

УДК 531.36

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ
СИСТЕМ**

Матвийчук К.С.

Կ.Ս. Մատվիչուկ

Պարամետրորեն զրգովող բաշխված համակարգերի տեխնիկական կայունության որոշումը

Հետազոտվում է ոչ գծային սյարամետրորեն զրգովող բաշխված սյուրցանների տեխնիկական կայունությունը վերջավոր, անվերջ ժամանակի հատվածներում, ասինպտոտիկ տեխնիկական կայունությունը հիլբերտյան տարածության մեջ: Օգտագործելով համեմատության մեթոդը Լյապունովի երկրորդ մեթոդի հետ և խրնահամարում օպերատորների համար Ռեյնի հարարկության Էրատրենդ հատկությունների հիմքի վրա հիլբերտյան տարածության մեջ ստացված են տրված համակարգերի տեխնիկական կայունության բավարար պայմաններ:

K.S. Matvichuk

**Definition of the Condition of the Technical Stability of Parametrical Excited
Distributed System**

Исследуется техническая устойчивость на конечном, бесконечном промежутках времени, асимптотическая техническая устойчивость нелинейных параметрически возбуждаемых распределенных процессов в гильбертовом пространстве. С использованием метода сравнения в сочетании со вторым методом Ляпунова и на базе экстремальных свойства отношений Рэлея для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве получены достаточные условия технической устойчивости заданных систем.

Настоящая работа посвящена исследованию технической устойчивости [1-7] параметрически возбуждаемых [8,9] нелинейных распределенных процессов на конечном и бесконечном промежутках времени, асимптотической технической устойчивости. Для решения данной задачи применяются метод сравнения [8,6,10], метод собственных значений в сочетании со вторым методом Ляпунова при использовании экстремальных свойств отношений Рэлея для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве [4,7,10-13].

1. Постановка задачи. Рассмотрим класс динамических процессов, описываемых в области $T_1 \times D$, $T_1 \subset T = [t_0, +\infty)$, $t_0 \geq 0$, $D \subset R^N$,

$x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N$, нелинейными уравнениями в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} &= Z(t, \mu)u(t, x), \quad Z(t, \mu)u(t, x) = L(t)u(t, x) + \\ &+ \mu F[t, x, u(t, x), \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \dots, \mu], \quad x \in D, \quad t \in T_1 \end{aligned} \quad (1)$$

$u(t, x) - 2N$ -мерный вектор состояния, удовлетворяющий краевым условиям

$$Gu(t, x) = 0, \quad x \in C, \quad C - \text{граница } D \quad (2)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x) \quad (3)$$

Вектор-функция $u_0(x)$ имеет частные производные необходимых порядков в $D \subset R^v$; оператор $L(t)$ обозначает $(2N \times 2N)$ -мерную матрицу линейных дифференциальных операторов в частных производных по x с зависящими от t непрерывными коэффициентами; $0 < \mu < 1$; $F = (F_1, \dots, F_{2N})^*$ — нелинейная вектор-функция, непрерывная в заданной ограниченной области изменения своих аргументов и при $u(t, x) = 0$ не обязательно обращается в нуль.

Рассмотрим действительное функциональное пространство H $2N$ -мерных векторов непрерывных функций, определенных в $T_1 \times D$. Определим в H скалярное произведение

$$(v_1, v_2) = \int_D v_1(t, x) v_2(t, x) dx, \quad v_1, v_2 \in H \quad (4)$$

Пусть H расширено так, что оно оказывается гильбертовым [8, 11, 12]; $\|\bullet\|$ — норма в H . Полагаем, что F по x удовлетворяют условию $F \in H$, $\forall \mu \in (0, 1)$. Пусть G — линейный, не зависящий от t оператор в H , действующий в заданной области $Q_G \subset H$, а его замыкание \bar{G} имеет компактную область определения Q_G [11, 12]. Считаем, задача (1)-(3) имеет [5, 9] однозначное непрерывное решение $u(t, x, \mu)$, обладающее в $T_1 \times D, T_1 \times C$ необходимыми производными, входящими в (1)-(3), и принадлежащее со всеми необходимыми производными пространству H . Пусть множество W состояний процесса (1)-(3) есть подмножество пространства H , такое, у которого элементы удовлетворяют граничному условию (2) и другим условиям гладкости, обеспечивающим свойство непрерывности функции $L(t)u$ задачи (1)-(3) [8, 9, 11, 12].

При условиях (2), (3) рассмотрим линейную краевую задачу

$$\partial u(t, x) / \partial t = L(t)u(t, x) \quad x \in D, \quad t \in T_1 \in T \quad (5)$$

Пусть существует решение $\tilde{u}(t, x)$ задачи (5), (2), (3), удовлетворяющее тем же свойствам регулярности, что и $u(t, x, \mu)$ [5, 9]. Тогда решению $\tilde{u}(t, x)$ для каждого t можно сопоставить элемент в W . само $\tilde{u}(t, x)$ образует в W некоторую траекторию, а $L(t)$ есть оператор в H , действующий в области $W \subset H$: $L(t): W \rightarrow H$; $Z(t, x, \mu)$ есть оператор, также действующий из W в H при каждом $\mu \in (0, 1)$: $Z(t, \mu): W \rightarrow H$ [11, 12]. Решение $u(t, x, \mu)$ представляет некоторую траекторию в W , отличающуюся в общем от траектории, соответствующей (5). Пусть существует сопряженный оператор $L^*(t)$ к $L(t)$. Определим меру $\rho(u, v)$

$$\rho(u, v) = \left[(A_0 z, A_0 z) + \sum_{i=1}^n (A_i z, A_i z) \right]^{1/2} \quad u, v \in W \quad (6)$$

где $z = u - v$, A_0 — оператор тождественного преобразования, а A_1, \dots, A_n — линейные дифференциальные операторы в H , действующие в W [8,11]. Задачу (1)-(3) рассматриваем в области:

$$\Omega = \{x, u, \mu, t \in T_1 \subset T, x \in D \subset R^n, \|u\| \leq r = \text{const} > 0, \\ \forall u \in W(T_1 \times I) \subset H, Z(t, \mu) \cdot W \rightarrow H, 0 < \mu < \mu_0 \leq 1\} \quad (7)$$

2. Функционал Ляпунова и соответствующие соотношения. Рассмотрим функционал

$$V[u, t] = (u, B(t)u), \quad u \in W \quad (8)$$

где $B(t) : H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор в смысле [8,11,12]

$$(v, B(t)u) = (u, B(t)v) \quad v, u \in W \quad (9)$$

содержит необходимые дифференциальные элементы по x , дифференцируемый по t , имеет ту же размерность, что и $L(t)$. Пусть $B(t)$ определен так, что

$$V[u, t] \geq \alpha r^2 (u, 0), \quad \forall t \in T_1, \quad \alpha = \text{const} > 0 \quad (10)$$

Пусть определены [5,6,14] значение $V[u_0(x), t_0]$ на начальных данных (3), функция $P(t, \mu)$ и постоянная \bar{a} , удовлетворяющие условиям

$$P(t_0, \mu) \geq \bar{a}, \quad 0 < P(t, \mu) \leq \bar{C}, \quad \bar{C} = \text{const} > 0, \quad \forall t \in T_1, \quad \mu \in (0, 1) \quad (11)$$

Пусть ограниченный оператор $N(t) : W \rightarrow H$ равен $N(t) = L(t)B(t) + B(t)L(t) + \dot{B}(t)$, где $\dot{B}(t) = d[B(t)]/dt$. Полагаем, что имеет место задача о собственных значениях [7,8]

$$N(t)u = \lambda B(t)u, \quad u \in W, \quad t \in T_1 \quad (12)$$

собственные значения которой являются вещественными ограниченными величинами $\lambda_{\alpha}(t)$ для всех $t \in T_1$, при этом t рассматривается лишь как параметр. Обозначим $\lambda_{\max}(t)$ наибольшее собственное значение (12).

Пусть задана область $\Lambda = \{z, \lambda_{\max}(t), \mu : t \in T_1 \subset T, -\infty < z < \infty, \\ \lambda_{\max}(t) \leq b, b = \text{const} > 0, 0 < \mu < \mu_0 \leq 1\}$, в которой рассмотрим задачу Коши сравнения [5,6,10]. Обозначим $F(t, \mu), \bar{F}(t, \bar{\mu})$ вдоль решений задач (1)-(3) и (5), (2), (3) соответственно.

3. Условия технической устойчивости системы. Для (1)-(3) имеем следующие свойства.

Теорема. Пусть справедливы условия 1. Для краевых задач (1)-(3) и (5), (2), (3), где при вышеуказанных свойствах регулярности их коэффициентов операторы $Z(t, \mu), L(t)$ есть операторы в H , действующие в области $W \subset H$, существуют решения с вышеуказанными свойствами 2. Существует положительно определенный относительно меры $\rho(u, 0)$ функционал $V[u, t] = (u, B(t)u)$, порожденный заданным оператором $B(t) : H \rightarrow H$. 3. Для $L(t)$

существует сопряженный оператор $L^*(t)$, удовлетворяющий при $\forall v, w \in W$ условию

$$(L(t)v, B(t)w) = (v, L^*(t)B(t)w) \quad (13)$$

4. В задаче (12) оператор $B^{-1}(t)N(t)$ является компактным при $t \in T_1 \subset T$. 5. Существуют постоянные $C_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ и значение $\mu_1 > 0$, удовлетворяющее условию $[\mu - \bar{\mu}] < \mu_1$, неотрицательные, непрерывные на $T_1 \subset T$ функции $f_i(t)$, ($i = 1, 2, 3$), $\gamma(t)$, для которых справедливы неравенства:

а) $\|u(t, x, \mu) - \bar{u}(t, x)\| \|N(t)[u(t, x, \mu) - \bar{u}(t, x)]\| \leq C_1 f_1(t)$

б) $2\|\mu F(t, \mu) - \bar{\mu} \bar{F}(t, \bar{\mu})\| \|B(t)u(t, x, \mu)\| \leq C_2 f_2(t)$

в) $\|\bar{F}(t, \bar{\mu})\| \|B(t)u(t, x, \mu)\| \leq C_3 f_3(t)$

г) $|V[\bar{u}(t, x), t] - V[u(t, x), t]| \leq C_4 \gamma(t)$

6. В области Λ существует скалярная задача Коши сравнения $dy/dt = \lambda_{\max}(t)[y + \sigma(t, \mu)]$, $t \in T_1$ (14)

$$y(t_0) = y_0 \geq V[u_0(x), t_0]; \quad \sigma(t, \bar{\mu}) = \int_{t_0}^t [C_4 b \bar{\gamma}(\tau) + f_3(\tau, \bar{\mu})] d\tau$$

$$f_3(t, \bar{\mu}) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + 2\mu C_3 f_3(t) \quad (15)$$

решение которой $\bar{y}(t) = y(t, t_0, y_0)$ определено при $t \in T_1$ и удовлетворяет неравенствам

$$\bar{y}(t) + \sigma(t, \bar{\mu}) \leq P(t, \mu), \quad t \in T_1, \quad y_0 \leq \bar{a} \quad (16)$$

Тогда: 1. Процессы, описываемые задачей (1)-(3) в H , технически устойчивы в области Ω на промежутке времени T_1 . 2. Если условия теоремы справедливы на каждом интервале $T_1 \subseteq T$, тогда процессы (1)-(3) технически устойчивы в области Ω на бесконечном промежутке времени T . 3. Если функции $\bar{y}(t)$, $\sigma(t, \mu)$ удовлетворяют условию

$$\bar{y}(t) + \sigma(t, \bar{\mu}) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad \mu \in (0, \mu_0) \quad (17)$$

то процессы (1)-(3) асимптотически технически устойчивы в области Ω .

Доказательство. Вычислим $dV(t)/dt$ вдоль решения задачи (1)-(3)

$$dV(t)/dt = (u, N(t)u) + 2\mu(F(t, \mu), B(t)u) \quad (18)$$

$$N(t) = L^*(t)B(t) + B(t)L(t) + \dot{B}(t) \quad (18)$$

Задача (12) связана с линейной краевой задачей (5), (2), (3). Используя величины $(\bar{u}(t, x), N(t)\bar{u}(t, x))$, $\bar{\mu}(F(t, \bar{\mu}), B(t)\bar{u}(t, x))$, для (8) получаем неравенство

$$dV(t)/dt \leq (\bar{u}(t, x), N(t)\bar{u}(t, x)) + \|u(t, x, \mu) - \bar{u}(t, x)\| \|N(t)[u(t, x, \mu) - \bar{u}(t, x)]\| +$$

$$+ 2\|\mu F(t, \mu) - \bar{\mu} \bar{F}(t, \bar{\mu})\| \times \|B(t)u(t, x, \mu)\| + 2\bar{\mu} \|\bar{F}(t, \bar{\mu})\| \|B(t)u(t, x, \mu)\| \quad (19)$$

Из (19) и условий теоремы вдоль решения (1)-(3) имеем

$$dV(t)/dt \leq (\tilde{u}(t, x), N(t)\tilde{u}(t, x)) + f_3(t, \tilde{\mu}) \quad t \in T \quad (20)$$

Убеждаемся, что $N(t)$ – самосопряженный оператор в смысле (9).

Тогда задача (12) имеет вещественные собственные значения. Согласно условиям 4 теоремы задача (12) при всех $t \in T_1 \subset T$ имеет ограниченные собственные значения, то есть $\lambda_{\max}(t)$ – ограниченная действительная величина [12,14,15]. Собственные векторы задачи (12) образуют полную систему в W . Находим неравенство [7,8,12,14]

$$(u, N(t)u)/(u, B(t)u) \leq \lambda_{\max}(t), \quad t \in T_1 \subset T; \quad u \in W \subset H, \quad \text{где имеем}$$

$|\lambda_{\max}(t)| \leq b$. Отсюда вместо (20) получаем оценку

$$dV(t)/dt \leq \lambda_{\max}(t)V(t) + C_4 b \gamma(t) + f_3(t, \mu) \quad (21)$$

Из (21) [5,6,10] следует задача Коши сравнения (14), (15), порожденная операторами $Z(t)$, $L(t)$, $B(t)$. Используя при $\forall t \in T_1$ решение задачи (14), (15)

$$\bar{y}(t) = y_0 \exp \left[\int_{t_0}^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau \right] + \exp \left[\int_{t_0}^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau \right] \times$$

$$\times \int_{t_0}^t \left\{ f(t, \tilde{\mu}) \exp \left[- \int_{t_0}^t \lambda_{\max}(s) ds \right] \right\} dt - \sigma(t, \tilde{\mu}), \quad f(t, \tilde{\mu}) = C_4 b \gamma(t) + f_3(t, \tilde{\mu}),$$

по теореме о дифференциальных неравенствах из [10] вдоль решения $u(t, x, \mu)$ краевой задачи (1)-(3) для $V[u, t]$ (8) находим оценку $V[u(t, x, \mu), t] \leq \bar{y}(t) + \sigma(t, \tilde{\mu})$, $\forall t \in T_1$. Используя условия (16) теоремы, получаем неравенства

$$V[u(t, x, \mu), t] \leq P(t, \mu), \quad V[u_0(x), t_0] \leq \bar{a}, \quad \forall t_0, t \in T_1 \quad (22)$$

откуда следует, что при условиях теоремы возмущенная траектория из Ω процессов (1)-(3) будет находиться от невозмущенной $u(t, x, \mu) \equiv 0$ при $\forall t \in T_1$ на "расстоянии", не превышающем по величине пределов, определяемых вперед заданными функцией $P(t, \mu)$, постоянной \bar{a} . Неравенства (22) характеризуют заданную мерой $\rho(u, 0)$ окрестность $\rho(u, 0) \leq \bar{C}$, $\bar{C} = \text{const} > 0$ невозмущенного процесса, где \bar{C} определяется первым неравенством из (22). Два последних утверждения теоремы доказываются очевидным образом с незначительными изменениями. На этом доказательство теоремы завершено.

4. Техническая устойчивость нелинейных состояний стойки при параметрическом возбуждении. Рассматриваем в гильбертовом пространстве нелинейную краевую задачу о поперечных колебаниях вертикально расположенной стойки, шарнирно закрепленной в основаниях и нагруженной переменной во времени продольной

возбуждающей силой $f(t)$. Эту задачу представим в операторной форме, используя результаты из [8, 14]

$$\begin{aligned} \partial u(t, x) / \partial t &= Z(t, \mu)u(t, x), \quad Z(t, \mu)u(t, x) = \\ &= L(t)u(t, x) + \mu F(t, u_1^2(t, x), u_2^1(t, x)) \end{aligned} \quad (23)$$

$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial^4 / \partial x^4 - f(t)\partial^2 / \partial x^2 & -\beta \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ [-u_1^2(t, x)]u_2^1(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mu \in (0, 1)$$

$$u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))^T, \quad u_1(t, x) = w(t, x), \quad u_2(t, x) = \partial u_1(t, x) / \partial t$$

$$u(t, x) \Big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x) = (w_0(x), v_0(x))^T \quad (24)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad \partial^2 u(t, 0) / \partial x^2 = \partial^2 u(t, 1) / \partial x^2 = 0 \quad (25)$$

Совместно с задачей (23)-(25) рассмотрим линейную задачу при (24), (25):

$$\partial u(t, x) / \partial t = L(t)u(t, x) \quad (26)$$

где $w(t, x)$ — поперечные смещения точек осевой линии стойки; $w_0(x), v_0(x)$ — четырежды непрерывно дифференцируемые функции по $x \in D \equiv [0, 1]$, $T = [0, \bar{T}, \mu^{-1}]$ ($\bar{T} = \text{const} > 0$) — заданный промежуток времени; $T \subset I = [t_0, \infty)$. Для $f(t)$ возможен гармонический закон изменения [8]

$$f(t) = 4\pi^2 (R_0 + R_t \cos \omega t), \quad R_0 = P_0 l^2 / 4\pi^2 E \bar{I}, \quad R_t = P_t l^2 / 4\pi^2 E \bar{I}, \quad P_0 -$$

постоянная составляющая сжимающей силы; P_t — постоянная амплитуда пульсирующей составляющей продольной силы; l — длина стойки; E — модуль Юнга; \bar{I} — момент инерции поперечного сечения стойки относительно ее оси, проходящей через ее центр масс; β — коэффициент демпфирования; $\mu \in (0, 1)$. Для $f(t)$ могут быть и другие представления.

Считаем, что краевая задача (23)-(25) имеет однозначное непрерывное решение $w(t, x, \mu)$ в области $T \times D$ при $\mu \in (0, 1)$, обладающее в $T \times D$ согласно (23)-(25) необходимыми непрерывными производными и принадлежащее вместе с указанными производными вещественному гильбертовому пространству $L^2(D)$. Относительно решения $w(t, x)$ линейной задачи (26), (24), (25) допускаем аналогичные свойства.

Рассмотрим гильбертово пространство \bar{H} векторов $\{u_1(t, x), u_2(t, x)\}$ с непрерывными функциями $u_1(t, x), u_2(t, x)$ при $t \in T, x \in D$, для которых [14]

$$(u, v) = \int_D \sum_{i=1}^2 u_i(t, x) v_i(t, x) dx, \quad u, v \in \bar{H}$$

Задачу (23)-(25) рассмотрим в области

$$\Omega = \{x, u, \partial u_1 / \partial t, \partial^2 u_1 / \partial t^2, \partial u_1 / \partial x, \dots, \partial^4 u_1 / \partial x^4, f(t), \mu : t \in T, x \in D,$$

$$\|u_1\|_2 \leq b_1, \|\partial u_1 / \partial t\|_2 \leq b_2, \|\partial^2 u_1 / \partial t^2\|_2 \leq b_3, \|\partial u_1 / \partial x\|_2 \leq c_1, \dots,$$

$$\|\partial^4 u_1 / \partial x^4\|_2 \leq c_4, |f(t)| \leq c_5, b_i = \text{const} > 0, (i = 1, 2, 3), c_j = \text{const} > 0,$$

($j = 1, 2, 3, 4, 5$), $\mu \in (0, 1)$. В качестве меры $\rho(u, 0)$ в $\tilde{W} \subset \bar{H}$, где \tilde{W} аналогично [14], положим

$$\rho(u, 0) = \left\{ \int_0^t \left[(\partial^2 w / \partial x^2)^2 + (\partial w / \partial x)^2 + w^2 + v^2 \right] dx \right\}^{1/2} \quad (27)$$

Сопряженный оператор $L^*(t)$ к $L(t)$ имеет представление

$$L^*(t) = \begin{pmatrix} 0 & (\partial^4 / \partial x^4) - f(t)(\partial^2 / \partial x^2) \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \quad (28)$$

При условиях [8, 14] рассмотрим функционал

$$V[u, t] = (u, B(t)u), \quad B(t) = \begin{pmatrix} (\partial^4 / \partial x^4) + \gamma(t)(\partial^2 / \partial x^2) + \alpha_1 + \beta^2 / 4 & \beta / 2 \\ \beta / 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

($\gamma(t)$ — некоторый коэффициент, непрерывно дифференцируемый по $t \in T$; α_1 — некоторый постоянный параметр), который будет определенно положительным относительно меры $\rho(u, 0)$ при условиях

$$\begin{cases} 0 < \tilde{\mu} < 1, (1 - \tilde{\mu})4\pi^2 - (\tilde{\mu} + \varepsilon) > \gamma(t) \\ \alpha_1 > \tilde{\mu} - \beta^2 / 4 - \varepsilon\pi^2 + \beta^2 / [4(1 - \tilde{\mu})], \varepsilon = \text{const} > 0 \end{cases} \quad (30)$$

$\tilde{\mu}$ — фиксированное значение параметра $\mu \in (0, 1)$. Находим:

$$N(t) = \begin{pmatrix} -\beta(\partial^4 / \partial x^4) - h(t)(\partial^2 / \partial x^2) & -g(t)(\partial^2 / \partial x^2) + \delta_- \\ -g(t)(\partial^2 / \partial x^2) + \delta_- & -\beta \end{pmatrix}$$

$$h(t) = \beta f(t) - d\gamma(t) / dt, \quad g(t) = f(t) - \gamma(t), \quad \delta_{\pm} = \alpha_1 \pm \beta^2 / 4 \quad (31)$$

Имеем задачу о собственных значениях при (29)-(31):

$$N(t)y = \lambda B(t)y, \quad y = (y_1, y_2) \in W, \quad t \in T \quad (32)$$

Уравнение (32) сведем к уравнению для одной компоненты y_1 :

$$\partial^4 y_1 / \partial x^4 + k(t)(\partial^2 y_1 / \partial x^2) + c(t)y_1 = 0 \quad (33)$$

$$k(t) = \{(\lambda + \beta)[\beta f(t) - \dot{\gamma}(t) + \lambda \gamma(t)] + 2[f(t) - \gamma(t)](\delta_- - \lambda \beta / 2)\} \{(\lambda + \beta)^2 - [f(t) - \gamma(t)]^2\}^{-1}, \quad c(t) = [\lambda(\lambda + \beta)\delta_+ - (\delta_- - \lambda \beta / 2)^2] \{(\lambda + \beta)^2 - [f(t) - \gamma(t)]^2\}^{-1}$$

при следующих граничных условиях:

$$y_1(t,0) = y_1(t,1) = 0, \quad \partial^2 y_1(t,0) / \partial x^2 = \partial^2 y_1(t,1) / \partial x^2 = 0 \quad (34)$$

Соответствующее уравнению (33) характеристическое уравнение имеет корни

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 = +i(k/2 + \sqrt{k^2/4 - c})^{1/2}, \quad \tilde{r}_2 = -i(k/2 + \sqrt{k^2/4 - c})^{1/2} \\ \tilde{r}_3 = +i(k/2 - \sqrt{k^2/4 - c})^{1/2}, \quad \tilde{r}_4 = -i(k/2 - \sqrt{k^2/4 - c})^{1/2} \end{aligned} \quad (35)$$

Рассмотрим только случай, когда $k(t) > 0, \forall t \in T$. При этом получаем две последовательности собственных функций [8]:

а) при $c > 0, k^2 > 4c$

$$y_1(t, x) = C_1(t) \sin r_1 x + C_2(t) \cos r_1 x + C_3(t) \sin r_2 x + C_4(t) \cos r_2 x \quad (36)$$

если справедливо условие

$$(r_1^4 + r_2^4 - 2r_1^2 r_2^2) \sin r_1 \sin r_2 = 0, \quad r_{1,2} = (k/2 \pm \sqrt{k^2/4 - c})^{1/2} \quad (37)$$

б) при $c < 0, k^2 > 4c$

$$y_1(t, x) = C_1(t) \sin r_1 x + C_2(t) \cos r_1 x + C_3(t) \operatorname{shr}_2 x + C_4(t) \operatorname{chr}_2 x \quad (38)$$

если справедливо условие

$$(r_1^4 + r_2^4 + 2r_1^2 r_2^2) \sin r_1 \operatorname{shr}_2 = 0, \quad r_{1,2} = (\pm k/2 + \sqrt{k^2/4 - c})^{1/2} \quad (39)$$

Для максимального собственного значения $\lambda_{\max}(t)$ имеем

$$\lambda_{\max}(t) = \max_{k_n} \left\{ \begin{aligned} & -\beta - \dot{\gamma}(t) / 2 [k_n - \gamma(t)] + \left[\dot{\gamma}(t) / 2 [k_n - \gamma(t)] \right]^2 + \left[2[f(t) - \right. \\ & \left. - \gamma(t)] (\alpha_1 + (\beta/2)) / (k_n - \gamma(t)) [f(t) - \gamma(t)]^2 / (1 - \gamma(t) / k_n) \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} \\ n = 1, 2, \dots, \quad \forall t \in T \quad (40)$$

Используя равенство

$$c_n (\lambda + \beta)^2 - [4c_n / \gamma^2(t)] \beta_+^2 = \alpha_1 (\lambda + \beta)^2 - \delta_+^2 \quad (41)$$

убеждаемся [14], что $k_n \neq \gamma$ при любом целом $n, \forall t \in T$. Должно выполняться для $\forall k_n$ условие

$$k_n > (1 - \tilde{\mu}) 4\pi^2 - (\tilde{\mu} + \varepsilon), \quad n = 1, 2, \dots \quad (42)$$

при каждом $t \in T$ совместно с условиями (37) или (39). Если $k_n \rightarrow \infty$, то величина λ стремится к пределу $\lambda_\infty = -\beta + [f(t) - \gamma(t)]$. Значение $\lambda_n = 0$ отсутствует [8, 11, 12]. Имеет смысл величина $A = \sup_{t \in T} |\lambda_{\max}(t)|$, зависящая от условий (37) (или (39)) и (42). Собственные векторы в (32) [8, 14] образует полную систему в $\bar{W} \subset \bar{H}$. Используем величины

$$M(t, x, \mu) = [1 - w^2(t, x, \mu)] [\partial w(t, x, \mu) / \partial t]^3 w(t, x, \mu);$$

$$\xi(t, \mu) = V[\bar{u}(t, x) - u(t, x, \mu), t] \quad |\xi(t, \mu)| \leq k = \text{const} > 0;$$

$\bar{M}_1(t, x) = [1 - w^2(t, x)] [\partial v(t, x) / \partial t] w(t, x)$. Вдоль решения задачи (23)-(25)

в Ω имеем $dV[u(t, x, \mu), t] / dt \leq \lambda_{\max}(t) V[u(t, x, \mu), t] + \bar{\mu} \bar{f}_1(t) + R$;

$$\bar{f}_1(t) = (1 + \beta/2) \|\bar{M}_1(t)\|_2, \quad R = (\mu - \bar{\mu} + 2\bar{\mu})(\beta/2 + 1)(1 + b_1^2) b_1 b_2^3 + A \bar{k}.$$

Рассмотрим при $t \in [0, \bar{L}\bar{\mu}^{-1}] \equiv T_1$ уравнение сравнения

$$dz/dt = \lambda_{\max}(t) [z + \sigma(t, \bar{\mu})], \quad \sigma(t, \bar{\mu}) = \int_0^t [\bar{\mu}(1 + \beta/2) \bar{M}_1(\tau)]_2 + R] d\tau \quad (43)$$

$$z(0) = z_0, \quad z_0 \geq V(u_0(x), 0), \quad z_0 \leq \bar{a} = \text{const} > 0 \quad (44)$$

Согласно [10] вдоль решения задачи (23)-(25) из (43), (44) находим

$$V[w(t, x, \mu), (\partial w(t, x, \mu) / \partial t), t] \leq \exp \left[\int_0^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau \right] \bar{a} + \int_0^t \left\{ (\bar{\mu} \bar{f}_1(\tau) + R) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[\int_0^\tau \lambda_{\max}(\tau) d\tau \right] \right\} d\tau \equiv P(t, \mu), \quad t \in \bar{T} = [0, \bar{L}\bar{\mu}^{-1}] \cap [0, \bar{L}\bar{\mu}^{-1}] \quad (45)$$

Следовательно, окончательно в области Ω при $t \in \bar{T}$ имеем неравенство

$$V[w(t, x, \mu), (\partial w(t, x, \mu) / \partial t), t] \leq K, \quad t \in \bar{T} = [0, \bar{L} < \bar{\mu}^{-1}], \quad \bar{\mu}^{-1} = \min \{ \bar{\mu}^{-1}, \bar{\mu}^{-1} \}$$

$$K = \exp(A \bar{L} \bar{\mu}^{-1}) \left\{ \bar{a}_0 + \bar{L} \bar{\mu}^{-1} [\bar{\mu}(1 + \beta/2)(b_1 + b_1^3) b_2^3 + R] \right\} \quad (46)$$

Из доказанной теоремы следует техническая устойчивость системы (23)-(25) в \bar{T} . Если оценки (45)-(46) выполняются при всех $\bar{T} \subseteq I$, то процессы (23)-(25), заданные при всех $\bar{T} \subseteq I$, технически устойчивы в I . Достаточное условие асимптотической технической устойчивости будет выполнено, если дополнительно справедливо: $\bar{z}(t) + \sigma(t, \bar{\mu}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, $\mu, \bar{\mu} \in (0, 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Албгарян К.А. Устойчивость движения на конечном интервале времени. - Итоги науки и техники. Общая механика. - М.: ВИНТИ, 1976, т.3, с.43-47.
2. Байрамов Ф.Д. О технической устойчивости систем с распределенными параметрами при постоянно действующих возмущениях. - Изв.Вузов. Авиац.техника, 1974, вып.2, с.5-11.

3. Гарашенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Исследование задач по практической устойчивости и стабилизации движения. - МТТ, 1975, №6, с.15-24.
4. Зубов В.И. Методы А.М.Ляпунова и их применение. - Л.: Ленинград, ун-т, 1957. 241 с.
5. Матвийчук К.С. О методе сравнения для дифференциальных уравнений, близких к гиперболическим. - Дифференц.уравнения, 1984, т.20, с.2009-2011.
6. Матвийчук К.С. О технической устойчивости движения панели в газовом потоке. - Прикл.механика и техн.физика, 1988, №6, с.93-99.
7. Diaz J.B., Metcalf F.T. A Functional Equation for Rayleigh Quotient Eigenvalues and Some Application. - J.Math.and Mech., 1968, v.17, '7, p.623-630.
8. Hsu C.S., Lee T.H. A Stability Study of Continuous Systems under Parametric Excitations Via Liapunov's Direct Method. - In: IUT Symposium on Instability of Continuous Systems. West Germany, 1969. - Berlin: Springer, 1971, p.112-118.
9. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. - Новосибирск: Наука, 1987. 232 с.
10. Szarski J. Differential Inequalities. - Warszawa. PWN, 1967. 256 p.
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1981. 543 с.
12. Иосада К.Ф. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1967. 624 с.
13. Кириченко Р.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. - Киев: Вища школа, 1978. 212 с.
14. Матвийчук К.С. Техническая теория параметрически возбуждаемых панелей в газовом потоке. - Изв. АН СССР. МТТ, 1990, №4, с.122-131.
15. Скоробогатько В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. - Киев: Наукова думка, 1980. 243 с.

Институт механики им.
С.П.Тимошенко НАН Украины

Поступила в редакцию
20.01.1998