ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 539.3

К УЧЕТУ ПОПЕРЕЧНОГО ОБЖАТИЯ В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա.Մովսիսյան
Բարակ սալերում ընդլայնական սեղմման հաշվառման մասին

Ընդունելով տեղափոխության բաղադրիչների համար գծային մոտավորություն ըստ բարձրության կոորդինատի, ընդհանուր անիզոտրոպ նյութից բարակ սալի համար ստացված են հավասարումներ հարթ և ծռման դեֆորմացիաների համար:

L.A.Movsisian
About consideration transversal press in thin plate

В [1,2] было обнаружено интересное явление для анизотропных цилиндрических оболочек (имеется в виду, когда материал оболочки имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную ее срединной поверхности) - при осесимметричных нагрузках она претерпевает кручение и т.д. При классической постановке для пластин при цилиндрическом изгибе подобных явлений нет. По сути, уравнения изгиба (устойчивости, колебания) для ортотропных и анизотропных пластин не отличаются. Понятно, что для анизотропных пластин есть необходимость более уточненной модели. И на самом деле. Если для ортотропных пластин учет поперечных сдвигов в зависимости от величин упругих постоянных расчетные величины могут разниться по сравнению с ними же, но полученные по классической теории [3], то уже для анизотропных пластин приводит помимо этого и к качественным изменениям. Обычно при уточнении классической теории изгиба пластин (например, [3]) пренебрегают поперечным обжатием. Здесь делается попытка учета влияния этого фактора на НДС анизотропной пластинки и показывается, что она с представленной точностью влияет на продольную деформацию (плоская задача). В основу предлагаемой модели ставится единственное предположение - линейность перемещений по высоте пластинки.

§1. Во избежание длинных формул с самого начала излагается одномерная задача. Координатная система помещена в срединной плоскости пластинки: x – по длине, z – по высоте, по y пластинка простирается до бесконечности и при этом ничего не зависит от y.

Предполагается, что перемещения имеют вид:

$$
\begin{aligned}
u_x &= u(x,t) + \frac{2z}{h} u_1(x,t) \\
u_y &= \mathrm{v}(x,t) + \frac{2z}{h} \mathrm{v}_1(x,t) \\
u_z &= w(x,t) + \frac{2z}{h} w_1(x,t)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Закон Гука при условии $\varepsilon_y = 0$ будет [4]

$$
\sigma_x = B_{11}\varepsilon_x + B_{13}\varepsilon_z + B_{16}\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yz} = B_{44}\varepsilon_{yz} + B_{45}\varepsilon_{xz} \tag{1.2}
$$

$$\sigma_z = B_{13}\varepsilon_x + B_{33}\varepsilon_z + B_{36}\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{xz} = B_{45}\varepsilon_{yz} + B_{55}\varepsilon_{xz}$$

$$\sigma_{xy} = B_{16}\varepsilon_x + B_{36}\varepsilon_z + B_{66}\varepsilon_{xy}$$

Дальнейшая процедура – стандартная. Вычисляются компоненты деформаций, а затем соотношение упругости: выражения для усилий и моментов. Здесь появляется необходимость двух новых величин –

$$M_{13} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} z\,dz, \quad T_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z\,dz \tag{1.3}$$

Приведенные уравнения уже выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + (X_1 - X_2) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{h}{2}(X_1 + X_2) - N_1 = \rho \frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x} + (Y_1 - Y_2) = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{h}{2}(Y_1 + Y_2) - N_2 = \rho \frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + (Z_1 - Z_2) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_{13}}{\partial x} - T_3 + \frac{h}{2}(Z_1 + Z_2) = \rho \frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

или в перемещениях

$$B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{26}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B_{13}\frac{2}{h}\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{h}(X_1 - X_2) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$B_{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B_{36}\frac{2}{h}\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{h}(Y_1 - Y_2) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$B_{55}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{6}{h}\left(B_{13}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{36}\frac{\partial v}{\partial x} + B_{33}\frac{2}{h}w_1\right) = \rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \tag{1.5}$$

$$B_{45}\frac{2}{h}\frac{\partial v_1}{\partial x} + B_{55}\left(\frac{2}{h}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{h}(Z_1 - Z_2) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.6}$$

$$B_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + B_{16}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{6}{h}\left[B_{55}\left(\frac{2}{h}u_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + B_{45}\frac{2}{h}v_1\right] + \frac{3}{h}(X_1 + X_2) = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$B_{16}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + B_{66}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{6}{h}\left[B_{45}\left(\frac{2}{h}u_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + B_{44}\frac{2}{h}v_1\right] + \frac{3}{h}(Y_1 + Y_2) = \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$$

Система (1.5) характеризует плоское состояние, а (1.6) - изгиб. Как видно из приведенных формул, учет поперечного обжатия в принятой точности влияет только на плоское напряженно-деформированное состояние. В то же время появляются новые статико-кинематические величины, в частности, при изгибе появляется кручение (v_1, M_{12}), перерезывающее усилие в сечениях $y = \text{const}$. Подобные явления наблюдаются и в плоской задаче.

Так как нас, в основном, интересует влияние поперечного обжатия на НДС пластинки, то преимущественно будем заниматься системой (1.5), к тому же, для исключения по возможности побочных факторов, будем изучать случай ортотропного материала.

Рассмотрим несколько тестообразных задач.

§2. Итак, уравнения продольных свободных колебаний ортотропной пластинки-полосы имеют вид

$$B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B_{13}\frac{2}{h}\frac{\partial w_1}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$B_{55}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}-\frac{6}{h}\left(B_{13}\frac{\partial u}{\partial x}+B_{33}\frac{2}{h}w_1\right)=\rho\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

В классической постановке второго уравнения вовсе нет и в первом отсутствует член с $\dfrac{\partial w_1}{\partial x}$.

Если искать решение (2.1) в виде бегущих волн, то для относительной фазовой скорости $\left(\lambda=\omega/ck,\ c=\sqrt{B_{11}/\rho}\right.$ получится

$$\lambda^2=\frac{1}{2}\left\{1+\alpha_{55}+\frac{12}{k^2h^2}\alpha_3\pm\right.$$

$$\left.\pm\left[\left(1+\alpha_{55}+\frac{12}{k^2h^2}\alpha_{33}\right)^2-4\left\{\alpha_{55}+\frac{12}{k^2h^2}\left(\alpha_{33}-\alpha_{13}^2\right)\right\}\right]\right. \tag{2.2}$$

где $\alpha_{ij}=B_{ij}/B_{11}$

Как правило, скорость, возникающая вследствие w_1, больше, чем основная (в классическом случае равна единице). Анализ влияния различных α_{ij} на скорости показывает, что наибольшее значение на них влияет α_{33}. В табл. 1 приведены значения λ_i для некоторых значений α_{33} при $l=10h$; $kl=2\pi$; $\alpha_{13}=0{,}3$; $\alpha_{55}=0{,}5$.

Таблица 1

α_{33}	0,1	1	10	100
λ_1	3,372	10,03	31,63	∞
λ_2	0,3632	0,9537	0,9954	1

Как правило, учет поперечного обжатия приводит к уменьшению основной скорости $(\lambda=1)$. В то же время, как видно из табл. 1, уже в поперечном направлении слабых материалов разница между величинами скоростей не такая уж разительная.

Представляет бессомненный интерес сравнения скоростей для продольных и изгибных движений. Уравнения изгибных движений для ортотропной пластинки будут

$$B_{55}\left(\frac{2}{h}\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

$$B_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{6}{h}B_{55}\left(\frac{2}{h}u_1+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

которые дают следующее дисперсионное уравнение:

$$\lambda^2=\frac{1}{2}\left\{1+\alpha_{55}\left(1+\frac{12}{k^2h^2}\right)\pm\left[\left(1-\alpha_{55}+\alpha_{55}\frac{12}{k^2h^2}\right)^2+\alpha_{55}\frac{48}{k^2h^2}\right]^{1/2}\right\} \quad (2.4)$$

Как влияет изменение α_{55} на скорость (частоту), можно посмотреть [3]. Здесь проведем лишь сравнение скоростей продольных и изгибных движений для изотропного материала ($B_{11}=\dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\alpha_{13}=\dfrac{\nu}{1-\nu}$, $\alpha_{33}=1$, $\alpha_{55}=\dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$, $\nu=0{,}3$).

Как видно из приведенной таблицы, большие скорости при продольном и изгибном движениях одного порядка, и вообще, характер изменения скоростей от h/l одинаковый. Следует отметить также, что если для тонких пластин скорости основных волн на порядок не отличаются, то уже для сравнительно больших h/l они одного порядка. Еще об одном. Часто при изучении изгибных колебаний вторым инерционным членом в (2.3) пренебрегают. Анализ показывает, что пренебрежение инерционными членами, как здесь, так и $\partial^2 w_1/\partial t^2$ в (2.1), приводит к увеличению величин скоростей основных волн (частот).

Таблица 2

	0	1/25	1/20	1/15	1/10	1/5
Плоские	∞	13,80	11,05	8,299	5,556	2,843
волны	1	0,9033	0,9031	0,9027	0,9018	0,8981
Изгибные		7,453	6,001	4,562	3,153	1,836
волны	0	0,07171	0,08907	0,1172	0,1695	0,2911

§3. Теперь изучим задачу удара о полубесконечную полосу. При нулевых начальных условиях будем рассматривать два случая: в сечении $x=0$ мгновенно прикладывается продольное усилие -

$$T_1=B_{11}h\frac{\partial u}{\partial x}+2B_{13}w_1=-PH(t),\ M_{13}=\frac{h^2}{6}B_{55}\frac{\partial w_1}{\partial x}=0 \quad (3.1)$$

и второй случай – прикладывается момент

$$T_1=0,\quad \frac{h^2}{6}B_{55}\frac{\partial w_1}{\partial x}=M \quad (3.2)$$

Система (2.1) с нулевыми начальными условиями и граничными условиями (3.1) или (3.2) решается операционным методом. В общем случае получить решения связаны с достаточно большими трудностями и здесь приведем лишь асимптотические формулы для больших и малых времен.

Для первой задачи при малых t усилие имеет вид

$$T_1 = -PH\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad c = \sqrt{B_{11}/\rho} \tag{3.3}$$

при больших

$$T_1 = -PH\left(t - \frac{x}{c'}\right), \quad c' = c\sqrt{\frac{B_{11}B_{33} - B_{13}}{B_{11}B_{33}}} \tag{3.4}$$

то есть для малых времен сжимающее усилие имеет вид классического решения, а для больших оно распространяется с меньшей скоростью.

Для второй задачи для малых времен имеем

$$T_1 = \frac{12M\alpha_{13}\sqrt{\alpha_{55}}}{h^2\left(1-\alpha_{55}\right)}\left[H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H\left(t - \frac{x}{c}\sqrt{\frac{B_{11}}{B_{55}}}\right)\right]\nu t \tag{3.5}$$

и

$$T_1 = \frac{12M\left(1-\alpha_{13}\right)}{h^2\alpha_{55}P}e^{-px}, \quad p = \sqrt{\frac{12}{h^2}\frac{B_{11}B_{33} - B_{13}^2}{B_{11} - B_{55}}} \tag{3.6}$$

как и следовало ожидать, для больших времен по длине полосы усилие затухает.

§4. Здесь приведем решение простой задачи обычного растяжения полосы, когда один край неподвижен, а на другом конце задается некоторое перемещение –

$$u = w_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{4.1}$$

$$u = u_0, \; w_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = l$$

Вот какие получаются выражения для продольного перемещения и усилия

$$u = \frac{C}{B_{11}}\left\{x - \frac{12\alpha_{13}^2}{h^2\alpha_{55}p^3}\left[\operatorname{sh}px - px + \frac{\left(1-\cos px\right)}{\operatorname{sh}pl}\left(1-\cos pl\right)\right]\right\} \tag{4.2}$$

$$T_1 = hC$$

$$C = u_0\frac{B_{11}}{l}\left\{1 - \frac{B_{13}^2}{\left(B_{11}B_{33} - B_{13}^2\right)pl}\left[pl + \operatorname{cth}pl\left(\operatorname{ch}pl - 2\right)\right]\right\}^{-1}$$

Напомним выражения этих величин при классической постановке

$$u = \frac{u_0 x}{l}, \quad T_1 = \frac{B_{11}h}{l}u_0$$

Фигурные скобки в выражении C больше единицы, и следовательно, полученное новое продольное усилие меньше, чем при классической постановке.

§5. В заключение рассмотрим задачу статической устойчивости полосы, при воздействии осевого сжатия: $T_1^0 = -P$ на концах полосы.

Параметрический член в этом случае имеет вид

$$Z_1 - Z_2 = -P\left(\frac{1}{h}\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{5.1}$$

Тогда из системы (1.6) после соответствующих процедур для свободно опертой полосы

$$x=0,\ x=l,\ w=D_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x}-D_{16}\frac{\partial v_1}{\partial x}=D_{16}\frac{\partial u_1}{\partial x}+D_{66}\frac{\partial v_1}{\partial x}=0 \tag{5.2}$$

получим выражение критического усилия

$$P_{\text{кр}}=2c_{44}\mu_m^2\frac{\left(D_{11}D_{66}-D_{16}^2\right)\mu_m^2+D_{11}c_{44}}{\left(D_{11}D_{66}-D_{16}^2\right)\mu_m^4+c_{44}\left[\left(D_{11}+2D_{66}\right)\mu_m^2+2c_{44}\right]} \tag{5.3}$$

$$D_{ij}=\frac{h^3}{12}B_{ij},\ c_{ij}=hB_{ij},\ \mu_m=\frac{m\pi}{l}$$

Как известно [5], при классической постановке критическое усилие достигает минимума при $m=1$, а максимума - по углу поворота (направления упругости по отношению координатных линий) при максимуме B_{11} по φ.

Однако, как видно из (5.3), здесь это вовсе не очевидно и могут и не быть.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А. О некоторых специфических особенностях анизотропных оболочек. -Изв. АН АрмССР, сер. физ-мат. наук, 1958, т.XI, №4, с. 137-144.
2. Мовсисян Л.А. К расчету анизотропной (неортотропной) цилиндрической оболочки вращения. - Изв. АН АрмССР, сер. физ-мат. н., 1959, т.XII, №4, с.89-107.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. -М.: Наука, 1987. 360с.
4. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. -М.: ГИТТЛ, 1957. 463с.
5. Саркисян В.С., Мовсисян Л.А. Об одном способе определения критических нагрузок анизотропных пластинок. -Инж.ж., 1965, т.5, вып.4, с.777-783.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
12.03.1998