ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 539.376

КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ГРАНЕЦЕНТРИРОВАННОГО КУБИЧЕСКОГО МОНОКРИСТАЛЛА

Симонян А.М.

Ա.Մ. Սիմոնյան
Նիստակենտրոնացված խորանարդային միաբյուրեղից պատրաստված բարակապատ էլեմենտների ոլորումը

Աշխատանքում դիտարկված են բարակապատ միաբյուրեղային էլեմենտների ոլորման հարցերը սահքի կոնցեպցիայի հիման վրա: Ստացված են հաշվարկային բանաձևերը և բյուրեղային առանցքների օպտիմալ կողմնորոշումը ամենամեծ ամրության պայմանից ելնելով: Ցույց է տրված, որ սահմանային ոլորող մոմենտը կարող է փոփոխվել $\sqrt{3}$ անգամ փակ պրոֆիլով էլեմենտների համար, կախված բյուրեղային առանցքների կողմնորոշվածությունից:

A.M. Simonyan
Torsion of thin-walled elements from side-centered cubic single crystal

В работе рассматриваются вопросы кручения тонкостенных монокристаллических элементов замкнутого и открытого профилей на основе концепции скольжения. Получены расчетные формулы и варианты оптимального ориентирования кристаллических осей из условия наибольшей прочности и жесткости. Показано, что предельный крутящий момент может изменяться для элементов замкнутого сечения в $\sqrt{3}$ раз в зависимости от ориентации кристаллических осей.

Как указывалось в работах [1-4], реологические деформации в монокристаллах имеют место в результате скольжения дислокаций лишь в двенадцати ситемах скольжения, ориентация которых связана с кристаллической структурой. В работе [5] рассмотрено оптимальное ориентирование кристаллических осей в случае одноосного напряжения, а также тонкостенных труб с днищами и без днищ при действии гидростатического давления.

Согласно [4], реологические соотношения записываются так:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{i,j}^{1,2}\left\{\Phi\left[\frac{\sigma_x-\sigma_y+(-1)^i\tau_{yz}+(-1)^j\tau_{zx}}{\sqrt{6}}\right]+\right.$$

$$\left.+\Phi\left[\frac{\sigma_x-\sigma_z+(-1)^i\tau_{xy}+(-1)^j\tau_{yz}}{\sqrt{6}}\right]\right\}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{i,j}^{1,2}\left\{\Phi\left[\frac{\tau_{xy}+(-1)^i\tau_{zx}+(-1)^j(\sigma_y-\sigma_z)}{\sqrt{6}}\right]+\right.$$

$$+\Phi\left[\frac{\tau_{xy}+(-1)^i\tau_{yz}+(-1)^j(\sigma_x-\sigma_z)}{\sqrt{6}}\right]\Bigg\}\quad (x,y,z) \tag{1}$$

где суммирование производится по всем комбинациям i и j, при этом оси x, y и z соответствуют кристаллическим осям [001], [010] и [100]. Соотношения (1) имели многократные экспериментальные подтверждения при испытании алюминиевых монокристаллов [3].

При кручении тонкостенных стержней односвязного замкнутого профиля возникают касательные напряжения, определяемые по формуле [7]

$$\tau_{\xi\eta}=\frac{M_\eta}{2F\delta} \tag{2}$$

где δ – толщина элемента, M_η – крутящий момент, F – площадь, ограниченная средней линией сечения.

Задача оптимизации заключается в выборе такой ориентации осей x, y и z относительно оси η, при которой наибольшее из касательных напряжений, соответственных 12 системам скольжения, приобретает минимальное значение.

Предположим, что направляющие косинусы оси x с осями ξ,η,ζ равны, соответственно, α_{11}, α_{21}, α_{31}, оси y с теми же осями – α_{12}, α_{22}, α_{32}, а оси z – α_{13}, α_{23}, α_{33}.

Касательные напряжения, соответствующие системам скольжения, определяются по формулам

$$\tau_1(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}\left[2\alpha_{11}\alpha_{21}-2\alpha_{12}\alpha_{22}+(-1)^i(\alpha_{12}\alpha_{23}+\alpha_{22}\alpha_{13})+(-1)^j(\alpha_{13}\alpha_{21}+\alpha_{23}\alpha_{11})\right]$$

$$\tau_2(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}\left[2\alpha_{12}\alpha_{22}-2\alpha_{13}\alpha_{23}+(-1)^i(\alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{21}\alpha_{12})+(-1)^j(\alpha_{13}\alpha_{21}+\alpha_{23}\alpha_{11})\right]$$

$$\tau_3(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}\left[2\alpha_{13}\alpha_{23}-2\alpha_{11}\alpha_{21}+(-1)^i(\alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{21}\alpha_{12})+(-1)^j(\alpha_{12}\alpha_{23}+\alpha_{22}\alpha_{13})\right] \tag{3}$$

Ниже рассмотрены случаи симметричного расположения продольной оси стержня относительно кристаллических осей, когда не имеет места скос поперечного сечения.

Положим, что ось η совпадает с осью z. При этом имеем $\alpha_{23}=1$, $\alpha_{13}=\alpha_{33}=\alpha_{21}=\alpha_{22}=0$, $\alpha_{11}=\alpha_{32}=\cos\beta$, $\alpha_{12}=-\alpha_{31}=\sin\beta$

где β – угол между осями x и ξ.

Касательные напряжения в системах скольжения имеют значения:

$$\tau_1(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}\left[(-1)^i\sin\beta+(-1)^j\cos\beta\right]$$

$$\tau_2(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}(-1)^j\cos\beta,\ \ \tau_3(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}(-1)^j\sin\beta \tag{4}$$

Отсюда легко видеть, что наибольшее касательное напряжение возникает в точках сечения, где касательная к контуру равно наклонена к кристаллическим осям x и y, то есть при $\sin\beta=\frac{\pi}{4}$, при этом расчетное максимальное напряжение τ_{max} определится так

$$\tau_{max}=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{3}} \tag{5}$$

Отметим, что, как показывает анализ, в случае линейно-упругого закона $\left(\Phi(x)=x/G\right)$ депланация поперечного сечения не имеет места $(u_\eta=0)$.

Рассмотрим случай, когда продольная ось стержня совпадает с осью [110]. Положим, что ось [001] перпендикулярна к продольной оси стержня η и повернута на угол β относительно оси ξ, а оси y и z составляют угол в 45^0 с осью η. В этом случае будем иметь $\alpha_{11}=\cos\beta$, $\alpha_{12}=-\alpha_{13}=-\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$, $\alpha_{21}=0$, $\alpha_{22}=\alpha_{23}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha_{31}=-\sin\beta$, $\alpha_{32}=-\alpha_{33}=-\frac{\cos\beta}{\sqrt{2}}$.

Касательные напряжения, соответственные системам скольжения, определяются по формулам

$$\tau_1(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}\left[\sin\beta+(-1)^j\frac{\cos\beta}{\sqrt{2}}\right]$$
$$\tau_2(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}\left[-2\sin\beta+(-1)^i\frac{\cos\beta}{\sqrt{2}}+(-1)^j\frac{\cos\beta}{\sqrt{2}}\right]$$
$$\tau_3(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}\left[\sin\beta+(-1)^i\frac{\cos\beta}{\sqrt{2}}\right] \tag{6}$$

Наибольшее абсолютное значение касательного напряжения достигается при $\beta=\pm\arcsin\sqrt{2/3}$, причем оно равно наибольшему значению касательного напряжения, возникающего в стержне вообще

$$\tau_{max}=\tau_{\xi\eta} \tag{7}$$

При использовании (1) можно показать, что депланация поперечного сечения здесь имеет место всегда, в том числе и при скольжении по линейному закону.

Рассмотрим случай, когда ось η совпадает с осью [111]. Принимая, кроме того, что ось x повернута на некоторый угол β относительно плоскости $\xi\eta$, получим следующие значения для коэффициентов α_{ij}

$$\alpha_{11}=\sqrt{2/3}\cos\beta,\quad \alpha_{21}=1/\sqrt{3},\quad \alpha_{31}=-\sqrt{2/3}\sin\beta$$

$$\alpha_{12}=-\sqrt{2/3}\sin(\beta+\pi/6),\quad \alpha_{22}=1/\sqrt{3},\quad \alpha_{32}=-\sqrt{2/3}\cos(\beta+\pi/6)$$

$$\alpha_{13}=\sqrt{2/3}\sin(\beta-\pi/6),\quad \alpha_{23}=1/\sqrt{3},\quad \alpha_{33}=\sqrt{2/3}\cos(\beta-\pi/6) \qquad (8)$$

Касательные напряжения, соответствующие системам скольжения, определяются по формулам

$$\tau_1(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{3}\left[\sqrt{3}\cos\beta+\sin\beta+(-1)^i\frac{\cos\beta}{\sqrt{3}}+\frac{(-1)^j}{2}\left(\frac{\cos\beta}{\sqrt{3}}+\sin\beta\right)\right]$$

$$\tau_2(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{3}\left[-2\sin\beta+\frac{(-1)^i}{2}\left(\frac{\cos\beta}{\sqrt{3}}-\sin\beta\right)+\frac{(-1)^j}{2}\left(\frac{\cos\beta}{\sqrt{3}}+\sin\beta\right)\right]$$

$$\tau_3(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{3}\left[\sin\beta-\sqrt{3}\cos\beta+\frac{(-1)^i}{2}\left(\frac{\cos\beta}{\sqrt{3}}-\sin\beta\right)-\frac{(-1)^j}{\sqrt{3}}\cos\beta\right] \qquad (9)$$

Наибольшее касательное напряжение в системах скольжения достигается при $\beta=\pi/4$, при этом оно равно $\tau_{\xi\eta}$, как это имело место и при ориентации [110] вдоль оси η.

Анализ данных позволяет заключить, что наиболее благоприятной ориентацией продольной оси тонкостенного стержня замкнутого профиля при кручении является ориентация [100], при этом несущая способность стержня будет в $\sqrt{3}$ раз превосходить его несущую способность при наименее благоприятной ориентации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cottrell A.H. Dislocation and Plastic Flow in Crystals. Oxford. 1953.
2. Розенберг В.М. Ползучесть металлов. – М.: Металлургиздат. 1967.
3. Симонян А.М. Исследования ползучести алюминиевых монокристаллов. – Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1979, т. 32, №6, с.27-40.
4. Симонян А.М., Симонян Н.М. К вопросу о реологии монокристаллов. – Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1985, т. 38, №4, с.38-48.
5. Симонян А.М. К вопросу расчета и проектирования элементов конструкций из монокристалла. – Изв. НАН Армении, Механика, 1998, т. 51, №3, с.40-50.
6. Чалмерс Б. Физическое металловедение. – М.: Металлургиздат, 1963.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
21.01.1998