется потоком вязкой несжимаемой воды в слое. Приняв скорость $\bar{v}$ водного потока в слое за скорость суспензии, можно определить массовую концентрацию частиц из уравнения переноса [5]

$$\rho_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \rho_0 \bar{v}\,\mathrm{grad}\,c = -\mathrm{div}\left(\rho_0 \bar{v}^*\right)$$

где ρ_0 -плотность суспензии в целом, c — массовая концентрация частиц (отношение массы частиц в единице объема к плотности ρ_0), через $\bar{v}^*$ обозначена подлежащая определению разность между средней скоростью частиц и скоростью $\bar{v}$. В диффузионной теории переноса пользуются законом Фика [5]

$$\bar{v}^* = -\frac{D}{c}\,\mathrm{grad}\,c$$



Фиг.1

где D — коэффициент диффузии частиц почвы в суспензии. Рассматривается плоскопараллельное движение. Поверхность склона считается неограниченной плоскостью, наклонной к горизонту (поверхности Земли) под углом α. То есть предельный случай, когда кривизна поверхности равна нулю, а число Рейнольдса, в котором за характерную длину взят радиус кривизны поверхности, равно бесконечности. Скорость дождевых капель V_0 одинакова, постоянна и параллельна ускорению силы тяжести $\bar{g}$. Величина V_0 -порядка 5-9 м/с. Объемная концентрация жидкости капель ω постоянна, равномерно распределена в "дождевом" пространстве и имеет порядок $10^{-5}-10^{-6}$. Концентрация пор почв (пористость) m также постоянна и равномерно распределена в почве склона. В дождевом пространстве над поверхностью слоя текущей суспензии давление постоянно и равно атмосферному давлению. Выберем начало декартовой системы координат на поверхности склона, ось x направим вдоль нее, вниз по течению, ось y – по внешней нормали плоскости склона (фиг.1). В силу принятых условий задачи, граница между слоем суспензии и пространством дождя будет проницаемой плоскостью разрыва параметров среды, параллельная поверхности склона. Все параметры жидкости в слое не зависят от x, а толщина слоя h будет функцией только времени: t.

На границе $y = h(t)$ выполняются граничные условия

$$\omega\left(\dot{h} + V_0\cos\alpha\right) = \dot{h} + \mathrm{v}_s, \quad \rho\omega\left(\dot{h} + V_0\cos\alpha\right)\left(V_0\cos\alpha - \mathrm{v}_s\right) = P_s - P_a$$

$$y = h(t), \quad \rho\omega\left(\dot{h} + V_0\cos\alpha\right)\left(V_0\sin\alpha - u_s\right) = \tau_s, \quad \dot{h} = \frac{dh}{dt} \tag{1}$$

В этих равенствах ρ – плотность воды, u_s, v_s – компоненты скорости за поверхностью разрыва, P_s, P_a – давления за и перед ней, τ_s – напряжение сдвига за ней. Ниже показано, что максимальное значение толщин $h(t)$ слоя жидкости - суть малая величина, пропорциональная объемной концентрации жидкости капель в дождевом пространстве. В уравнениях плоского движения жидкости в узком слое между граничными линиями малой кривизны, порядок отношения сил инерции к силам трения определяется "приведенным" числом Рейнольдса Re^* [4,9]

$$\mathrm{Re}^* = \mathrm{Re}\left(\frac{h}{L}\right)^2, \quad \mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{2}$$

где L – средний радиус кривизны, U – характерная скорость вдоль границ. В рассматриваемой задаче число Рейнольдса Re равно бесконечности, а приведенное число Рейнольдса Re^* равно нулю. Конечно, эти значения надо рассматриватъ как асимптотические.

Условия (1) на границе $y = h(t)$ устанавливают следующий порядок величин, имеющий место и во всем слое текущей несжимаемой жидкости:

$$\frac{\mathrm{v}_s}{u_s} << 1, \quad \frac{P_s}{P_a} \approx 1, \quad \frac{h}{l} << 1 \tag{3}$$

В последнем неравенстве (3) l – характерная длина граничных линий и для нашей задачи оно выполняется всегда. Сказанное о приведенном числе Рейнольдса и условия (3) позволяют упростить основные уравнения турбулентного пульсационного движения [4,9,10]. Производя в уравнениях Навье-Стокса для осредненного турбулентного движения упрощения, какие делают при выводе уравнений пограничного слоя, для турбулентного течения в рассматриваемом слое получим уравнения

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\rho g\sin\alpha+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{u'v'}\right),\ \ \tau=\mu\frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\rho g\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{v'}^2\right),\ \ \frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \ v=v(t) \quad (5)$$

Здесь u, v – теперь осредненные компоненты скорости по осям x, y; P – осредненное давление. Символы u', v' означают компоненты скорости пульсаций по этим осям, черточка над их произведением означает осреднение этого произведения. Величина $\overline{v'}^2$ –осредненный квадрат скорости пульсации по оси y. В рассматриваемой задаче $\overline{v'}^2$ – функция только времени t. Одной из основных задач теории турбулентного движения жидкости является формулировка гипотез, основанных на анализе результатов эксперимента, позволяющих установить связь между осредненным и пульсационным движением. Так например, на основе гипотезы Л.Прандтля о длине пути перемешивания жидкости получена следующая формула для касательного пульсационного напряжения [10] (с.238)

$$\tau'=\left(-\rho\overline{u'v'}\right)=\rho l'\sqrt{\overline{v'}^2}\frac{\partial u}{\partial y},\ \ v'=\sqrt{\overline{v'}^2} \quad (6)$$

где l'–длина пути перемешивания. Заметим, что в настоящее время величине l' уже не придают обязательный смысл "пути перемешивания", а характеризует геометрическую структуру турбулентного потока, то есть масштаб турбулентности [5] (с.698). Учитывая (6), уравнение (4) представим в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=g\sin\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\left[(v+\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial y}\right],\ \ v=\frac{\mu}{\rho},\ \ \varepsilon=l'v' \quad (7)$$

3.Средний квадрат вертикальных пульсационных скоростей не зависит от y и является малой величиной во много раз меньшей квадрата максимальной скорости осредненного потока в этом направлении [7] (с.685). На этом основании в формуле (5), в правой части уравнения, определяющего давление, отбросим член, содержащий эту величину. То есть принимается, что давление в потоке определяется весом жидкости [11]. Принимая в условиях (3) $P_s=P_a$, получим

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\rho g\cos\alpha,\ \ P-P_a=\rho g\cos\alpha(h-y),\ \ 0\le y\le h \quad (8)$$

В ряде работ (например, [12,13]) принимается, что на пористой границе скорость проникания жидкости w в поры почвы линейно зависит от давления с постоянным коэффициентом пропорциональности K. Тогда, принимая это условие согласно (8), для рассматриваемой задачи получим равенство

$$w=K\rho g\cos\alpha h(t) \quad (9)$$

Теперь определим толщину слоя жидкости $h(t)$, используя закон сохранения массы. Пусть ds – элемент граничной линии $y = h(t)$ (фиг.1). В единицу времени через ds втечет жидкость капель в слой с массой dM_1:

$$dM_1 = \rho\omega ds\left(\dot{h} + V_0 \cos\alpha\right), \quad \dot{h} = \frac{dh}{dt}$$

За это же время через элемент ds поверхности склона на противоположной стороне из слоя в почву вытечет жидкость массы dM_2:

$$dM_2 = \rho m ds K \rho g \cos\alpha h(t)$$

где m -пористость почвы. При вышепринятых предположениях разность $dM_1 - dM_2$ равняется секундному изменению массы жидкости в объеме $1 \times h \times ds$:

$$dM_1 - dM_2 = \frac{\partial}{\partial t}(\rho h ds) = \rho ds \dot{h}$$

Это выражение определяет скорость движения границы

$$\dot{h} = \frac{wV_0 - mK\rho g \cos\alpha h}{1 - \omega} \tag{10}$$

а также величину толщины $h(t)$ при условии $t = 0, h = 0$

$$h(t) = A\left(1 - e^{-Et}\right), \quad A = \frac{\omega V_0}{mK\rho g}, \quad E = \frac{mK\rho g \cos\alpha}{1 - \omega} \tag{11}$$

Решение (11) имеет асимптотическое значение при $t = \infty$

$$h_m = A = \frac{\omega V_0}{mK\rho g} \tag{12}$$

Скорость границы $\dot{h}$ можно представить формулой

$$\dot{h} = \frac{wV_0 \cos\alpha}{1 - \omega} e^{-Et} \tag{13}$$

По гипотезе Прандтля длина пути перемешивания зависит от y в виде равенства [3,4]

$$l' = ky \tag{14}$$

постоянный коэффициент пропорциональности k для воды принимает значение $k = 0{,}4$. Используя последнее равенство, представим уравнение (7) в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(\nu + By)\right] = \frac{\partial u}{\partial t} - g \sin\alpha, \quad B = k\sqrt{\overline{\mathrm{v}'^2}} = k\mathrm{v}' \tag{15}$$

и подчеркнем, что v' зависит только от времени. Уравнение (15) можно решать методом последовательных приближений, изложенном в работе [14] и использованном для аналогичной задачи в [11]. За первое приближение примем решение квазистатического движения

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(\nu + By)\right] = -g\sin\alpha \qquad (16)$$

После интегрирования его по y, получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{g\sin\alpha y}{\nu + By} + \frac{C_1}{\nu + By} \qquad (17)$$

Интегрирование (17) по y приводит к решению

$$u(y,t) = -\frac{g\sin\alpha y}{B} + \left(\frac{C_1}{B} + \frac{\nu g\sin\alpha}{B^2}\right)\ln(\nu + By) + C_2 \qquad (18)$$

Функции времени C_1 и C_2 определяются из граничных условий на границах слоя турбулентного движения жидкости. Выпишем второе равенство граничных условий (1) на поверхности $y = h(t)$:

$$\rho\left(\dot{h} + V_0\cos\alpha\right)\left(V_0\sin\alpha - u_s\right) = \tau_s, \quad \tau_s = \mu\frac{\partial u}{\partial y} + \tau' \qquad (19)$$

При малых значениях объемной концентрации жидкости капель $\omega << 1$, на преобладающей части границы $y = h(t)$, давление равно атмосферному, а вязкая часть напряжения сдвига равна нулю. Эксперименты показывают, что на этой поверхности рейнольдсово напряжение сдвига τ', определенное по формуле (6), достигает минимального значения [4] (с.565). В настоящей задаче это значение имеет порядок ω. В принципе задачу можно решать при граничном условии (19). С целью установить приближенные условия, приводящие к простому решению задачи, обезразмерим уравнение (19), разделим его члены на $\rho V_0^2\sin^2\alpha$. Оценка величин безразмерных членов в полученном уравнении позволяет установить два возможных граничных условия

$$y = h(t), \ u_s = V_0\sin\alpha \ \text{ или } \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Здесь принимается первое условие

$$y = h(t), \quad u = u_s = V_0\sin\alpha \qquad (20)$$

О обосновании выбора условия (20) сказано ниже. Более сложно установление граничных условий на шероховатой поверхности склона [15,3,4]. На основании изложенного в начале статьи, принимается следующая модель. Вблизи поверхности склона в слое суспензии образуется подслой с предельной концентрацией частиц почвы, в котором еще возможно движение воды. На границе подслоя происходит равновесное восхождение и осаждение частиц почвы. Толщина подслоя y_0 значительно меньше толщины слоя $h\ (y_0 < h)$. Предельная концентрация в настоящей работе предполагается заданной. При определении постоянных интегрирования в решении (18), продольной скоростью среды в подслое пренебрегается, а граничные условия сносятся с поверхности $y = y_0$ на поверхность склона $y = 0$. В результате граничное условие для продольной скорости на поверхности склона запишется в виде

$$y = 0,\; u(0,t) = 0 \tag{21}$$

Теперь решение (18), удовлетворяющее условиям (20) и (21), запишется так:

$$u(y,t) = \left(V_0 B + yh\right)\frac{\sin\alpha}{B}\frac{\ln(1 + By/\nu)}{\ln(1 + Bh/\nu)} - \frac{g\sin\alpha}{B}y \tag{22}$$

Если не сделать указанную сноску, а выполнить условие $u = 0$ на границе $y = y_0$, то вместо (22) получили следующее выражение для продольной скорости:

$$u(y,t) = \frac{g\sin\alpha}{B}\left(y - y_0\right) + \left[V_0 + \frac{g}{B}\left(h - y_0\right)\right]\sin\alpha\left[\frac{\ln(\nu + By) - \ln(\nu + By_0)}{\ln(\nu + Bh) - \ln(\nu + By_0)}\right] \tag{22'}$$

При $y_0 = 0$ это выражение переходит в (22). Формула (22) определяет решение задачи в квазистатическом приближении, то есть решение уравнения (16). Второе и последующие приближения строятся методом работы [14] так, как это сделано в [11]. Рассматриваемое здесь движение относится к ползущимся движениям [4,5] и здесь ограничиваемся (22). Из этого решения следует, что максимальное значение продольной скорости u_m достигается внутри слоя на некотором расстоянии от поверхности склона $y_1 < h$. Затем скорость $u(y,t)$ уменьшается при $y > y_1$ и достигает значения $V_0\sin\alpha$ на поверхности $y = h$. Этот результат экспериментально подтвержден в статье Y.Yoon, H.Wenzel, опубликованной в журнале [16] в 1971 году.

Можно показать: из решения (16), полученного при втором условии $y = h,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ и условии (21), следует, что скорость достигает максимума на границе $y = h$. Выше было отмечено, что длина пути перемещения рассматривается как параметр, определяющий масштаб турбулентности. Например, в теории "свободной" турбулентности, в задаче истечения турбулентной струи принимается, что скорость изменения ширины струи пропорциональна поперечной пульсационной скорости [4], (с.675). В рассматриваемой задаче поверхность слоя суспензии приближенно можно рассматривать как свободную поверхность и, по аналогии, принять

$$\sqrt{\overline{v'^2}} = v' = \beta_1\dot{h}(t)$$

где β_1 –постоянный безразмерный коэффициент. Используя формулу (13), это равенство представим в виде

$$\mathrm{v}' = \frac{\beta_1 \omega V_0 \cos\alpha}{1-\omega} e^{-Et} \tag{23}$$

Теперь величина B в решении (22) определяется выражением

$$B(t) = \frac{k\beta_1 \omega V_0}{1-\omega} e^{-Et} \cos\alpha,\ k = 0{,}4 \tag{24}$$

Следует отметить, что среди коэффициентов, использованных в настоящей работе, нет новых. Все они известны, используются в других исследованиях, в частности, в работах, содержащихся в списке литературы статьи.

4. Перенос взвешанных частиц потоком суспензии удобно рассчитать методом, предложенным Л.Прандтлем [3] (с.444). Рассмотрим частный вид суспензии, когда твердые частицы в смеси одинаковы. Взаимодействием частиц пренебрегается, а сила сопротивления покоящейся жидкости линейно зависит от скорости падения частиц под действием силы тяжести. Так, для сферических частиц радиуса R, при силе сопротивления Стокса, скорость частиц вдоль оси y определяется по формуле [4,8]

$$U = U_0 = -\frac{2R^2(\rho_1 - \rho) g \cos\alpha}{9\mu}$$

где ρ_1 -плотность материала частиц, ρ – плотность воды.

Скорость падения частиц вдоль оси y в потоке суспензии v_0 запишется так [5,8]

$$\mathrm{v}_0 = \mathrm{v} + U \tag{25}$$

скорость v в правой части (25) определяется из условия сохранения массы в (1) и значения $\dot{h}$ в формуле (13)

$$\mathrm{v} = -\omega V_0 \cos\alpha\left(1 - e^{-Et}\right) \tag{26}$$

Следуя Л.Прандтлю [3], пульсационное напряжение сдвига в (6) представим в виде

$$\tau' = A_\tau \frac{\partial u}{\partial y},\ \ A_\tau = k\rho \mathrm{v}' y,\ \ k = 0{,}4 \tag{27}$$

где скорость v' определена по формуле (6). В теории переноса A_τ называется коэффициентом переноса количества движения [3,5,7].

Пусть A_M –коэффициент переноса массы M:

$$M = A_M \frac{\partial c}{\partial y}$$

где c –массовая концентрация частиц в суспензии. Тогда коэффициент переноса объема A_V определяется из равенства

$$A_M = \rho A_V$$

Установлено, что A_M в 1,4-2 раза больше A_τ [3,4]. Тогда, полагая $k = 0{,}4$

для воды, получим

$$A_V = \beta v' y, \ \ \beta = 0{,}56 - 0{,}8 \tag{28}$$

Пусть число взвешенных частиц в единице объема равно n. Эта концентрация является убывающей функцией вдоль оси y. По закону переноса, согласно (28), поток частиц вверх, в единицу времени, через единицу площади запишется в виде

$$-A_V \frac{dn}{dy} = -\beta v' y \frac{dn}{dy} \tag{29}$$

В равновесном процессе этот поток взвешеных частиц компенсируется нисходящим переносом падающих частиц со скоростью v_0. В единицу времени через единицу площади опускается количество частиц $n|v_0|$.

Следовательно,

$$n|v_0| = -\beta v' y \frac{dn}{dy}$$

После интегрирования при $y = y_0$, $n = n_1$ получим [3]

$$\frac{n}{n_1} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-m}, \ \ m = \frac{|v_0|}{\beta v'} \tag{30}$$

где n_1 – количество частиц при указанной выше предельной концентрации (состоянии насыщения), y_0 – введенная выше координата границы подслоя среды в этом состоянии. Пусть числовая концентрация n_1 в подслое постоянна, а среда в нем находится в состоянии твердого тела (подобно вязкопластической среде при малых напряжениях сдвига). Пренебрегая силой инерции ползучего движения и учитывая условия рассматриваемой задачи, приходим к выводу: среда в подслое между двумя поперечными сечениями и боковыми границами $y = 0$ и $y = y_0$ находится в равновесии [5] (с.479). Со стороны склона на боковую поверхность выделенного объема действует сила трения скольжения, а на другой боковой поверхности $y = y_0$ действует сила, возникающая от напряжения сдвига. Действующей силой является составляющая силы тяжести вдоль поверхности склона. Выделим массу $dM = \rho_0 y_0 dx$ в объеме $y_0 dx$, где ρ_0–плотность среды подслоя, dx–расстояние между двумя поперечными сечениями этого слоя. Условие равновесия сил, действующих на массу, можно записать в виде равенства

$$\tau_w dx - k_0 \rho_0 y_0 g \cos\alpha dx + \rho_0 y_0 g \sin\alpha dx = 0$$

Из этого равенства следует формула, определяющая толщину подслоя

$$y_0 = \frac{\tau_w}{\rho_0 g (k_0 \cos\alpha - \sin\alpha)} \tag{31}$$

где k_0 – статический коэффициент трения, определяется из опыта, он связан с углом трения φ равенством $k_0 = \mathrm{tg}\varphi$. На поверхности трения грунта о грунт угол φ имеет порядок $14^0 - 15^0$; символом τ_w обозначено напряжение сдвига на боковой поверхности объема при $y = y_0$. Пренебрегая рейнольдсовым напряжением сдвига τ' в окрестности поверхности склона, получим $\tau_w = \mu\partial u/\partial y$ или же $\tau_w = \eta\partial u/\partial y$; коэффициент η определен формулой Эйнштейна в начале статьи. Величина $\partial u/\partial y$ есть производная по y от функции (22) при $y = 0$ или производная по y от функции (22') при $y_0 = 0$, $y = 0$. В обоих случаях получим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{g\sin\alpha}{B} + \left(V_0\sin\alpha + \frac{gh\sin\alpha}{B}\right)\frac{B}{\nu\ln(1 + Bh/\nu)} \tag{32}$$

Пусть N – объемная концентрация материала частиц в подслое, V_1 - объем одной частицы, тогда можно написать равенства

$$\rho_0 = \rho_1 N + \rho(1 - N), \quad n_1 = N/V_1 \tag{33}$$

При известной предельной объемной концентрации N, объеме частицы V_1, приведенные выше соотношения позволяют определить в формуле (30) толщину подслоя y_0 предельную числовую концентрацию n_1. Умножив число частиц n на массу каждой частицы m_s и на скорость потока по формуле (22), получим значение потока массы в единицу времени через единицу площади. Полный поток массы частиц в единицу времени определяется интегралом

$$m_s\int_{y_0}^{h} nu(y,t)dy = m_s n_1 \sin\alpha\left\{\frac{V_0 B + gh}{B\ln(1 + Bh/\nu)}\int_{y_0}^{h}\left(\frac{y_0}{y}\right)^m \ln(1 + By/\nu)dy - \right.$$

$$\left. -\frac{g}{B}\int_{y_0}^{h}\left(\frac{y_0}{y}\right)^m ydy\right\} \tag{34}$$

После вычисления интегралов, формулу (34) можно представить в следующем виде:

$$m_s\int_{y_0}^{h} nu(y,t)dy = I_1 + I_2 \tag{35}$$

$$I_1 = \frac{m_s n_1 (V_0 B + gh)\sin\alpha y_0}{(1-m)B}\left[\left(\frac{h}{y_0}\right)^{1-m} - \frac{\ln(1 + By_0/\nu)}{\ln(1 + Bh/\nu)} - \frac{B}{\nu}\int_{y_0}^{h}\frac{(y/y_0)^{1-m}dy}{1 + By/\nu}\right] \tag{36}$$

$$I_2 = -\frac{m_s n_1 g\sin\alpha y_0^2}{(2-m)B}\left[\left(\frac{h}{y_0}\right)^{2-m} - 1\right] \tag{37}$$

Формула Л.Прандтля (30) показывает, что очень маленькие частицы, осаждающиеся с малой скоростью v_0 так, что $m << 1$ распределяются по толщине слоя $y_0 \le y \le h$, почти равномерно. Более крупные частицы, обладающие большей скоростью v_0, при $m > 1$ сосредотачиваются в слоях, близких к поверхности склона. Скопление большого числа частиц в подслое, вблизи поверхности склона приводит к предельному состоянию, сходному с вязкопластическим состоянием среды [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов М.С., Глазунов Г.П. Эрозия и охрана почв.- М.: Изд. Московского университета, 1996.
2. Форхгеймер Ф. Гидравлика. - М.-Л.: Изд. ОНТИ, 1935.
3. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. - М.: ИЛ, 1951.
4. Шлихринг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1969.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1970.
6. Жуковский Н.Е. О снежных заносах и заилении рек. Полное собрание сочинений, т.III. - М.-Л.: 1936, с.451-474.
7. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. - М.: Наука, 1973.
8. Бэчелор Дж. Введение в динамику жидкости. - М.: Мир, 1973.
9. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Гостехиздат, 1955.
10. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. Том I, под редакцией С.Гольдштейна. М.: ИЛ, 1948.
11. Сагомонян А.Я. К вопросу дождевой эрозии почв. - Ж. Вестник Моск. ун-та, сер.1, матем.,механ., 1995, №5, с.85-96.
12. Слезкин Н.А. О течении вязкой жидкости при наличии свободной границы и пористого дна. - Вестник Моск. ун-та, матем.,механ., 1957, №5, с.3-5.
13. Бабаджанян Г.А., Даниелян Л.Е. Течение вязкой жидкости в открытом пористом русле. - Изв. АН Арм.ССР, сер.физ.-мат. наук, 1963, т.16, №3, с.83-90.
14. Швец М.Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. - ПММ, 1939, вып.3, с.251-266.
15. Петров А.Г., Петров П.Г. Перенос взвешенных частиц турбулентным потоком над размываемым дном. - ПМТФ, 1992, №4, с.61-69.
16. Journal of the Hydraulics Division Proceeding of the ASCE Engineers, 1971, v.97, №9, september, p.1367-1386.

МГУ им. М.И.Ломоносова

Поступила в редакцию
20.06.1998