ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 532.59

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИФРАКЦИЯ СЛАБОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ЖЕСТКОМ БАРЬЕРЕ В БЕРЕГОВОЙ ЗОНЕ

Безиргенян Г.С.

Գ.Ս.Բեզիրգենյան
Թույլ հարվածային ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ կարծր արգելքի վրա ափային գոտում

Օգտագործելով գծային դրվածքով լուծված դիֆրակցիոն խնդրի արդյունքները և հակադարձ մեթոդը, ստացված են միակողմանի ուղղված ոչ գծային բնութագրիչների ընտանիքի հավասարումը ընկնող և դիֆրակցիոն ալիքների շոշափման կետի շրջակայքում, որի հիման վրա վերականգնված է շարժման հավասարումների սիստեման: Գտնված է այդ սիստեմայի լուծումը և ցույց է տրված, որ նշված ալիքի ճակատի վրա տեղի ունեցող պայմանները ճշգրիտ բավարարվում են զրոյական մոտավորությունում: Սաղր ջրի համար հաշված է շարժման հավասարման մեջ մտնող ոչ գծային անդամի գործակիցը:

G.S.Bezirgenyan

Nonlinear diffraction of weak shake wave on the semi-infinite rigid obstacle in the sea-side zone

Используя результаты решенной линейной задачи и обратный метод, получено уравнение однонаправленного семейства нелинейных характеристик в окрестности точки касания падающей и дифракционной волн, на основании которого восстановлена нелинейная система уравнений движения. Показано, что условия на фронте слабой ударной волны удовлетворяются точно в нулевом приближении. Для мелкой воды вычислен коэффициент при нелинейном члене, входящий в уравнение движения, и показано, что он $(1+\lambda)$ равен 3/2, который хорошо известен.

§1. **Описание задачи.** Пусть в начальный момент $t=0$ слабая ударная волна, распространяющаяся по поверхности покоящейся весомой жидкости, сталкивается с волнорезом, имеющим острую кромку. Жидкость в декартовой системе координат (x, y, z) занимает область

$$-a^2 \le x \le \infty,\ -\infty < y < \infty,\ -h(x,y) \le z \le \zeta(t,x,y)$$

где плоскость $z=0$, $(x0y)$ совмещена с невозмущенной поверхностью жидкости, начало координат расположено на остром краю барьера, координатная ось $0z$ направлена вертикально вверх, a^2 - расстояние барьера от берега, а $h(x,y)$ - глубина воды в прибрежной зоне.

Задача изучается в локальной области, расположенной вблизи точки касания P дифракционной и распространяющейся волн. Отметим, что луч OP является предельным лучом, отделяющим дифракционную область (область "геометрической тени") от области, занятой распространяющейся волной ("освещенная" область).

Предполагается, что изучаемая нестационарная задача плоская.

Перейдем от декартовых координат x, y к лучевым координатам ϑ, τ. Координата $\vartheta = \vartheta(x,y)$ характеризует положение дифракционных лучей, излучаемых точкой O (ϑ от t не зависит, так как положение точки O фиксировано, то есть геометрическая картина лучей, исходящих из O, со временем не меняется). $\vartheta = \text{const}$ вдоль лучей и отсчитывается от некоторого фиксированного направления, например, от касательной к барьеру в точке O.

Координата $\tau = \tau(t, x, y)$ характеризует время пробега от начальной точки O до текущей точки M в которой ищется решение, вдоль дифракционных лучей, $\tau = \tau_d(x, y)$ — время пробега дифракционной волны от начальной точки до текущего фронта, а t - время пробега от точки M до текущего фронта волны.

Если через K_1 обозначить кривизну кривой, образованной из пересечения обращенного характеристического коноида (с вершиной в точке M, расположенной вблизи точки P) с плоскостью $t = 0$ в пространстве t, x, y, а через K_2- кривизну начального фронта волны (фиг.1), то в силу узости (достаточно малой протяженности) области образованной из пересечения отмеченных кривых, можно принять, что $K_1 = K_1(t)$, $K_2 = \text{const}$. (Узость отмеченной области следует из того, что при совпадении точки M с точкой P отмеченная область стягивается в точку).

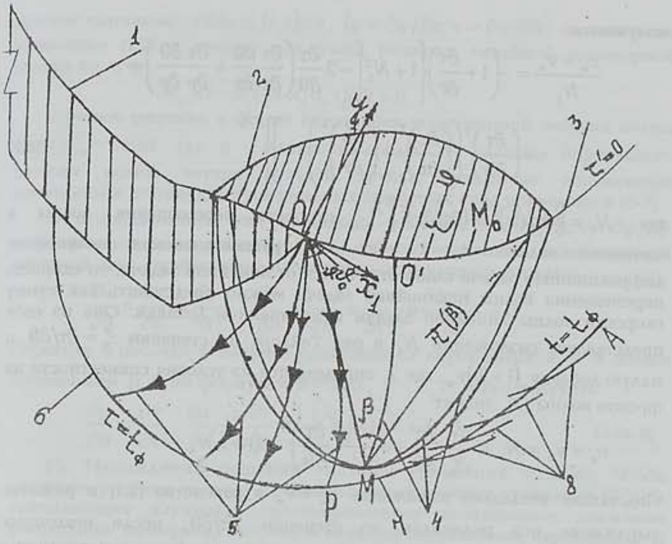
В работе [1] показано, что в окрестности точки O' (точка O' расположена вблизи точки O, так как M расположена вблизи P) имеет место приближенная формула $\varphi + \zeta \approx c_0(t - t_\phi) - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)(x_1 - s)^2$, где c_0- скорость волны в точке O, t_ϕ- время пробега от начального фронта до текущей точки, находящейся вблизи распространяющейся волны, а координатная система x_1Oy_1 и расстояния φ, ζ, s показаны на фиг.1. Для достаточной малой окрестности точки O в приведенной формуле следует полагать φ, ζ и x_1, примерно равными нулям и с учетом, что $t = \tau_d$ (рассматривается дифракционная волна), а $s = -(\vartheta - \vartheta_0)/(K_1 - K_2)$ ([2] с.254, формула (5.5)), она примет вид для распространяющейся волны PA:

$$\tau = \frac{(\vartheta - \vartheta_0)^2}{2c_0(K_1 - K_2)} \tag{1.1}$$

Продифференцируя (1.1) по t, легко получить

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{c_0}{2}\frac{d(K_1 - K_2)}{dt}\left(\frac{\partial \tau}{\partial \vartheta}\right)^2 \tag{1.2}$$

Следует отметить, что для произвольной гиперболической системы уравнений в [3] показано, что уравнение характеристик в лучевых координатах совпадает с уравнением (1.1), конкретизируя коэффициент при $(\partial\tau/\partial\vartheta)^2$.



Фиг. 1. Проекция пространственной геометрической картины в произвольный момент времени t_Φ на плоскость $t = t_\Phi$. 1- сечение полубесконечного барьера с острой кромкой, 2 - квазиокружность, 3 - начальный фронт падающей волны, 4 - бихарактеристики волнового уравнения, 5 - дифракционные лучи, 6 - фронт дифракционной волны, 7 - фронт распространяющей волны в момент $t = t_\Phi$, 8 - однонаправленное семейство нелинейных характеристик в освещенной области.

§2. Вывод системы эволюционных нелинейных уравнений движения в окрестности точки P. Скорость N перемещения фронта любой плоской волны $F(t,x,y)$ выражается формулой [4]

$$N = c_n + v_n = -\frac{\partial F/\partial t}{\sqrt{(\partial F/\partial x)^2 + (\partial F/\partial y)^2}}$$

где c_n - скорость распространения волны, а v_n - проекция скорости движения частиц на текущую нормаль волны.

Переходя в последней формуле от декартовых координат к лучевым координатам с учетом

$$\left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{x,y} = \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{\tau} - \frac{\partial F}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial F}{\partial t}\Big/\frac{\partial F}{\partial \tau} = -\frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial \vartheta}\Big/\frac{\partial F}{\partial \tau} = -\frac{\partial \tau}{\partial \vartheta},$$

получается

$$\frac{c_n + \mathrm{v}_n}{N_1} = -\left(1+\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)\left\{1+N_1^2\left[-2\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right)^2\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)^2\right)^2\quad\right]\right\}^{-1/2} \tag{2.1}$$

где $N_1 = \left[(\partial\tau/\partial x)^2 + (\partial\tau/\partial y)^2\right]^{-1/2}$ - скорость перемещения волны в линейной задаче, $\tau_d = t$. Так как рассматриваемая нелинейная дифракционная задача слабо отличается от линейной задачи, то скорость перемещения волны нелинейной задачи можно представить как сумму скорости волны линейной задачи и нелинейной добавки. Она из себя представляет разложение N_1 в ряд Тейлора по степеням $\zeta = \partial\tau/\partial\vartheta$ и малую добавку $(1+\lambda)\mathrm{v}_n$, где λ определяется из условия совместности на фронте волны [3]. Значит

$$c_n + \mathrm{v}_n = N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial\zeta}\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta} + \frac{\partial^2 N_1}{\partial\zeta^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right)^2 + (1+\lambda)\mathrm{v}_n$$

Подставляя последнее выражение $c_n + \mathrm{v}_n$ в равенство (2.1) и разлагая выражение под радикалом по степеням $\partial\tau/\partial\vartheta$, после некоторых преобразований уравнение однонаправленного семейства характеристик нелинейной задачи можно представить в следующей форме:

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} + f\left(\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right) = \frac{1+\lambda}{N_1}\mathrm{v}_n \tag{2.2}$$

В случае линейной задачи правую часть равенства (2.2) следует отбросить, и она должна перейти в (1.2), то есть допускаем, что f имеет такой же вид, что и в случае линейной задачи. Следовательно,

$$f = \Gamma\left(\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right)^2, \text{ где } \Gamma = \frac{c_0}{2}\frac{dK_1}{dt} \tag{2.3}$$

Следует отметить, что полученное уравнение (2.2), куда подставлено выражение f из (2.3), описывает однонаправленное семейство характеристик нелинейной задачи для произвольной среды в окрестности точки P.

Легко показать, что соответствующее дифференциальное уравнение, имеющее (2.2) в качестве семейства характеристик, записывается в следующей форме (где v_n обозначено через u)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial t} - \Gamma\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} + \frac{1+\lambda}{N_1}u\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} - u\frac{\partial\ln A_\lambda}{\partial t} = 0 \tag{2.4}$$

причем слагаемое $u\,\partial \ln A_\lambda(t,\tau)/\partial t$, $(u=\partial\psi/\partial\tau,\ v=\partial\psi/\partial\vartheta)$ не влияет на уравнение (2.2) и введено для учета решения линейной одномерной задачи по лучу

$$\partial u_\lambda/\partial t - u_\lambda \partial \ln A_\lambda(t,\tau)/\partial t = 0 .$$

Лучевое решение в форме сохранения возмущенной энергии волны ($\rho\sigma u_\lambda^2 c_{on} = \mathrm{const}$, где ρ - плотность среды, σ - площадь нормального сечения волны внутри лучевой трубки, остальные обозначения приведены в статье) для произвольных сплошных сред приведено в [5-7].

С использованием уже введенных величин: $u=\partial\psi/\partial\tau, v=\partial\psi/\partial\vartheta$ дифференциальное уравнение (2.4) можно заменить эквивалентной системой двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial\vartheta}=\frac{\partial v}{\partial\tau} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}-\Gamma\frac{\partial v}{\partial\vartheta}+\frac{1+\lambda}{N_1}u\frac{\partial u}{\partial\tau}-u\frac{\partial \ln A_\lambda}{\partial t}=0$$

Переходя в последней системе уравнений от переменных u, v к новым переменным μ, ν по формулам $u=A_\lambda\mu$, $v=A_\lambda\nu$, легко получить

$$\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta}=\frac{\partial\nu}{\partial\tau}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial t}-\Gamma\frac{\partial\nu}{\partial\vartheta}+\frac{1+\lambda}{N_1}A_\lambda\mu\frac{\partial\mu}{\partial\tau}=0\ {}^{*)} \qquad (2.5\text{а-б})$$

§3. **Нахождение решения системы уравнений (2.5а-б).** Чтобы построить решение системы нелинейных эволюционных уравнений (2.5а-б), описывающих изучаемое однонаправленное возмущенное движение, необходимо: во-первых, выбрать в качестве независимых переменных μ и ϑ вместо τ и ϑ, причем искомыми функциями будут τ и ν; во-вторых, использовать решение линейной задачи для скачкообразной волны, полученное в [1].

Итак, $\tau=\tau(t,\mu,\vartheta)$, $\nu=\nu(t,\mu,\vartheta)$. Следовательно,

$$\left.\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta}\right|_\mu=\left.\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta}\right|_\tau+\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}. \text{ Из } \left.\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta}\right|_\tau=0 \quad \text{следует} \quad \frac{\partial\mu}{\partial\vartheta}=-\frac{\partial\tau/\partial\vartheta}{\partial\tau/\partial\mu}.$$

Но так как $\left.\frac{\partial\nu}{\partial\mu}\right|_\vartheta=\frac{\partial\nu}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\mu}$ или $\frac{\partial\nu}{\partial\tau}=\frac{\partial\nu/\partial\mu}{\partial\tau/\partial\mu}$, то на основании последних соотношений первое уравнение системы (2.5 а-б) можно переписать в следующей форме:

$$-\frac{\partial\nu}{\partial\mu}=\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta} \quad \text{или} \quad \frac{\partial\nu_1}{\partial\mu_1}=\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta},$$

где $\nu_1=\sqrt{K_1-K_2}\,\nu$, $\mu_1=\sqrt{K_1-K_2}\,\mu$ (3.1)

Аналогичным образом можно показать справедливость следующих соотношений:

---

*) Здесь и в дальнейшем принимается $A_\lambda(t,\tau)\approx A_\lambda(t)$, так как текущая точка M находится вблизи P, и A_λ намного медленнее меняется по τ, чем u, v, что следует из линейного решения.

$$\left.\frac{\partial\mu}{\partial t}\right|_{\tau} = -\frac{\partial\tau/\partial t}{\partial\tau/\partial\mu}, \quad \left.\frac{\partial\nu}{\partial\vartheta}\right|_{\tau} = \left.\frac{\partial\nu}{\partial\vartheta}\right|_{\mu} - \frac{\partial\nu}{\partial\mu}\frac{\partial\tau/\partial\vartheta}{\partial\tau/\partial\mu}$$

Используя последние соотношения, второе уравнение системы (2.5 а-б) можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} + \Gamma\frac{\partial\nu}{\partial\vartheta}\frac{\partial\tau}{\partial\mu} - \Gamma\frac{\partial\nu}{\partial\mu}\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta} - \frac{1+\lambda}{N_1}A_\lambda\mu = 0$$

Но

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = \left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_{\mu_1} + \frac{\partial\tau}{\partial\mu_1}\frac{\partial\mu_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial\mu_1}{\partial t} = \frac{1}{2(K_1-K_2)}\frac{\partial(K_1-K_2)}{\partial t}\mu_1$$

Таким образом, уравнение (2.5б), с учетом последних соотношений, окончательно примет вид:

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{1}{2(K_1-K_2)}\frac{\partial(K_1-K_2)}{\partial t}\mu_1\frac{\partial\tau}{\partial\mu_1} + \Gamma\frac{\partial\nu_1}{\partial\vartheta}\frac{\partial\tau}{\partial\mu_1} -$$

$$-\frac{\partial\nu_1}{\partial\mu_1}\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta} - \frac{1+\lambda}{N_1}\frac{A_\lambda}{\sqrt{K_1-K_2}}\mu_1 = 0 \tag{3.2}$$

В линейной нестационарной задаче дифракции в случае скачкообразной волны показано [1], что возвышение свободной поверхности определяется формулой:

$$\eta = \frac{A}{\pi\sqrt{h_0}}\frac{1}{\sqrt{|\vec{r}_\beta'(P)|(K_1-K_2)}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2c_0(K_1-K_2)}\sqrt{t-\tau_d}}{\vartheta-\vartheta_0}$$

(Все обозначения взяты из работы [1], где τ заменен через τ_d, см. с.49, фор.(3.4)).

Последнюю формулу с учетом $u \approx \frac{c_0}{h_0}\eta$, а $A_\lambda = \frac{Ac_0}{h_0^{3/2}\sqrt{|\vec{r}_\beta'(P)|}}$ можно

переписать в следующей форме:

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2c_0(K_1-K_2)}\sqrt{-\tau}}{\vartheta-\vartheta_0}$$

Подставляя выражение μ_1 в уравнение (2.5а) и произведя интегрирование, получится

$$\nu_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{c_0}}\left[\sqrt{-\tau} - \frac{\vartheta-\vartheta_0}{\sqrt{2c_0(K_1-K_2)}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2c_0}\sqrt{K_1-K_2}\sqrt{-\tau}}{\vartheta-\vartheta_0}\right]$$

Из последних двух уравнений, исключив переменную τ, получится

$$\nu_1 = \frac{\vartheta-\vartheta_0}{\pi c_0\sqrt{K_1-K_2}}(\operatorname{tg}\pi\mu_1 - \pi\mu_1) \tag{3.3}$$

Теперь, подставляя выражение ν_1 в уравнение (3.1) и произведя опять интегрирование, можно показать, что

$$\tau = -\frac{(\vartheta - \vartheta_0)^2}{2c_0(K_1 - K_2)}\operatorname{tg}^2\pi\mu_1 + \Phi(\mu_1, t) \tag{3.4}$$

где $\Phi(\mu_1, t)$ - произвольная функция интегрирования.

Подставляя (3.3)-(3.4) в уравнение (3.2), можно убедиться в том, что слагаемые, содержащие $(\vartheta - \vartheta_0)^2$, сокращаются, и для определения Φ получается следующее дифференциальное уравнение:

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{d(K_1 - K_2)}{dt}\frac{\operatorname{tg}\pi\mu_1}{\pi(K_1 - K_2)}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_1} - 2\frac{\lambda+1}{N_1}\frac{A_\lambda}{\sqrt{K_1 - K_2}}\mu_1 = 0$$

Решение последнего дифференциального уравнения эквивалентно решению следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dt}{2} = \frac{d\mu_1}{d(K_1 - K_2)/dt}\frac{\pi(K_1 - K_2)}{\operatorname{tg}\pi\mu_1} = N_1\frac{\sqrt{K_1 - K_2}}{A_\lambda\mu_1}\frac{d\Phi}{2(1+\lambda)}$$

Решив последнюю систему, получится

$$\sin\pi\mu_1 = \sqrt{K_1 - K_2}C\,,\quad \Phi = \int_0^t \frac{(1+\lambda)A_\lambda\mu_1}{N_1\sqrt{K_1 - K_2}}dt + \psi(C)\,.$$

Вблизи волны AP (фиг. 1) $\mu_1(K_1 - K_2)^{-1/2} = f_1(\vartheta, \tau)$. Следовательно,

$$\Phi = \frac{\mu_1}{\sqrt{K_1 - K_2}}\int_0^t \frac{(1+\lambda)A_\lambda}{N_1}dt + \psi\left(\frac{\sin\pi\mu_1}{\sqrt{K_1 - K_2}}\right)$$

На основании найденного выражения для функции Φ, решение (3.4) запишется в форме

$$\tau = -\frac{(\vartheta - \vartheta_0)^2}{2c_0(K_1 - K_2)}\operatorname{tg}^2\pi\mu_1 + \frac{\mu_1}{\sqrt{K_1 - K_2}}\int_0^t \frac{(1+\lambda)A_\lambda}{N_1}dt + \psi\left(\frac{\sin\pi\mu_1}{\sqrt{K_1 - K_2}}\right)$$

Вдали от точки P решение одномерное по ϑ и записывается в форме [3]

$$\tau = -\frac{\pi(\vartheta - \vartheta_0)^2\mu_1^2}{2(K_1 - K_2)c_0} + \frac{\mu_1}{\sqrt{K_1 - K_2}}\int_0^t \frac{(1+\lambda)A_\lambda}{N_1}dt \tag{3.5}$$

Сравнивая решение (3.5) с асимптотическим решением при малых μ_1, согласно принципу сращивания асимптотических разложений [8], сразу можно убедиться, что $\psi \equiv 0$.

§4. **Удовлетворение условий на ударной волне.** Следует показать, что в окрестности точки P условия на ударной волне удовлетворяются точно в нулевом приближении.

Для этого сначала необходимо получить условия на ударной волне, использовав систему уравнений (2.5 а-б), в которых следует произвести замену переменного: $\xi = \tau - \tau(\vartheta, t)$, $\mu = \mu(\xi)$, $\nu = \nu(\xi)$ (ξ отсчитывается поперек ударной волны). Тогда система уравнений (2.5 а-б) примет вид:

$$-\mu'\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}=\nu',\quad -\mu'\frac{\partial\tau}{\partial t}+\Gamma\mu'\left(\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right)^2+\frac{1+\lambda}{N_1}\mu\mu'=0$$

На μ' нельзя сократить, так как μ' имеет скачок на ударной волне. Интегрируя последнюю систему уравнений поперек ударной волны с учетом, что в рассматриваемом случае возмущения впереди ударной волны отсутствуют, получатся условия на ударной волне:

$$-\mu\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}=\nu,\quad \frac{\partial\tau}{\partial t}+\Gamma\left(\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right)^2-\frac{\lambda+1}{2N_1}A_\lambda\mu=0 \qquad (4.1а\text{-}б)$$

Для характеристик, расположенных в освещенной области, вместо τ необходимо ввести новую переменную $\delta=t-t_\Phi$. Так как для отмеченного семейства характеристик δ не зависит от ϑ, то уравнение (2.2) примет вид:

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}=-\frac{1+\lambda}{N_1}u \qquad (\mathrm{v}_n=u)$$

Следуя методу Уизема [9], линейное решение можно представить как $u=A_0\delta^\alpha$ $(\alpha=\mathrm{const})$ и заменить δ на y_1. Тогда из последнего соотношения следует

$$\delta=-y_1^\alpha\int_0^t\frac{1+\lambda}{N_1}A_0dt+y_1 \qquad (4.2)$$

где $A_0=\dfrac{A_\lambda}{\sqrt{K_1-K_2}}$.

Согласно работе [9], скорость распространения слабой ударной волны есть среднее арифметическое скоростей распространения характеристик впереди и позади разрыва. Следовательно,

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}=-\frac{1+\lambda}{2N_1}A_0y_1^\alpha$$

Продифференцируя (4.2) вдоль ударной волны, после некоторых вычислений с использованием последнего соотношения получится

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(y_1^{2\alpha}\int_0^t\frac{(1+\lambda)A_0}{N_1}dt\right)=y_1^\alpha\frac{dy_1}{dt}$$

Проинтегрировав последнее уравнение и подставляя полученное выражение y_1 в (4.2), получается уравнение ударной волны

$$\delta=\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^{\alpha/1-\alpha}\frac{\alpha-1}{2}\left(\int_0^t\frac{1+\lambda}{N_1}A_0dt\right)^{1/(1-\alpha)} \qquad (4.3)$$

В частном случае скачкообразной волны $\alpha=0$ и

$$\delta=-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{1+\lambda}{N_1}A_0dt$$

Из решения (3.5), обозначая значение τ в точке P через τ_0 с учетом $\mu_1 = 1$ в этой же точке, следует

$$\tau_0 = \int_0^t \frac{1+\lambda}{N_1} A_0 dt \tag{4.4}$$

следовательно, $\delta = -\tau_0/2$. Поскольку решение на ударной волне одномерное, то последнее соотношение верно вдоль всей ударной волны. Поскольку $\delta = t - t_\Phi$, а $\tau = \tau_d - t$, то из соотношений (1.1) и (4.4) следует

$$\tau = \frac{\tau_0}{2} + \frac{(\vartheta - \vartheta_0)^2}{2c_0(K_1 - K_2)} \tag{4.5}$$

Отсюда в точке P $(\tau = \tau_0)$ следует

$$\vartheta - \vartheta_0 = \lambda_1 = -\sqrt{c_0(K_1 - K_2)\tau_0} \tag{4.6}$$

Отметим, что для дифракционной волны $\vartheta \geq \vartheta_0$, а для распространяющегося разрыва $\vartheta \leq \vartheta_0$ и поэтому перед радикалом взят знак "$-$".

Из решения (3.3) в точке P следует

$$\nu_0 = -\frac{\vartheta - \vartheta_0}{c_0(K_1 - K_2)^{3/2}} \quad \text{или} \quad \nu_0 = \frac{\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{c_0}(K_1 - K_2)} \tag{4.7}$$

Как следует из соотношений (4.5)-(4.6), условие (4.1а) на ударной волне в точке P тождественно удовлетворяется.

Докажем справедливость вышеприведенного второго утверждения, то есть условие (4.1б) на ударной волне в окрестности точки P удовлетворяется в нулевом приближении. С этой целью разложим величины $\vartheta - \vartheta_0$, τ, μ и ν в степенные ряды по ς в окрестности точки P:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \lambda_1 + \varsigma, \ \tau = \tau_0 + \tau_1\varsigma + \tau_2\varsigma^2, \ \mu_1 = \mu_0 + \mu^1\varsigma, \ \nu_1 = \nu_0 + \nu^1\varsigma \tag{4.8а-г}$$

где $\varsigma = \varsigma(\vartheta, t)$- малый параметр, а τ_1, τ_2, μ^1, ν^1 зависят только от t.

Подставляя (4.8 б-г) в систему уравнений (4.1а-б), с учетом соотношения (4.8а), легко получить

$$-(\mu_0 + \mu^1\varsigma)(\tau_1 + 2\tau_2\varsigma) = \nu_0 + \nu^1\varsigma,$$

$$\tau_0 + \tau_1'\varsigma + \tau_2'\varsigma^2 - \lambda_1(\tau_1 + 2\tau_2\varsigma) + \Gamma(\tau_1 + 2\tau_2\varsigma)^2 - \frac{1+\lambda}{2N_1} A_\lambda (\mu_0 + \mu^1\varsigma) = 0$$

Из последних соотношений следует, что в нулевом приближении имеют место равенства:

$$-\mu_0\tau_1 = \nu_0, \ \tau_0' - \lambda_1'\tau_1 + \Gamma\tau_1^2 - \frac{1+\lambda}{2N_1} A_\lambda \mu_0 = 0 \tag{4.9а,б}$$

Согласно (4.4), $\tau_0' = [(1+\lambda)/N_1]A_0$. Из соотношений (4.9а), (4.7) и (4.6), с учетом $\mu_0 = (K_1 - K_2)^{-1/2}$ следует $\tau_1 = \dfrac{\lambda_1}{c_0(K_1 - K_2)}$. Продифференцировав соотношение (4.6) по t, можно получить

$$\lambda_1' = -\frac{1}{2}\sqrt{c_0\tau_0(K_1 - K_2)}\left(\frac{1+\lambda}{N_1}\frac{A_\lambda}{\sqrt{K_1 - K_2}}\frac{1}{\tau_0} + \frac{K_1'}{K_1 - K_2}\right)$$

Подставив выражения: τ_0', λ_1', τ_1, Γ, A_0, μ_0 в уравнение (4.9б), легко убедиться, что оно превращается в тождество.

§5. Определение коэффициента λ в случае мелкой воды.

Для прибрежной зоны с переменной глубиной $z = -h(x, y)$ уравнения нестационарного движения идеальной несжимаемой жидкости с применением гипотезы "мелкой воды" запишутся в следующей форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial y} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{5.1а-б}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (h+\eta)u}{\partial x} + \frac{\partial (h+\eta)\mathrm{v}}{\partial y} = 0 \tag{5.2}$$

где η - возвышение свободной поверхности.

Для получения значения λ следует вычислить скорость волны в нелинейной задаче. С этой целью в уравнениях (5.1а-б)-(5.2) производится замена производных на фронте волны согласно работе [3] по формулам:

$\dfrac{\partial}{\partial t} \to -(c_n + \mathrm{v}_n)\delta$, $\dfrac{\partial}{\partial x} \to n_x\delta$, $\dfrac{\partial}{\partial y} \to n_y\delta$, где $c_n + \mathrm{v}_n$ - нормальная скорость волны, n_x, n_y - компоненты единичного вектора нормали к волне, а δ - производная по нормали волны. Переходя в уравнениях (5.1а-б)-(5.2) к указанным заменам, можно получить: $c_n\delta u = gn_x\delta\eta$, $c_n\delta \mathrm{v} = gn_y\delta\eta$, $c_n\delta\eta - (h+\eta)\delta \mathrm{v}_n = 0$. Умножив первое уравнение на n_x, а второе - на n_y, с учетом $n_x^2 + n_y^2 = 0$, легко получить $c_n\delta \mathrm{v}_n = g\delta\eta$. Подстановка выражения $\delta \mathrm{v}_n$ из последнего равенства в условие $c_n\delta\eta - (h+\eta)\delta \mathrm{v}_n = 0$ дает $c_n^2 - g(h+\eta) = 0$. Представив c_n в форме $c_{0n} + \bar{c}_n$, где $\bar{c}_n$ мало, и подставив в последнее соотношение, соответственно, в нулевом и первом приближении, получается: $c_{0n} = \sqrt{gh}$, $2\sqrt{gh}\bar{c}_n = g\eta$. Положив $\bar{c}_n = \lambda\bar{\mathrm{v}}_n$, с использованием соотношения $\mathrm{v}_n = (g/c_{0n})\eta$, можно получить $\bar{c}_n = 1/2\,\mathrm{v}_n$. Следовательно, $\lambda = 1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Безиргенян Г.С. Решение дифракционной задачи вблизи касания дифракционной и падающей гравитационной волн в линейной постановке. -Изв. АН РА, Механика, 1994, т.47, №3-4, с. 37-53.
2. Бабич В.М. Распространение нестационарных волн и каустики. - Уч. записки ЛГУ. Динамические задачи теории упругости. 1958, №246, вып.32, с.228-259.
3. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. -Ереван: Изд. АН АрмССР, 1981. 307с.
4. Кочин Н.Е. и др. Теоретическая гидромеханика. Ч. II. -М.: Физматлит., 1960. 727с.
5. Минасян М.М. Распространение слабых ударных волн в неоднородных движущихся средах. -Уч. записки ЕГУ. Естественные науки. 1975, №1, с.55-64.
6. Минасян М.М. О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике. - Докл. АН АрмССР, 1972, т.55, №5, с.273-280.
7. Geffrey A., Tanuaiti T. Nonlinear wave propagation, New York, London-Toronto. - 1964. -369p.
8. Zahalak G. and Myers M.K. //Conical flow near singular rays. Journal of fluid mechanics. -1974. -Vol.63, p.537-561.
9. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. -М.: Мир, 1977. 622с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
02.12.1997