ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 539.3

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

Белубекян В.М., Белубекян М.В.

Վ.Մ. Բելուբեկյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան
Սալերի տեսության եզրային պայմանների մասին

Սալերի տեսության եզրային պայմանները քննարկվում են խնդիրների ինքնահամալուծության սկզբունքների տեսակետից: Ս. Համբարձումյանի ճշգրտված տեսության համար ստացված են եզրային պայմանների տարբերակներ, որոնք բավարարում են ինքնահամալուծության սկզբունքին: Համեմատված է Կիրխհոֆի վարկածին համապատասխան եզրային պայմանների հետ: Մասնավորապես ցույց է տրված, որ ճշգրտված տեսությունը հնարավորություն է տալիս ուսումնասիրել սալի ծռման խնդիրը, երբ եզրում կիրառված է ղորող մոմենտ:

V.M. Belubekyan, M.V. Belubekyan
On the Boundary Conditions of Plate Theory

Вопросам установления граничных условий в теории пластин посвящена обширная литература. Отметим, в частности, работы [1-3]. В настоящей статье на основе принципа самосопряженности обсуждаются граничные условия пластин по теории Кирхгофа и уточненной теории С. Амбарцумяна. Показывается, что в теории Кирхгофа возможны два варианта граничных условий, реализующих самосопряженность задач и заменяющих естественные граничные условия равенства нулю изгибающего и крутящего моментов и поперечного усилия. Приводятся сравнения результатов решения конкретных задач для указанных вариантов граничных условий.

При решении задач по уточненным теориям возникают вопросы установления третьего граничного условия для задач с условиями закрепления, шарнирого опирания и скользящего контакта, которые устанавливаются, следуя условиям самосопряженности. Показывается также, что для свободного края три естественные граничные условия не реализуют самосопряженности задач. Более того, если требовать равенство нулю изгибающего момента и поперечного усилия, нельзя получить третье условие, реализующее самосопряженность задачи. Для свободного края, при условии равенства нулю изгибающего момента и на основе принципа самосопряженности, установлены остальные два граничных условия.

1. Рассматривается однородное уравнение для прогиба прямоугольной пластины $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ -h \le z \le h)$ по теории Кирхгофа

$$\Delta^2 w = 0 \tag{1.1}$$

В принципе, вместо (1.1) можно рассматривать либо уравнение поперечных колебаний, либо уравнение устойчивости сжатой пластины.

Следующие выражения для изгибающего момента, перерезывающего усилия и крутящего момента будут использованы

$$M_1 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad N_1 = -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w$$

$$H = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \tag{1.2}$$

Принимается, что на кромках пластины $y = 0,\ b$ осуществляются условия шарнирного опирания

$$w = 0,\ \partial^2 w / \partial y^2 = 0$$

Тогда общее решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\sin\lambda_n y,\;\; \lambda_n = n\pi/b \tag{1.3}$$

Подстановка (1.3) в (1.1) приводит к уравнениям, определяющим $X_n(x)$

$$L(X_n)\equiv X_n^{IV}-2\lambda_n^2 X_n^{II}+\lambda_n^4 X_n=0$$

Рассмотрим всевозможные варианты граничных условий для $X_n(x)$, исходя из принципа самосопряженности. Пусть X_n удовлетворяет некоторым однородным граничным условиям при $x=\text{const}$. Пусть функция $U(x)$ имеет производные вплоть до четвертого порядка и удовлетворяет тем же граничным условиям, что и $X_n(x)$. Тогда задача определения $X_n(x)$ будет самосопряженной, если имеет место равенство

$$\int_0^a UL(X_n)dx=\int_0^a X_n L(U)dx \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что для самосопряженности задачи достаточно, чтобы граничные условия при $x=\text{const}$ удовлетворяли следующему условию:

$$UX_n^{III}-U^I X_n^{II}+U^{II}X_n^I-U^{III}X_n-2\lambda_n^2(UX_n^I-U^I X_n)=0 \tag{1.5}$$

Если принять, что при $x=\text{const}$ удовлетворяется условие $w=0$, то из (1.3) и (1.5) получается следующее условие самосопряженности:

$$-U^I X_n^{II}+U^{II}X_n^I=0$$

Отсюда очевидно, что задача будет самосопряженной, если

$$\alpha X_n^{II}+\beta X_n^I=0 \quad\quad \text{при } x=\text{const} \tag{1.6}$$

где α и β – произвольные постоянные.

Из (1.6), согласно (1.3), в частном случае $\beta=0$ получаются условия заделанного края

$$w=0,\;\partial w/\partial x=0 \tag{1.7}$$

и в случае $\alpha=0$ условия шарнирного опирания

$$w=0,\;M_1=0 \tag{1.8}$$

Аналогично, в случае принятия условия $\partial w/\partial x=0$ при $x=\text{const}$ получаются условия заделанного края (1.7) и скользящего контакта

$$\partial w/\partial x=0,\;N_1=0 \tag{1.9}$$

Если считать, что на краю пластинки изгибающий момент равен нулю, то получаются либо условия шарнирного опирания (1.8), либо общепринятые условия для свободного края

$$M_1=0,\;\widetilde{N}_1=0 \tag{1.10}$$

где $\widetilde{N}_1=N_1+\partial H/\partial y$ – обобщенная перерезывающая сила.

При принятии условия равенства нулю крутящего момента из принципа самосопряженности следует

$$H=0,\;N_1=0 \tag{1.11}$$

Условия (1.11) в случае однородных граничных условий совпадают с условиями (1.9) для скользящего контакта. Однако, если на краю задачи крутящий момент $H = H_0(y)$, то из (1.6) следует, что, приняв также $N_1 = 0$ как второе граничное условие, можно решать задачу кручения пластинки на основе теории Кирхгофа.

Наконец, считая на краю равной нулю перерезывающую силу, получим условия либо скользящего контакта (1.9), либо

$$N_1 = 0, \quad \Delta w = 0 \tag{1.12}$$

При решении задач изгиба пластин по теории Кирхгофа применяются все вышеперечисленные граничные условия, кроме (1.12). Возможно, условия (1.12) для некоторых задач окажутся некорректными.

Естественно считать, что на свободном краю пластинки M_1, N_1 и H равны нулю. Однако в теории пластин Кирхгофа необходимы только два условия. Поэтому считается, что для свободного края верны только условия (1.10). Но тогда ставится ограничение на класс задач, которые можно решать на основе теории Кирхгофа. В частности, нельзя решать задачи, если на этом краю приложены либо перерезывающая сила, либо крутящий момент.

Из принципа самосопряженности следует, что на свободном краю наряду с условием (1.10) можно использовать также альтернативные условия (1.11) или (1.12). Более конкретно: если на краю $x = \text{const}$ задан изгибающий момент $M_1 = M_0(y)$, то второе условие, согласно (1.10), есть $\widetilde{N}_1 = 0$, если задан крутящий момент $H = H_0(y)$, то согласно (1.11) $H = 0$, если $N_1 = N_0(y)$, то возможны два варианта – согласно (1.11) $H = 0$, согласно (1.12) $\Delta w = 0$.

2. Примеры. Пусть прямоугольная пластинка изгибается перерезывающим усилием, приложенным на краю. Общие граничные условия следующие:

$$y = 0, b: \; w = 0, \;\; \partial^2 w / \partial y^2 = 0$$
$$x = a: \quad w = 0, \;\; \partial w / \partial x = 0$$

На краю $x = 0$ сравниваются два варианта условий:
согласно (1.11)

$$H = 0, \;\; N_1 = N_0 \sin \lambda_1 y \tag{2.1}$$

и согласно (1.12)

$$N_1 = N_0 \sin \lambda_1 y, \;\; \Delta w = 0 \tag{2.2}$$

Из решения задачи в приближении $[2\pi a / b]^2 << 1$ для прогиба пластинки в точке $x = 0$, $y = b/2$ получаются следующие выражения:

$$w_0 = \frac{3ab^2}{2\pi^2 D} N_0, \;\; w_0 = \frac{a^3}{6D} N_0 \tag{2.3}$$

соответствующие вариантам граничных условий (2.1) и (2.2). Очевидно, разница существенна. Выражения из (2.3) совпадают, если $b/a = \pi/3$ (приблизительно квадратная пластинка).

Рассмотрим задачу кручения полубесконечной пластинки-полосы. Уравнение (1.1) решается при следующих граничных условиях:

$$y = 0, b: \; w = 0, \;\; \partial^2 w / \partial y^2 = 0$$

$$x=0:\quad H=H_0(y),\ N_1=0,\ \lim_{x\to\infty} w=0 \tag{2.4}$$

Решение задачи представляется в виде (1.3). Тогда, очевидно, что необходимо следующее представление:

$$H_0(y)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\lambda_n y \tag{2.5}$$

Однако условие для крутящего момента удовлетворится, если $a_0=0$, что существенно ограничивает класс возможных функций $H_0(y)$. Более общее решение можно получить, если условие $H=H_0(y)$ согласно (1.2) представить в виде

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{1}{(1-\nu)D}\int_0^y H_0(\zeta)d\zeta \tag{2.6}$$

Тогда при $y=0$ имеется соответствие с граничным условием $w=0$, но при $y=b$ это соответствие в общем случае нарушается. Если же

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{1}{(1-\nu)D}\int_y^b H_0(\zeta)d\zeta \tag{2.7}$$

то нарушится соответствие при $y=0$.

Используя представление (2.5) в выражениях (2.6) и (2.7), а также разложения

$$y=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n}\sin\lambda_n y,\quad b-y=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n y$$

получим решение задачи

$$w=-\frac{1}{(1-\nu)D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\delta_n a_0-a_n}{\lambda_n^2}\exp(-\lambda_n x)\sin\lambda_n y \tag{2.8}$$

где $\delta_n=(-1)^n$ для варианта (2.6) и $\delta_n=1$ для (2.8). В случае $a_0=0$ оба решения совпадают. Если же $a_0\neq 0$, то решения существенно разные. В частности, если $a_n=0$, то

$$w\left(0,\frac{b}{2}\right)=\pm\frac{2a_0 b}{(1-\nu)\pi D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\quad\left(\sum\approx 0{,}916\right) \tag{2.9}$$

Рассмотрим вопрос существования "локальной" неустойчивости полубесконечной пластинки-полосы, сжатой по направлению координаты x. Уравнение устойчивости пластинки имеет вид

$$D\Delta^2 w+P\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \tag{2.10}$$

Пусть края $y=0,b$ шарнирно оперты. Требуется найти решение уравнения (2.10), удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to\infty} w=0 \tag{2.11}$$

при различных граничных условиях при $x=0$.

Представление (1.3) приводит к решению уравнения

$$X_n^{IV} - 2\lambda_n^2 X_n^{II} + \lambda_n^4(1-\alpha_n^2)X_n = 0, \ \alpha_n^2 = \frac{P\lambda_n^2}{D} \tag{2.12}$$

Очевидно, что уравнение (2.12) будет иметь решение, удовлетворяющее условию (2.11), если

$$0 < \alpha_n < 1 \tag{2.13}$$

Тогда

$$X_n = A_n \exp(-\lambda_n \beta_1 x) + B_n \exp(-\lambda_n \beta_2 x) \tag{2.14}$$

где

$$\beta_1 = \sqrt{1+\alpha_n}, \ \ \beta_2 = \sqrt{1-\alpha_n} \tag{2.15}$$

При удовлетворении граничным условиям $(x=0)$ заделки (1.7), шарнирного опирания (1.8) и скользящего контакта (1.9), легко получить, что не существует решения, удовлетворяющего условию (2.13) и следовательно, (2.11). Т.е. в этих случаях "локальная" неустойчивость невозможна.

Для граничного условия свободного края (1.10) характеристическое уравнение задачи приводится к виду

$$(\beta_1 - \beta_2)\left[\beta_1^2\beta_2^2 + 2(1-\nu)\beta_1\beta_2 - \nu^2\right] = 0 \tag{2.16}$$

Легко получить, что уравнение (2.16) всегда имеет решение $(-1 < \nu < 0{,}5)$, удовлетворяющее условию (2.13). Значение минимальной критической силы получается в виде

$$P_* = \frac{Db^2}{\pi^2}\left[2 - \nu + \sqrt{(1-\nu)^2 + \nu^2}\right] \tag{2.17}$$

Следует отметить, что для варианта граничных условий свободного края (1.12) решение типа локальной потери устойчивости также не существует.

3. Теория пластин, учитывающая поперечные сдвиговые деформации и инерции вращения, приводит к повышению порядка уравнений изгиба по сравнению с теорией Кирхгофа. Отсюда появляется проблема установления третьего дополнительного условия на краю пластины для заделки (1.7), шарнирного опирания (1.8) и скользящего контакта (1.9). Кроме того, ставится вопрос: удовлетворяют ли граничные условия равенства нулю изгибающего и крутящего моментов и перерезывающей силы принципу самосопряженности $(M_1 = 0, \ N_1 = 0, \ H = 0)$.

Однородные уравнения теории изгиба пластин С.А. Амбарцумяна [4], в которой, в частности, для поперечных сдвиговых деформаций принято

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)\varphi(x,y), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)\psi(x,y) \tag{3.1}$$

имеют вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

$$-D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w + \frac{4(1-\nu)}{5}D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{8Gh}{3}\varphi$$

$$-D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-\frac{4(1-\nu)}{5}D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\frac{8Gh}{3}\psi \tag{3.2}$$

При помощи введения функции [4-6]

$$\Phi=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{3.3}$$

получаются раздельные уравнения, определяющие функцию прогиба w и Φ

$$\Delta^2 w=0\,,\ \Delta\Phi-\frac{5}{2h^2}\Phi=0 \tag{3.4}$$

В общем случае функции w и Φ связаны посредством граничных условий.

Следует отметить, что перезывающие усилия выражаются через функции φ и ψ следующим образом:

$$N_1=\frac{8Gh}{3}\varphi\ \ ,N_2=\frac{8Gh}{3}\psi \tag{3.5}$$

Усилия и моменты также выражаются через функции w и Φ. В частности

$$M_1=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{4h^2}{5}\frac{\partial\Delta w}{\partial y}-\frac{16}{25}(1-\nu)h^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right]$$

$$H=-D(1-\nu)\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[w-\frac{4h^2}{5(1-\nu)}\Delta w\right]-\frac{4}{5}\left(\Phi-\frac{4h^2}{5}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)\right\}$$

$$\varphi=-\frac{h^2}{2(1-\nu)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Delta w-\frac{4(1-\nu)}{5}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right] \tag{3.6}$$

В процессе преобразования выражения изгибающего момента M_1 существенно используется первое уравнение из системы (3.2) с тем, чтобы производная по x не превышала второй порядок.

Пусть на краях $y=0,\,b$ прямоугольной пластинки заданы условия

$$w=0,\ \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,\ \ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0 \tag{3.7}$$

Тогда решения уравнения (3.4) можно представить в виде

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\sin\lambda_n y\,,\ \ \Phi=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)\cos\lambda_n y \tag{3.8}$$

что соответствует решению по классической теории в случае шарнирного опирания.

Подстановка (3.8) в (3.4) приводит к следующим уравнениям:

$$L_1(f_n)\equiv f_n^{IV}-2\lambda_n^2 f_n^{II}+\lambda_n^4 f_n=0$$

$$L_2(g_n)\equiv g_n^{II}-\left(\lambda_n^2+\frac{5}{2h^2}\right)g_n=0 \tag{3.9}$$

Рассмотрим различные варианты линейных однородных граничных условий для системы функций f_n, g_n на краю $x=\mathrm{const}$. Пусть соответствующая система функций u, v удовлетворяет тем же граничным условиям. Задача будет самосопряженной, если

$$\int_0^a \left[uL_1(f_n) + vL_2(g_n)\right]dx = \int_0^a \left[f_n L_1(u) + g_n L_2(v)\right]dx \tag{3.10}$$

Отсюда следует условие самосопряженности при $x = \text{const}$

$$uf_n^{III} - u^I f_n^{II} + u^{II} f_n^I - u^{III} f_n - \lambda_n^2 (uf_n^I - u^I f_n) + vg_n^I - v^I g_n = 0 \tag{3.11}$$

Пусть на краю $x = \text{const}$ заданы условия заделки (1.7). С учетом представлений (3.8) из (3.11) получаются два варианта граничных условий, удовлетворяющих условию самосопряженности

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \Phi = 0 \tag{3.12}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \tag{3.13}$$

В случае, когда заданы условия (1.8), которые с учетом (3.8) имеют вид

$$f_n = 0, \quad f_n^{II} + \frac{19(1-\nu)}{25}\lambda_n h^2 g_n^I = 0$$

получаются следующие два варианта граничных условий:

$$w = 0, \; M_1 = 0, \; \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \tag{3.14}$$

$$w = 0, \; M_1 = 0, \; \Phi + \frac{16(1-\nu)}{25}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \tag{3.15}$$

Если принять, что на краю $x = \text{const}$ заданы условия скользящего контакта (1.9), то для уточненной теории возможны следующие варианты:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \; N_1 = 0, \; \Phi = 0 \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad N_1 = 0, \quad \frac{4(1-\nu)}{5}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \tag{3.17}$$

Необходимо отметить, что в случае вариантов граничных условий (3.12)- (3.14), (3.16) задачи определения функций w и Φ отделяются.

Наконец, рассмотрим условия для свободного края пластинки. Вначале предполагается, что при $x = \text{const}$ $M_1 = 0, \; N_1 = 0$. Соответствующие условия для функций f_n и g_n запишутся в виде

$$\left(1 + \frac{4}{5}\lambda_n^2 h^2\right) f_n^{II} - \lambda_n^2 \left(\nu + \frac{4}{5}\lambda_n^2 h^2\right) f_n + \frac{16(1-\nu)}{25}\lambda_n h^2 g_n^I = 0$$

$$f_n^{III} - \lambda_n^2 f_n^I + \frac{4(1-\nu)}{5}\lambda_n g_n = 0 \tag{3.18}$$

Показывается, что не существует третьего дополнительного совместно с (3.18) условия, удовлетворяющего условию самосопряженности (3.11). Если же потребовать, чтобы выполнялось условие равенства нулю только изгибающего момента, то из (3.11) можно получить остальные два условия, которые вместе с $M_1 = 0$ будут удовлетворять принципу самосопряженности. Окончательно указанные условия для свободного края будут иметь вид

$$M_1 = 0$$

$$\frac{16(1-\nu)}{25} h^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \Phi - \frac{4h^2}{5} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{16(1-\nu)}{25} h^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (2-\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{4h^2}{5} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} = 0 \tag{3.19}$$

П р и м е ч а н и е. Причина появления различных вариантов граничных условий, удовлетворяющих принципу самосопряженности, заключается в постановке соответствующей пространственной задачи теории упругости. Например, для пространственной задачи возможны следующие два варианта граничных условий: при $x = \text{const}$: условия полной заделки – равенство нулю всех компонент перемещения $(u_1 = u_2 = u_3 = 0)$ и условия частичной заделки $(u_1 = u_3 = 0, \sigma_{12} = 0)$. В обоих случаях в рамках теории Кирхгофа получаются одинаковые условия (1.7). Уточненная же теория учитывает различие этих граничных условий в соответствии с вариантами (3.12), (3.13).

Рассмотрим второй способ приведения системы уравнений уточненной теории пластин (3.2) к раздельным уравнениям. Новая функция вводится следующим способом [7]:

$$\varphi = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \psi = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{3.20}$$

откуда система (3.2) заменяется уравнениями

$$\Delta^2 w = 0, \quad \Delta F = 0 \tag{3.21}$$

При этом выражения для усилий, в частности, имеют вид

$$N_1 = \frac{8Gh}{3} \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$M_1 = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{4(1-\nu)}{5} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]$$

$$H = -(1-\nu) D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{4}{5} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) \tag{3.22}$$

Поступая таким же образом, как и в случае уравнений относительно функций w и Φ (3.4), получим следующие варианты граничных условий. Граничные условия, соответствующие условиям заделки теории пластин Кирхгофа при $x = \text{const}$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad F = 0 \tag{3.23}$$

или

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{3.24}$$

Шарнирное опирание

$$w=0,\ M_1=0,\ F=0 \tag{3.25}$$

или

$$w=0,\ M_1=0,\ \frac{\partial}{\partial x}\left[F+\frac{4(1-\nu)}{5}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]=0 \tag{3.26}$$

Скользящий контакт

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad N_1=0,\quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \tag{3.27}$$

Свободный край

$$M_1=0,\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{5}{4(1-\nu)}F\right]=0,\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{5}{2(1-\nu)}F\right]=0 \tag{3.28}$$

4. Рассмотрим еще одно новое полезное представление уравнений уточненной теории С.А. Амбарцумяна.

Пусть на лицевой поверхности пластины $z=h$ действует поперечная нагрузка интенсивности $q(x,y)$. Уравнение изгиба пластин с учетом поперечных сдвигов [7] можно представить в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}=-\frac{3}{8Gh}q$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Delta w+\frac{4}{5}(1-\nu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{8}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)=\frac{2(1-\nu)}{h^2}\varphi$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-\frac{4}{5}(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{8}{5}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)=\frac{2(1-\nu)}{h^2}\psi \tag{4.1}$$

При использовании преобразования

$$\varphi=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial \Psi}{\partial y},\ \psi=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{4.2}$$

система уравнений (4.1) приводится к следующему виду:

$$\Delta F=-\frac{3}{8Gh}q$$

$$\Delta^2 w-\frac{8}{5}\Delta^2 F+\frac{2(1-\nu)}{h^2}\Delta F=0$$

$$\Delta^2\Psi-\frac{5}{2h^2}\Delta\Psi=0 \tag{4.3}$$

Общий порядок (по производным) уравнений уточненной теории пластин равняется шести, чем и определяется наобходимость трех граничных условий на краю пластины. Система уравнений (4.3) имеет повышенный порядок (десять), что обусловлено преобразованием (4.2). Поэтому вместо системы (4.3) рассматривается следующая система уравнений шестого порядка:

$$\Delta F=-\frac{3}{8Gh}q$$

$$\Delta w+\frac{2(1-\nu)}{h^2}F=-\frac{3}{5Gh}q$$

$$\Delta\Psi - \frac{5}{2h^2}\Psi = 0 \tag{4.4}$$

Очевидно, что решения системы (4.4) являются также решениями для (4.3). Обратное утверждение требует доказательства, которое нам не удалось получить.

Моменты и перерезывающие усилия выражаются через функции w, F и Ψ следующим образом:

$$M_1 = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{8(1-\nu)}{5}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\right]$$

$$M_2 = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{8(1-\nu)}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\right]$$

$$H = -(1-\nu)D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{4}{5}\left(2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)\right] \tag{4.5}$$

$$N_1 = \frac{8Gh}{3}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right), \quad N_2 = \frac{8Gh}{3}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)$$

Аналогичные предыдущему пункту выкладки показывают, что граничные условия при $x = \text{const}$, удовлетворяющие принципу самосопряженности, следующие:

условия, соответствующие закрепленному краю

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \Psi = 0 \tag{4.6}$$

или

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \tag{4.7}$$

шарнирному опиранию

$$w = 0, \quad M_1 = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \tag{4.8}$$

или

$$w = 0, \quad M_1 = 0, \quad 2(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{5}{h^2}\Psi = 0 \tag{4.9}$$

скользящему контакту

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad N_1 = 0, \quad \Psi = 0 \tag{4.10}$$

или

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad N_1 = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} - (2-\nu)\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{4.11}$$

свободному краю

$$M_1 = 0, \quad 2(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{5}{4h^2}\Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\frac{5(2-\nu)}{4h^2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3}=0 \qquad (4.12)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближений теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.-ПММ, 1962, 26, вып. 4, с. 668-686.
2. Агаловян Л.А. О граничных условиях в теории анизотропных пластин.-Уч. записки ЕГУ, Естественные науки, 1978, №3, с.21-30
3. Васильев В.В. К дискуссии о классической теории пластин.-МТТ, 1995, №4, с. 140-151.
4. Амбарцумян С.А. Теория анозотропных пластин.–М.: Наука, 1987. 360с.
5. Хачатрян А.А. Некоторые задачи изгиба трансверсально-изотропных круглых пластинок. -МТТ, 1966, №3, с. 110-115.
6. Ананян А.К. Влияние уточненных граничных условий в задачах изгиба и устойчивости прямоугольных пластин с учетом поперечных сдвигов (канд. диссерт.) - Ереван, Ин-т механики, 1997.
7. Белубекян В.М. Определение коэффициентов особенностей в некоторых задачах теории упругости для секториальных тел. (канд. диссерт.) - Ереван, ЕГУ, 1991.

Ереванский государственный университет
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 18.12.1997