ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №3, 1999 Механика
УДК 539.3

ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Агабекян П.В., Агаян К.Л.

Պ.Վ. Աղաբեկյան, Կ.Լ. Աղայան

Առաձգական կիսահարթության եզրին դրված կտոր-առ-կտոր համասեռ անվերջ հեծանի ծռումը

Դիտարկվում է առաձգական կիսահարթության վրա դրված, երկու տարբեր կիսաանվերջ մասերից բաղկացած, անվերջ հեծանի ծռման կոնտակտային խնդիրը: Ֆուրյեի ընդհանրացված ձևափոխության և ֆակտորիզացիայի մեթոդի օգնությամբ կառուցված է խնդրի փակ լուծումը:

P.V. Agabekyan, K.L. Agayan

Bending of an Infinite Non-homogeneous Beam, Lying on an Elastic Half-plane

Рассматривается контактная задача об изгибе бесконечной балки, состоящей из двух разных полубесконечных частей, лежащей на границе упругой полуплоскости. При помощи обобщенного преобразования Фурье и метода факторизации построено замкнутое решение задачи.

Рассматривается контактная задача для упругой полуплоскости, граница которой вдавливается бесконечной кусочно-однородной балкой, с модулем упругости $E(x)=E_1\theta(-x)+E_2\theta(x)$, где $\theta(x)$ – функция Хевисайда. Исследование ведется без учета касательных контактных напряжений и без учета явления отрыва балки от границы упругой полуплоскости. Задача с помощью обобщенного преобразования Фурье сводится к решению функционального уравнения на действительной оси. Строится замкнутое решение задачи.

Рассмотренная здесь задача относится к достаточно хорошо изученной области теории контактных задач о взаимодействии тонкостенных элементов в виде балок, плит и накладок с линейно-деформируемыми основаниями. Не останавливаясь на подробностях, которые можно найти в [1], укажем лишь работы [2-6], тесно связанные с изучаемой здесь задачей. В [2, 3] получено замкнутое решение задач об изгибе бесконечной кусочно-однородной и полубесконечной плиты на упругом полупространстве. В [4] и [5] построено замкнутое решение задач о контактном взаимодействии бесконечной кусочно-однородной накладки и полубесконечной балки с упругой полуплоскостью. В [6] рассмотрена та же задача для полосы, что и в [5], но с учетом касательных контактных напряжений. Здесь решение задачи сведено к системе фредгольмовских интегральных уравнений второго рода, допускающее решение методом последовательных приближений.

Пусть кусочно-однородная бесконечная балка вдавливается на границу упругой полуплоскости с помощью сил $P\delta(x+a)$ и $Q\delta(x-b)$, приложенных на балку. Ось Ox направлена по границе полуплоскости, а

Oy – по ее внутренней нормали. Тогда для двух полубесконечных частей балки будем иметь уравнения

$$D_1 \frac{d^4 v}{dx^4} = P\delta(x+a) - q(x), \qquad -\infty < x < 0$$

$$D_2 \frac{d^4 v}{dx^4} = Q\delta(x-b) - q(x), \qquad 0 < x < \infty \tag{1}$$

при условиях

$$v(-0) = v(+0), \quad v'(-0) = v'(+0)$$

$$D_1 \frac{d^2 v}{dx^2}\bigg|_{x=-0} = D_2 \frac{d^2 v}{dx^2}\bigg|_{x=+0}$$

$$D_1 \frac{d^3 v}{dx^3}\bigg|_{x=-0} = D_2 \frac{d^3 v}{dx^3}\bigg|_{x=+0} \tag{1'}$$

где $v(x)$ – вертикальные перемещения балки, $q(x)$ – интенсивность нормальных контактных напряжений, $D_1 = E_1 J_z$, $D_2 = E_2 J_z$, J_z – момент инерции относительно оси Oz, перпендикулярной к плоскости xoy.

Введем функции

$$A^{\pm}(x) = \theta(\pm x)A(x), \quad \overline{A}^{\pm}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} A^{\pm}(x) e^{i\sigma x} dx$$

$$A^{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{A}^{\pm}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда. В дальнейшем функции типа $A^{+}(x)$ будем называть $(+)$функцией, $A^{-}(x)$ – $(-)$функцией. Причем известно, что $F^{-1}\left[\overline{A}^{+}(\sigma)\overline{B}^{+}(\sigma)\right]$ является $(+)$ функцией, а $F^{-1}\left[\overline{A}^{-}(\sigma)\overline{B}^{-}(\sigma)\right]$ – $(-)$функцией. Здесь F – прямое, а F^{-1} – обратное преобразование Фурье.

Введем еще функцию $V(x) = \theta(-x)\dfrac{dv}{dx} + \theta(x)\dfrac{dv}{dx}$. Применив к $V(x)$ операцию дифференцирования в смысле теории обобщенных функций, из (1) при помощи условий (1) получим

$$\frac{d^3 V}{dx^3} = -\frac{1}{D_1} q^{-}(x) - \frac{1}{D_2} q^{+}(x) + a_0\delta(x) + a_1\delta'(x) +$$
$$+ \frac{P}{D_1}\delta(x+a) + \frac{Q}{D_2}\delta(x-b), \quad (-\infty < x < \infty) \tag{2}$$

Здесь $\dfrac{d^2 v}{dx^2}\bigg|_{x=+0} - \dfrac{d^2 v}{dx^2}\bigg|_{x=-0} = a_1$

где $a_1 = \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1}\right) M_0$,

M_0 – изгибающий момент в точке $x = 0$,

$$\left.\frac{d^3 v}{dx^3}\right|_{x=+0} - \left.\frac{d^3 v}{dx^3}\right|_{x=-0} = a_0$$

где $a_0 = \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1}\right) Q_0$

Q_0 –перерезывающая сила при $x = 0$.

Условия равновесия балки запишутся в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(x)dx = P + Q, \quad \int_{-\infty}^{\infty} xq(x)dx = bQ - aP \tag{3}$$

Далее, применив в (2) обобщенное преобразование Фурье, будем иметь

$$i\sigma^3 \overline{V}(\sigma) = -\frac{1}{D_1}\overline{q}^-(\sigma) - \frac{1}{D_2}\overline{q}^+(\sigma) + a_0 - i\sigma a_1 + \frac{P}{D_1}e^{-i\sigma a} + \frac{Q}{D_2}e^{i\sigma b} \tag{4}$$

С другой стороны, для граничных точек упругой полуплоскости имеем

$$\frac{du_2(x,0)}{dx} = \frac{1-\nu}{\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q(s)}{s-x}ds, \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{5}$$

где $u_2(x,0)$ – вертикальные перемещения граничных точек упругой полуплоскости, μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона упругой полуплоскости. Условие контакта между балкой и полуплоскостью имеет вид

$$\frac{du_2(x,0)}{dx} = V(x), \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{6}$$

Применив к (5) и (6) преобразование Фурье, при этом имея в виду теорему о свертке, получим

$$\overline{V}(\sigma) = -\frac{(1-\nu)i\,\mathrm{sgn}(\sigma)}{\mu}\overline{q}(\sigma) \tag{7}$$

где $\overline{q}(\sigma) = \overline{q}^+(\sigma) + \overline{q}^-(\sigma)$. Далее, подставив (7) в (4), получим искомое разрешающее функциональное уравнение.

$$\left(\lambda_1^3 + |\sigma|^3\right)\overline{q}^-(\sigma) + \left(\lambda_2^3 + |\sigma|^3\right)\overline{q}^+(\sigma) = \bar{f}(\sigma), \qquad (-\infty < \sigma < \infty) \tag{8}$$

где

$$\lambda_1 = \left[\mu/(1-\nu)D_1\right]^{1/3}, \quad \lambda_2 = \left[\mu/(1-\nu)D_2\right]^{1/3}$$

$$\bar{f}(\sigma) = \lambda_1^3 P e^{-i\sigma b} + \lambda_2^3 Q e^{i\sigma b} + \frac{\mu}{1-\nu}(a_0 - i\sigma a_1)$$

Таким образом, задача свелась к решению функционального уравнения (8). Для решения этого уравнения запишем его заново в виде

$$\overline{K}(\sigma)\overline{q}^+(\sigma) + \overline{q}^-(\sigma) = \bar{f}_1(\sigma), \qquad (-\infty < \sigma < \infty) \tag{9}$$

где

$$\overline{K}(\sigma)=\frac{\lambda_2^3+|\sigma|^3}{\lambda_1^3+|\sigma|^3}, \quad \bar{f}_1(\sigma)=\frac{\bar{f}(\sigma)}{\lambda_1^3+|\sigma|^3}$$

Теперь приступим к решению уравнения (9) [5,7]. Для этого факторизуем $\overline{K}(\sigma)$, представив ее в виде

$$\overline{K}(\sigma)=\overline{K}^{-}(\sigma)\overline{K}^{-}(\sigma) \tag{10}$$

где $\overline{K}^{+}(\sigma)$ является преобразованием Фурье $(+)$функции, а $\overline{K}^{-}(\sigma)$ – $(-)$функции. Причем

$$\overline{K}^{+}(\sigma)=\exp\left(\overline{R}^{+}(\sigma)\right), \quad \overline{K}^{-}(\sigma)=\exp\left(\overline{R}^{-}(\sigma)\right)$$

$$\overline{R}^{+}(\sigma)=\int_0^{\infty}R(z)e^{i\sigma z}dz, \quad \overline{R}^{-}(\sigma)=\int_{-\infty}^{0}R(z)e^{i\sigma z}dz$$

$$R(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\frac{\lambda_2^3+|\sigma|^3}{\lambda_1^3+|\sigma|^3}\right)e^{-i\sigma z}d\sigma, \quad -\infty<z<\infty$$

Заметим, что из абсолютной интегрируемости $R(z)$ следует, что $\overline{R}^{\pm}(\sigma)\to 0$ при $|\sigma|\to\infty$ и $\left(\overline{K}^{-}(\sigma)\right)^{-1}$ тоже является преобразованием Фурье $(-)$ функций. Следовательно, $K^{\pm}(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$.

Далее, имея в виду (10), уравнение (9) запишем в виде

$$\overline{K}^{+}(\sigma)\overline{q}^{+}(\sigma)+\frac{\overline{q}^{-}(\sigma)}{\overline{K}^{-}(\sigma)}=\frac{\bar{f}_1(\sigma)}{\overline{K}^{-}(\sigma)} \tag{11}$$

Представим $\bar{f}_1(\sigma)/\overline{K}^{-}(\sigma)$ в виде

$$\frac{\bar{f}_1(\sigma)}{\overline{K}^{-}(\sigma)}=\overline{\varphi}^{+}(\sigma)+\overline{\varphi}^{-}(\sigma), \quad (-\infty<\sigma<\infty) \tag{12}$$

где

$$\overline{\varphi}^{+}(\sigma)=\int_0^{\infty}\varphi(u)e^{i\sigma u}du, \quad \overline{\varphi}^{-}(\sigma)=\int_{-\infty}^{0}\varphi(u)e^{i\sigma u}du$$

$$\varphi(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{f}_1(\sigma)}{\overline{K}^{-}(\sigma)}e^{i\sigma u}d\sigma$$

Заметим, в котором нетрудно убедиться, что $\varphi(u)$ является абсолютно интегрируемой функцией, то есть $\overline{\varphi}^{\pm}(\sigma)\to 0$ при $|\sigma|\to\infty$.

Имея в виду (12), уравнение (11) запишется в виде

$$\overline{M}^{+}(\sigma)=\overline{K}^{+}(\sigma)\overline{q}^{+}(\sigma)-\overline{\varphi}^{+}(\sigma)=\overline{\varphi}^{-}(\sigma)-\frac{\overline{q}^{-}(\sigma)}{\overline{K}^{-}(\sigma)}=\overline{L}^{-}(\sigma), \quad (-\infty<\sigma<\infty) \tag{13}$$

Из уравнения (13) следует, что $\overline{M}^{+}(x)$ и $\overline{L}^{-}(x)$ являются обобщенными функциями, сосредоточенные в нулевой точке, причем [8]

$$M^{+}(x)=L^{-}(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\delta^{(k)}(x) \tag{14}$$

где $\delta^{(0)}(x)=\delta(x)$, а $\delta^{(\kappa)}(x)$ – производные функции Дирака $\delta(x)$.
Применив к (14) обобщенное преобразование Фурье, получим

$$\overline{M}^{+}(\sigma)=\overline{L}^{-}(\sigma)=\sum_{k=0}^{n} b_k\sigma^k$$

то есть

$$\overline{K}^{+}(\sigma)\overline{q}^{+}(\sigma)-\overline{\varphi}^{+}(\sigma)=\sum_{k=0}^{n} b_k\sigma^k$$

$$\overline{\varphi}^{-}(\sigma)-\frac{\overline{q}^{-}(\sigma)}{\overline{K}^{-}(\sigma)}=\sum_{k=0}^{n} b_k\sigma^k \qquad (15)$$

Если учесть, что $\overline{q}^{\pm}(\sigma)\to 0$ при $|\sigma|\to\infty$ (из абсолютной интегрируемости $q(x)$) и поведения функций $\overline{K}^{\pm}(\sigma)$, $\overline{\varphi}^{\pm}(\sigma)$ при $|\sigma|\to\infty$, будем иметь, что $b_k=0$ $(k=0,1,\dots,n)$. Тогда, как следует из (15), искомое решение задачи будет иметь вид

$$\overline{q}^{+}(\sigma)=\overline{\varphi}^{+}(\sigma)/\overline{K}^{+}(\sigma), \quad \overline{q}^{-}(\sigma)=\overline{\varphi}^{-}(\sigma)\overline{K}^{-}(\sigma)$$

или же

$$\overline{q}(\sigma)=\overline{\varphi}^{+}(\sigma)/\overline{K}^{+}(\sigma)+\overline{\varphi}^{-}(\sigma)\overline{K}^{-}(\sigma) \qquad (16)$$

В случае однородной бесконечной балки, то есть при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ получим

$$\overline{q}(\sigma)=\frac{\lambda^3\left(Pe^{-i\sigma a}+Qe^{i\sigma b}\right)}{\lambda^3+|\sigma|^3} \qquad (17)$$

которое совпадает с решением Шехтера, приведенным в [1].

Заметим, что уравнения равновесия балки (3) можно записать в виде

$$\overline{q}(0)=P+Q, \quad \overline{q}'(0)=i(bQ-aP)$$

при помощи которых определяются неизвестные постоянные a_0 и a_1. $\overline{q}(\sigma)$, как преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции $q(x)$, является непрерывной функцией и стремится к нулю при $|\sigma|\to\infty$. Кроме того, как следует из (16), $\overline{q}(\sigma)$ имеет порядок $1/|\sigma|\sigma$ при $|\sigma|\to\infty$. Из сказанного следует, что $\overline{q}(\sigma)$ является абсолютно интегрируемой функцией. Отсюда следует, что $q(x)$ является непрерывной функцией для всех $x\in(-\infty,\infty)$. Более того, из (16) можно получить следующие асимптотические представления для контактных напряжений:

$$\lambda_1^{-1}q(x)=\left[\overline{\varphi}^{+}(0)\Gamma(4)\left(1-\lambda_1^3/\lambda_2^3\right)-6A\pi^{-1}(\lambda_1/\lambda_2)^{3/2}\right](\lambda_1 x)^{-4}+0\left[(\lambda_1 x)^{-5}\right]$$
при $x\to+\infty$

$$\lambda_1^{-1}q(x)=-\left[6A\pi^{-1}-\Gamma(4)\left(1-\lambda_1^3/\lambda_2^3\right)\left(A+\overline{\varphi}^{-}(0)\right)(\lambda_1/\lambda_2)^{3/2}\right](\lambda_1 x)^{-4}+0\left[(\lambda_1 x)^{-5}\right]$$
при $x\to-\infty$

$$q(x)=q(0)+0\left(x\ln|x|\right) \quad \text{при } x\to 0 \qquad (18)$$

где $A=P+Q(\lambda_2/\lambda_1)^3+a_0\mu/\lambda_1^3(1-\nu)$, $\Gamma(x)$ – известная Гамма-функция.

В частном случае, для однородной балки, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, из (17) получим

$$\lambda^{-1} q(x) = -\frac{P+Q}{\pi}\Gamma(4)(\lambda_1 x)^{-4} + 0\left[(\lambda_1 x)^{-5}\right] \quad \text{при} \quad |x| \to \infty$$

которое, как нетрудно видеть, совпадает с (18).

Знак $(-)$ в последней формуле показывает, что контактные давления меняют знак, то есть в случае свободно лежащей балки могут образоваться зоны отрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. - М.: Наука, 1976.
2. Попов Г.Я. О спаренных интегро-дифференциальных уравнениях изгиба, лежащей на упругом полупространстве неограниченной плиты кусочно-постоянной жесткости.- Изв. Вузов.Математика, №1, 1957 и №3, 1958.
3. Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. - ПММ, 1961, вып.1, т.25.
4. Григорян Э.Х. Передача наугрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. - Уч.зап.ЕГУ, ест.н., 1979, №3.
5. Григорян Э.Х. Изгиб полубесконечной балки, лежащей на упругой полуплоскости. - Изв. НАН РА, Механика, 1992, т.45, №1-2, с.11-26.
6. Керопян А.В. К контактной задаче для упругой полосы с упругой разнородной бесконечной накладкой. - Межвуз. сб. науч. тр. "Механика", Ереван, изд.ЕГУ, вып.8, 1991.
7. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1971. 104 с.
8. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1972. 283 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
30.06.1998