ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 62.50

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПРИ ФИКСИРОВАННЫХ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ФАЗОВЫХ СОСТОЯНИЯХ

Барсéгян В. Р.

Վ.Ռ. Բարսեղյան

Գծային համակարգերի օպտիմալ ղեկավարումը ֆիքսած միջանկյալ ֆազային վիճակներով

Ուսումնասիրված է գծային հավասարումներով նկարագրվող օբյեկտների օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը ժամանակի միջանկյալ պահերին դրված ֆազային սահմանափակումներով, երբ որակի հայտանիշը տրված է ժամանակի ամբողջ միջակայքի վրա:

V.R. Barseghyan

Optimal control of linear systems under fixed intermediate phase states

Исследована задача оптимального управления линейными объектами, движения которых проходят через заранее фиксированные точки или множества фазового пространства, при заданном критерии качества на всем промежутке времени.

1.Пусть движение управляемого объекта описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t) \tag{1.1}$$

где $x(t)-n$-мерный фазовый вектор, $A(t)-(n\times n)$, $B(t)-(n\times r)$-мерные матрицы, элементы которых – измеримые ограниченные функции при $t_0 \le t \le T$ (t_0 и T -заданные моменты времени), $u(t)-r$-мерный вектор-столбец управляющих воздействий, компоненты которой считаются измеримыми ограниченными функциями, $f(t)-n$-мерный вектор-столбец внешних воздействий (может быть измеримой ограниченной функцией).

Заданы начальное

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

и конечное

$$x(T) = x_T \tag{1.3}$$

значения фазового вектора управляемого объекта.

Предположим, что в некоторые фиксированные моменты времени

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$$

заданы значения фазового вектора

$$x(t_k) = a_k \quad (k = 1,...,m) \tag{1.4}$$

Для $x(t)$ решения системы (1.1) условия (1.4) являются фазовыми ограничениями. Вообще для ряда практических задач (при управлении манипуляционными роботами, летательными аппаратами и т. д.) можно предположить, что фазовая точка $x(t_k)$ принадлежит некоторому компактному множеству $X_k \subset R^n$, т.е.

$$x(t_k) \in X_k \quad (k = 1,...,m) \tag{1.5}$$

Пусть на промежутке времени $[t_0, T]$ задан критерий качества $\aleph[u]$, который может иметь смысл нормы некоторого нормированного пространства.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, переводящее систему (1.1) из состояния $x(t_0)$ через промежуточные состояния (1.4) в конечное состояние $x(T)$ и имеющее наименьшее возможное значение критерия качества $\aleph[u^0] \equiv \aleph[t_0, t_1, ..., t_m, T]$.

Как известно [1,2], для данных краевых условий $x(t_0)$, $x(T)$ и промежутка времени $[t_0, T]$ для системы (1.1) выводится понятие вполне управляемости. Это понятие при фиксированных моментах времени с фазовыми ограничениями (1.5) (или фазовыми состояниями (1.4)) сформулируем следующим образом.

Определение. Система (1.1) называется вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$ при фиксированных моментах времени $t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T$, если возможно найти управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, переводящее систему (1.1) из начального состояния (1.2) через промежуточные состояния (1.4) в конечное состояние (1.3), каковыми бы ни были условия (1.2)-(1.4).

Иначе говоря, вполне управляемая на отрезке времени $[t_0, T]$ при фиксированных моментах $t_0 < t_1 < ... < t_m < T$ система – это система, которая может быть переведена за время $T - t_0$ из любого начального состояния $x(t_0)$ через любые промежуточные состояния (1.4) (или через точки из X_k), в любое другое заданное состояние $x(T)$ подходящим выбором возможного управления $u(t)$.

2. Для исследования поставленной задачи напишем решение уравнения (1.1) следующим образом:

$$x(t) = X[t, t_0]x[t_0] + \int_{t_0}^{t} X[t, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} X[t, \tau]f(\tau)d\tau \tag{2.1}$$

где через $X(t,\tau)$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородной части уравнения (1.1). Учитывая, что в заданные моменты времени t_k $(k=1,...,m+1)$ должны выполняться условия (1.3), из (1.4) получим следующие интегральные соотношения для определения неизвестной вектор-функции $u(t)$:

$$\int_{t_0}^{t_k} H[t_k,\tau]u(\tau)d\tau = c(t_0,t_k) \tag{2.2}$$

где $H[t_k,\tau]=X[t_k,\tau]B(\tau)$ – импульсная переходная матрица системы (1.1) размерности $(n\times r)$, элементы которой – известные измеримые ограниченные функции на промежутках времени $t_0 \le \tau \le t_k$ $(k=1,...,m+1)$, а

$$c(t_0,t_k)=x(t_k)-X[t_k,t_0]x(t_0)-\int_{t_0}^{t_k} X[t_k,\tau]f(\tau)d\tau$$

известные векторы.

Для того, чтобы возможно было левую часть системы (2.2) рассматривать как линейную операцию, порожденную функцией $u(\tau)$ на отрезке $[t_0,T]$, целесообразно вместо $H[t_k,\tau]$ ввести функции $H_k[\tau]$ следующим образом:

$$H_k[\tau]=\begin{cases} H[t_k,\tau] \text{ при } t_0 \le \tau \le t_k \\ 0 \quad \text{ при } t_k < \tau \le t_{m+1}=T \quad (k=1,...,m+1)\end{cases} \tag{2.3}$$

Соотношения (2.2) при помощи функции $H_k[\tau]$ (2.3) запишутся так:

$$\int_{t_0}^{T} H_k(\tau)u(\tau)d\tau = c(t_0,t_k) \quad (k=1,...,m+1) \tag{2.4}$$

При заданном критерии качества $\aleph[u]$ задачу оптимального управления с интегральными условиями (2.4) можно рассматривать как изопереметрическую задачу из вариационного исчисления, где надлежит определить минимум функционала $\aleph[u]$ при условиях (2.4). Однако, как видно из (2.3), подынтегральные функции в (2.4) являются разрывными, поэтому классические теоремы вариационного исчисления неприменимы.

Если функционал $\aleph[u]$ является нормой некоторого линейного нормированного пространства, то решение поставленной задачи, следуя [1], будем искать с помощью проблемы моментов.

При фазовом ограничении (1.5) для решения задачи 1 будем предполагать, что точки $x(t_k)$ зафиксированы, следовательно, управление $u^0(t)$ будет зависеть от выбранных точек $x(t_k)$. Значение функционала также будет зависеть от выбранных точек $x(t_k)$. Далее

[3,4] надлежит найти такие точки из множества X_k, для которых функционал $\aleph$ принимает минимальное значение, т. е.

$$\aleph[t_0,t_1,\cdots,t_m,T]=\min_{x(t_k)\in X_k}\aleph[x(t_1,\cdots,x(t_m)]$$

Учитывая следующее свойство фундаментальной матрицы

$$X[t_k,t_0]=X[t_k,t_{k-1}]X[t_{k-1},t_0]$$

а также, что в заданные моменты времени t_k $(k=1,\ldots,m+1)$ должны выполняться условия (1.3), (1.4), из формулы (2.1) будем иметь

$$x(t_k)=X[t_k,t_{k-1}]\left(X[t_{k-1},t_0]x(t_0)+\int_{t_0}^{t_{k-1}}X[t_{k-1},\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t_{k-1}}X[t_{k-1},\tau]f(\tau)d\tau\right)+\int_{t_{k-1}}^{t_k}X[t_k,\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau+\int_{t_{k-1}}^{t_k}X[t_k,\tau]f(\tau)d\tau$$

или

$$x(t_k)=X[t_k,t_{k-1}]x(t_{k-1})+\int_{t_{k-1}}^{t_k}X[t_k,\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau+\int_{t_{k-1}}^{t_k}X[t_k,\tau]f(\tau)d\tau \quad (2.5)$$

Из (2.5) имеем следующие отличные от (2.2) интегральные соотношения:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}H[t_k,\tau]u(\tau)d\tau=c(t_{k-1},t_k) \quad (2.6)$$

где

$$c(t_{k-1},t_k)=x(t_k)-X[t_k,t_{k-1}]x(t_{k-1})-\int_{t_{k-1}}^{t_k}X[t_k,\tau]f(\tau)d\tau \quad (k=1,\ldots,m+1) \quad (2.7)$$

известные векторы.

С другой стороны, из свойства интегралов и вышеупомянутого свойства фундаментальной матрицы получим

$$\int_{t_0}^{t_k}X[t_k,\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau=\sum_{i=1}^{k}X[t_k,t_i]\int_{t_{i-1}}^{t_i}X[t_i,\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau$$

или с учетом (2.6) имеем

$$\int_{t_0}^{t_k}X[t_k,\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau=\sum_{i=1}^{k}X[t_k,t_i]c(t_{i-1},t_i)$$

Для системы (2.6) можно ввести следующие функции:

$$\overline{H}_k[\tau]=\begin{cases}0 & \text{при } t_0\le\tau\le t_{k-1}\\ H[t_k,\tau] & \text{при } t_{k-1}\le\tau\le t_k\\ 0 & \text{при } t_k<\tau\le t_{m+1}=T \quad (k=1,\ldots,m+1)\end{cases} \quad (2.8)$$

Соотношения (2.6) при помощи функции $\overline{H}_k[\tau]$ запишутся так:

$$\int_{t_0}^{T} \overline{H}_k[\tau]u(\tau)d\tau = c(t_{k-1}, t_k) \qquad (k = 1,\dots,m) \tag{2.9}$$

Введем следующую блочную матрицу:

$$H[\tau] = \begin{pmatrix} \overline{H}_1[\tau] 0 \cdots\cdots\cdots 0 \\ 0\ \overline{H}_2[\tau] \cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\ 0 \cdots\cdots\cdots \overline{H}_{m+1}[\tau] \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

с размерностью $n(m+1)\times r(m+1)$. Тогда интегральные условия (2.9) при помощи матрицы (2.10) можно представить в виде

$$\int_{t_0}^{T} H_k[\tau]U(\tau)d\tau = C(t_0,\cdots,t_{m+1}) \tag{2.11}$$

где вектор $U(\tau) - r(m+1)$-мерный, $C(t_0,\cdots,t_{m+1}) - n(m+1)$-мерные блочные вектор-столбцы с блоками векторов $u(\tau)$ и $c(t_{k-1},t_k)$ соответственно.

Можно сформулировать следующее утверждение о вполне управляемости системы (1.1) на отрезке $[t_0,T]$ при фиксированных моментах времени $t_0 < t_1 < \dots < t_m < T$, справедливость которой следует из вида матрицы $H(\tau)$ (2.10) и аналогичного утверждения [1,2] для вполне управляемости на отрезке времени $[t_0,T]$.

Для того, чтобы система, описываемая уравнением (1.1), была вполне управляемой на отрезке $[t_0,T]$ при фиксированных моментах времени $t_0 < t_1 < \dots < t_m < T$, необходимо и достаточно, чтобы столбцы матрицы функции $H[\tau]$ были линейно независимы.

Отметим, что для линейных стационарных систем

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

условие Калмана о вполне управляемости в вышеприведенном смысле остается неизменным.

Рассмотрим следующие отдельные задачи оптимального управления для системы (1.1) и критерии качества $\aleph[u]$.

Задача 2. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t\in[t_0,T]$, переводящее систему (1.1) из состояния (1.2) в состояние (1.3) и имеющее наименьшее возможное значение критерия качества $\aleph[u^0] \equiv \aleph[t_0,T]$.

Задача 3. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, переводящее систему (1.1) из состояния $x(t_{k-1})$ в состояние $x(t_k)$

$(k=1,\ldots,m+1)$ и имеющее возможное значение критерия качества $\aleph[u^0]\equiv\aleph[t_{k-1},t_k]$ $(k=1,\ldots,m+1)$.

Для минимальных значений критериев качеств задач 1, 2 и 3 справедливы следующие свойства.

Минимальные значения критериев качеств задач 1, 2 и 3 удовлетворяют условиям

$$\aleph[t_0,T]\le\aleph[t_0,t_1,\cdots,t_m,T]\le\sum_{k=1}^{m+1}\aleph[t_{k-1},t_k] \tag{2.12}$$

Заметим, что не обязательно, чтобы выбранный функционал $\aleph[u]$ имел смысл нормы. Предполагается только, что для $\aleph[u]$ существует решение этих трех задач.

3. Рассмотрим ситуации, когда в моменты времени t_k $(k=1,\ldots,m+1)$ заданы только части фазовых координат вектора $x(t_k)$:

$$x_{i_1}(t_k),\cdots,x_{i_k}(t_k),\quad (i_k\le n,k=1,\cdots,m+1) \tag{3.1}$$

а остальные координаты в промежуточные моменты времени и в конце движения могут принимать любые значения. Это означает, что заданы множества промежуточных и конечных состояний системы (1.1). Эти множества являются гиперплоскостью в фазовом пространстве $\{x_1,\ldots,x_n\}$, определяемые системой уравнений

$$x_{i_j}=x_{i_j}(t_k),\quad (j=1,\cdots,k;\ k=1,\cdots,m+1) \tag{3.2}$$

Следовательно, будем считать, что заданы некоторые многообразия $Q(x(t_k))$, $(k=1,\ldots,m+1)$ промежуточных и конечных состояний $x(t_k)$, $(k=1,\ldots,m+1)$ фазового вектора $x(t)$.

В этом случае задача об оптимальном управлении системой (1.1) сформулируется следующим образом.

Задача 4. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t\in[t_0,T]$, переводящее систему (1.1) из состояния $x(t_0)$ через какие-нибудь точки $x(t_k)=a_k$ в какую-нибудь точку $x(t_{m+1})=a_m$ из заданных многообразий $Q(x(t_k))$, $(k=1,\ldots,m+1)$ и имеющее при этом наименьшее возможное значение критерия качества $\aleph^0[t_0,t_1,\cdots,t_m,T]$.

В этой задаче надо найти из каждого многообразия $Q(x(t_k))$ по одной точке $x(t_k)$ и управление $u^0(t)$, $t\in[t_0,T]$, переводящее систему (1.1) из состояния $x(t_0)$, через промежуточные состояния $x(t_k)$, $(k=1,\ldots,m)$ в конечное состояние $x(T)=x(t_{m+1})$ таким образом, чтобы значение функционала $\aleph[u^0]$ оказалось наименьшим возможным.

Пусть сначала точки $x(t_k)$ из $Q(x(t_k))$, $(k=1,\ldots,m+1)$ как-нибудь выбраны и временно зафиксированы. Тогда получим задачу 1, решение которой определяется по вышеизложенной схеме. В соответствии с изложенным решением задачи 1 управление $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$ будет зависеть от выбранных точек $x(t_k)$, $(k = 1,...,m+1)$, т. е.

$$u^0(t) \equiv u^0(t_0, t; x(t_k) : k = 1,\cdots,m+1).$$

Следовательно, значение функционала для управления $u^0(t_0, t;\ x(t_k):\ \ k = 1,\cdots,m+1)$, решающую задачу 1, определяется так:

$$\aleph[u^0(t_0, t;\ x(t_k):\ k = 1,\cdots,m+1)] \equiv \aleph[x(t_1),\cdots,x(t_{m+1})]$$

Отсюда следует, что необходимо найти такие точки $x(t_k)$ из $Q(x(t_k))$, $(k = 1,...,m+1)$, для которых величина $\aleph[x(t_1),\cdots,x(t_{m+1})]$ достигает минимума. Такие векторы обозначим символом $x^0(t_k)$, $(k = 1,...,m+1)$.

В ситуациях, которые типичны в приложениях, эти векторы существуют, ибо существование минимума является следствием замкнутости множеств $Q(x(t_k))$ и непрерывной зависимости $\aleph[x(t_1),\cdots,x(t_{m+1})]$ от $x(t_1),\cdots,x(t_{m+1})$.

Итак, для решения задачи 4 надлежит найти векторы $x^0(t_k)$ из многообразий $Q(x(t_k))$, $(k = 1,...,m+1)$, для которых

$$\aleph^0[t_0, t_1,\cdots,t_m, T] = \min_{x(t_k)} \aleph[x(t_1),\cdots,x(t_{m+1})]$$

при всех $x(t_k) \in Q(x(t_k))$, $(k = 1,...,m+1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением.- М.: Наука, 1968.
2. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. - М.: Наука, 1972.
3. Габриелян М.С. Об управлении линейным уравнением высокого порядка в смысле Штурма-Лиувилля. - Уч. записки ЕГУ, вып. 3, 1973.
4. Барсегян В.Р., Сардарян А.Г. Оптимальное управление двухзвенного манипулятора при фиксированных промежуточных состояниях. Вопросы оптимального управления устойчивости и прочности механических систем. - Сб. науч. труд., Ереван, 1997.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
25.05.1998