ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 551.31

ДВИЖЕНИЕ ОПОЛЗНЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ НА СКЛОНАХ ВОЗВЫШЕННОСТЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДОЖДЯ

Сагомонян А.Я.

Ա. Յա. Սագոմոնյան
Բարձունքների լանջերին առաջացած սողվածքների շարժումը անձրևի ազդեցության տակ

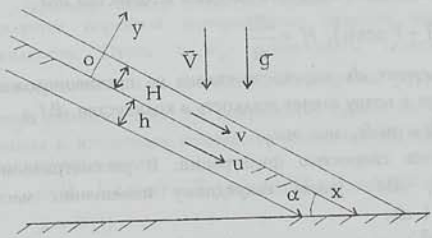
Օգտագործելով առաձգապլաստիկ միջավայրերի հատկությունները, հաջորդական մոտավորությունների եղանակով կառուցված են անալիտիկ լուծումներ, որոնք որոշում են շերտերում շարժման բնութագրիչները, նրանց հաստությունները և զանգվածի ծախսը:

A.Ya.Sagomonian
The motion of the landslip appearing on the slope of the hill under the rain action

Жидкость капель дождя, проникая в поры почвы, образует водонасыщенную среду, которая моделируется вязкопластической средой. При определенных условиях под действием силы тяжести в вязкопластической среде образуется тонкий слой, примыкающий к поверхности склона, в котором материал приходит в движение — это явление и названо в работе оползнем. Непроникшая часть жидкости капель дождя образует над поверхностью склона слой жидкости, также стекающей к подножию склона. Поверхность склона, являющаяся поверхностью, на которой происходит взаимодействие сред в склонах, предполагается неизменной. Исследование движения сред в слоях приводится на основе уравнений Рейнольдса для движения в тонких слоях и малым значением кривизны границ слоев. Используя свойства вязкопластических сред методом последовательных приближений, построены аналитические решения, определяющие параметры движения в слоях, их толщины, а также массовый расход.

Оползень - скольжение массы грунта (почвы) вниз по поверхности склона вследствие нарушения равновесия под действием силы тяжести. Здесь рассматривается случай, когда нарушение равновесия происходит из-за сильного увлажнения почвы, вызванного дождем (ливнем). Жидкость капель дождя проникает в мельчайшие поры почвы, ослабляя ее связанность (силы сцепления). В результате образуется водонасыщенная (увлажненная) почва с физико-механическими свойствами, отличными от свойств почвы до дождя: свойствами пластичности и вязкости [1,2]. В этой сильно увлажненной среде образуется относительно тонкий слой, примыкающий к поверхности склона, в котором частицы среды стекают вниз к подножию возвышенности. Поток увлажненной почвы в слое вместе с материалом почвы уносит также жидкость, содержащуюся в порах почвы. Можно считать, что обе фазы в слое движутся с одинаковой скоростью. Задача состоит в том, чтобы определить движение увлажненной почвы в слое и его толщину. Ниже приняты следующие предположения. Увлажненная почва моделируется однородной несжимаемой линейно-вязкопластической средой. Допускается существование тонкого слоя подвижной вязкопластической среды, примыкающей к поверхности склона. Толщина слоя подлежит определению [3,4]. Оползни возможны в процессе дождя и могут продолжаться после его окончания. В первом случае необходимо определить движение слоя непроникшей в почву жидкости над поверхностью склона, так же стекающей к подножию. Так же, как и в работе [4], здесь поверхность склона считается неограниченной плоскостью, наклоненной к горизонтальной плоскости Земли под углом α (фиг.1), т.е. задача рассматривается без учета граничных условий на вершине и у подножия возвышенности.

§1. **Движение оползня, возникающего в период дождя.** В этот период часть жидкости капель, не проникшей в почву, образует над поверхностью склона сплошной слой воды, стекающей вниз к подножию. Благодаря диффузии и другим причинам, отдельные частицы почвы с поверхности склона попадают в слой жидкости и уносятся потоком. Определение массы уносимых частиц входит в проблему водной эрозии. Обычно концентрация этих частиц в жидкости имеет порядок 10^{-4}-10^{-6}. В рассматриваемой здесь задаче этой концентрацией пренебрегается. В дождевом пространстве над поверхностью склона объемная концентрация жидкости ω капель дождя постоянна и равномерно распределена. Скорость капель V постоянна и направлена одинаково с вектором ускорения g силы тяжести. Рассматривается плоскопараллельное движение среды. Начало координат системы (x, y) берется на поверхности склона, ось x направлена вдоль поверхности склона вниз, ось y - вдоль внешней нормали n к этой поверхности (фиг.1). Движение жидкости в слое над поверхностью склона и в слое вязкопластической среды подчиним условиям, на основе



Фиг. 1

которых получены известные приближенные уравнения Рейнольдса для движения вязкой жидкости в тонком слое [5, 6]. В обоих слоях скорости частиц вдоль оси x предполагаются однонаправленными [5]. Уравнения движения вдоль оси y в слоях без учета сил инерции имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos\alpha, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho_0 g \cos\alpha, \quad \rho_0 = m\rho + (1-m)\rho_1 \tag{1}$$

где p — давление в средах; ρ и ρ_1 — плотности жидкости и материала почвы; ρ_0 — плотность вязкопластической среды; m — объемная концентрация пор в почве (пористость) предполагается постоянной. В обоих слоях давление не зависит от координаты x. Уравнения движения частиц вдоль оси x в слое жидкости и в слое вязкопластической среды, соответственно, записываются в виде

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}=\rho g\sin\alpha+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y},\ \tau_{xy}=\eta\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2}$$

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}=\rho_0 g\sin\alpha+\frac{\partial\tau^0_{yx}}{\partial y},\ \tau^0_{yx}=k+\mu\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}>0 \tag{3}$$

Здесь v и u – компоненты скорости вдоль x в слоях жидкости и вязкопластической среды; η и μ – постоянные коэффициенты вязкости сред в этих слоях; τ_{xy} и τ^0_{yx} – напряжения сдвига; k – предел текучести. В ряде работ, например, в [7], принимается, что скорость проникания жидкости в поры почвы на поверхности склона линейно зависит от давления на этой поверхности. Если w_0 – истинная скорость проникания в поры, $H(t)$ - толщина жидкого слоя, то при таком предположении можно написать равенство

$$w_0=k_0\rho g\cos\alpha H(t) \tag{4}$$

где k_0 – постоянный коэффициент пропорциональности. Пусть $y(t)$ обозначает границу между слоем жидкости и пространством дождя. Эта граница является подвижной поверхностью параллельной плоскости склона (фиг. 1). Пусть ds - элемент плоскости $y=H(t)$. Через ds в единицу времени в слой втекает жидкость капель в количестве dM_1:

$$dM_1=\rho\omega ds\left(\dot H+V\cos\alpha\right),\ \dot H=\frac{dH}{dt}$$

За это время через элемент ds плоскости склона на противоположной стороне из жидкого слоя в почву втечет жидкость в количестве dM_2:

$$dM_2=\rho m w_0 ds=\rho w ds,\ w=mw_0$$

Величина w называется скоростью фильтрации. В рассматриваемой задаче разность dM_1-dM_2 равна секундному изменению массы жидкости в объеме $H\cdot 1\cdot ds$:

$$dM_1-dM_2=\frac{\partial}{\partial t}(\rho H ds)=\rho\dot H\,ds$$

После подстановок из этого равенства для скорости движения границы $y=H(t)$ получим

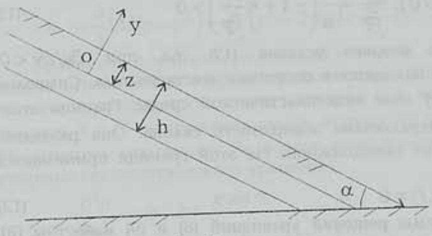
$$\dot H=\frac{\omega V\cos\alpha-mk_0\rho g\cos\alpha H(t)}{1-\omega} \tag{5}$$

Интегрирование уравнений (5) при $t=0,\ H=0$ приводит к зависимости

$$B-H(t)=B\exp(-At),\quad A=\frac{mk_0\rho g\cos\alpha}{1-\omega},\ B=\frac{\omega V}{mk_0\rho g} \tag{6}$$

Решение (6) имеет асимптоту

$$t=\infty:\ H=B \tag{7}$$



Фиг. 2

В реальных условиях предел текучести k в формуле (3) зависит от объемной концентрации (пористости) пор m, определяющей водонасыщенность (увлажненность) почвы. Можно предположить, что пористость убывает с глубиной почвы, а предел текучести k убывает вместе с увеличением пористости [2]. Ниже предел текучести считается постоянной величиной. Тогда уравнения (2) и (3) соответственно можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -a + \frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t},\ a = \frac{g\sin\alpha}{\nu},\ \nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -b + \frac{1}{\nu_0}\frac{\partial u}{\partial t},\ b = \frac{g\sin\alpha}{\nu_0},\ \nu_0 = \frac{\mu}{\rho_0} \tag{9}$$

Граница между областью дождя и слоем жидкости над склоном является пористой поверхностью разрыва параметров несжимаемой жидкости. Пусть v_s, w_s - компоненты скорости по осям x, y непосредственно за поверхностью разрыва; p_s, p_a - давления за и перед этой поверхностью; τ_s - напряжение сдвига на ней. Законы сохранения массы и изменения количества движения на пористой границе разрыва запишутся в виде

$$\omega(\dot H + V\cos\alpha) = \dot H + w_s, \rho\omega(\dot H + V\cos\alpha)(V\cos\alpha - w_s) = p_s - p_a$$

$$y = H(t)$$

$$\rho\omega(\dot H + V\cos\alpha)(V\sin\alpha - v_s) = \tau_s,\ \tau_s = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_s \tag{10}$$

Анализ условий (10) с учетом пористости границы $y = H(t)$, на которой ω имеет порядок $10^{-4} - 10^{-6}$, приводит к приближенным граничным условиям

$$y = H(t):\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ или } v_s = V\sin\alpha;\ p_s = p_a \tag{11}$$

Эти приближения принимаются только для упрощения получаемых выражений для параметров среды. Принципиально не составляет труда пользоваться условиями (10). На границе между слоем жидкости и слоем вязкопластической среды - поверхности склона - должны выполняться условия равенства скоростей частиц сред и напряжений сдвига

$$y = 0: \ u = \mathrm{v} = U(t), \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\left(-k + \eta \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right) > 0 \tag{12}$$

При невыполнении второго условия (12), т.е. при $\partial u / \partial y < 0$, вязкопластическая среда находится в состоянии жесткого тела. Символом $h(t)$ обозначим толщину слоя вязкопластической среды. Граница этого слоя $y = -h(t)$ также параллельна поверхности склона. Она разделяет слой подвижной среды от неподвижной. На этой границе принимается условие

$$y = -h(t): \ u(-h, t) = 0 \tag{13}$$

Математические методы решений уравнений (8) и (9) известны [8]. Здесь эти уравнения решаются методом последовательных приближений, изложенным в работе [9]. Для уравнения (8) за первое приближение берется решение квазастационарного уравнения

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2} = -a, \ a = \frac{g \sin\alpha}{\nu}, \ \nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{14}$$

После двукратного интегрирования его по y получим

$$\mathrm{v} = -\frac{a}{2}y^2 + C_1 y + C_2, \ \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} = -ay + C_1$$

Функции времени C_1, C_2 определяются первыми равенствами в условиях (11) и (12). В результате будем иметь

$$\mathrm{v} = a\left(Hy - \frac{y^2}{2}\right) + U(t), \ \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} = a(H - y) \tag{15}$$

где скорость U на поверхности склона подлежит определению. Если же в условиях (11) воспользоваться вторым равенством, то придем к выражению

$$\mathrm{v} = \frac{ay}{2}(H - y) + V\frac{y}{H}\sin\alpha + \left(1 - \frac{y}{H}\right)U(t)$$

Составим производную по времени от решения (15) и подставим ее в правую часть уравнения (8) вместо $\partial \mathrm{v} / \partial t$. Полученное таким образом равенство дважды проинтегрируем по y. В результате придем к соотношению

$$\mathrm{v} = -\frac{a}{2}y^2 + \frac{\dot{U}}{2\nu}y^2 + \frac{a\dot{H}}{6\nu}y^3 + \overline{C}_1 + \overline{C}_2 \tag{16}$$

Решение (15) принимается за первое приближение v_1, за второе приближение v_2 берется сумма $\mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}$, где v вычисляется по формуле (16). Функции времени $\overline{C}_1, \overline{C}_2$ определяются теми же условиями: первыми равенствами в (11) и (12). После определения этих функций второе приближение принимает вид

$$v_2 = \frac{a}{2}\left(2Hy - y^2\right) + \frac{U}{2\nu}\left(y^2 - 2Hy\right) + \frac{aH}{6\nu}\left(y^3 - 3H^2 y\right) + U(t) \tag{17}$$

Сравнения с точными решениями показали, что с хорошей точностью можно ограничиться вторым приближением [10]. Заметим, что, если за граничное условие взять второе равенство (11), то мы получили бы, что на границе $y = H$ напряжение сдвига отлично от нуля. Решение уравнения (9) строится аналогично. За первое приближение его решения берется решение квазистатического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -b,\ b = \frac{g\sin\alpha}{\nu_0},\ \nu_0 = \frac{\mu}{\rho_0} \tag{18}$$

Дважды интегрируя это уравнение по y, получим

$$u = -\frac{b}{2}y^2 + C_1 y + C_2$$

Используя граничное условие (13), это решение представим в виде

$$u = \frac{b}{2}\left(h^2 - y^2\right) + C_1(h + y),\ -h \le y \le 0 \tag{19}$$

Функции времени C_1 определяется из второго равенства (12) с учетом скорости сдвига в формуле (15). В итоге, решение (19) запишется так

$$u = \frac{b}{2}\left(h^2 - y^2\right) + \frac{1}{\mu}(\eta aH - k)(h + y),\ \eta aH > k \tag{20}$$

Второе приближение решения уравнения (9) строится аналогично второму приближению v_2 уравнения (8), приведенному в формуле (17). Ниже оно не используется и здесь не приводится.

Закон сохранения массы несжимаемой вязкопластической среды в объеме единичной ширины вдоль оси x, заключенной между границами $y = -h(t)$, $y = 0$, приводит к равенству

$$\rho_1(1 - m)\dot{h} + \rho m w_0 = \rho_0 \dot{h} \tag{21}$$

Скорость w_0 определена в формуле (4). Из (21) определяется скорость границы $y = -h(t)$:

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt} = w_0 = k_0 \rho g \cos\alpha H(t) \tag{22}$$

Подставив значение H по формуле (6) в правую часть равенства (22), после интегрирования получим значение толщины слоя

$$h = E\left(t + \frac{1}{A}\bar{e}^{At}\right) + C,\quad E = Bk_0 \rho g \cos\alpha \tag{23}$$

Постоянная интегрирования C в (23) определяется ниже из начальных условий. Практически интерес представляют решения уравнений в квазистатическом приближении (14) и (18). Из решений (15) и (20) следует, что на поверхности склона должно выполняться условие

$$y = 0,\ \eta aH(t) - k \ge 0 \tag{24}$$

В действительности, оползень - движение среды вдоль оси x начинается внутри слоя, там, где напряжение сдвига превосходит предел текучести. Здесь принимается приближение: считается, что процесс оползня происходит при выполнении условия (24). Оно означает, что после начала дождя оползень на поверхности склона возникает в момент t_*, который определяется из равенства

$$\eta a H_* = k,\ H_* = B\left(1 - e^{-At_*}\right) \tag{25}$$

где k - предел текучести. При $k > \eta aB$ оползень не возникает. Из формул (24), (25) следует, что постоянная интегрирования в формуле (23) определяется из условий

$$t = t_*,\ H = H_*,\ h = h_*,\ h_* = \int_0^{t_*} w_0 dt \tag{26}$$

В результате получим формулу, определяющую толщину слоя

$$h(t) = E\left[t - t_* - \frac{1}{A}\left(e^{-At_*} - e^{-At}\right)\right] + h_*,\ \ t > t_* \tag{27}$$

Вдоль поверхности склона $(y = 0)$ скорость определяется так:

$$u = U = \frac{b}{2}h^2 + \frac{h}{\mu}(\eta aH - k),\ \eta aH > k \tag{28}$$

Заметим, что скорость сдвига на границе $y = -h(t)$ определяется выражением

$$y = -h(t),\ \frac{\partial u}{\partial y} = bh + \frac{1}{\mu}(\eta aH - k),\ \eta aH > k \tag{29}$$

Массовый расход среды в единицу времени определяется интегралом от скорости, взятой по формуле (20)

$$Q = \rho_0 \int_{-h}^{0} u dy = \rho_0\left[\frac{bh^3}{3} + \frac{1}{2\mu}(\eta aH + k)h^2\right],\ \eta aH > k \tag{30}$$

В рассматриваемой задаче в слое вязкопластической среды составляющая скорости частиц по оси y является функцией только времени и направлена в отрицательную сторону. Обозначим ее заглавным символом W:

$$W = W(t) \tag{31}$$

Из условия (31) следует, что секундное количество движения, переносимое сквозь плоскость в слое параллельной плоскости склона, одинаково для всех таких сечений:

$$\rho_0 W^2(t) = C(t) \tag{32}$$

С другой стороны, на поверхности склона $(y = 0)$ непрерывно образуется количество движения $K(t)$, равное:

$$K(t) = \rho m w_0^2 \tag{33}$$

Скорость w_0 задана формулой (4). Таким образом:

$$\rho_0 W^2(t) = \rho m w_0^2 \tag{34}$$

Равенство (34) определяет скорость W:

$$W(t) = \left(m \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/2} w_0(t) \tag{35}$$

§2. **Движение оползня после прекращения дождя.** Пусть дождь продолжается в период $0 \le t \le t_0$ и в момент времени t_0 прекращается. Пусть в этот же момент мгновенно исчезает слой жидкости над поверхностью склона, а напряжение сдвига делается равным нулю:

$$t \ge t_0, \; y = 0, \; \tau_{yx}^0 = 0, \; H = 0 \tag{36}$$

Предполагается, что в момент t_0 на плоской поверхности склона возникает параллельная ей подвижная поверхность, которая движется в глубь почвы по закону $y = -z(t)$, подлежащему определению. Пусть напряжение сдвига на этой подвижной поверхности равно пределу текучести сдвига (фиг.2):

$$t > t_0, \; y = -z(t), \; \tau_{yx}^0 = k \tag{37}$$

Между границами $y = 0$ и $y = -z(t)$ среда находится в состоянии твердого тела и его движение можно определить с помощью уравнения

$$\rho_0 z(t) \dot{w} = \rho_0 g \sin \alpha z(t) - k$$

где $w(t)$ - скорость твердого тела. Запишем это уравнение в виде

$$z\dot{w} = g \sin \alpha z - v_*^2, \; \dot{w} = \frac{dw}{dt}, \; v_*^2 = \frac{k}{\rho_0} \tag{38}$$

Начальное условие уравнения (38) будет установлено ниже. При $t > t_0$ в вязкопластической области движение подчинено уравнению (9), а в рассматриваемом ниже квазистатическом приближении оно определяется уравнением (18). Его решение запишем так

$$y < -z(t), \; t > t_0, \; u = -\frac{b}{2} y^2 + C_1 y + C_2$$

$$\dot{u} = \dot{C}_1 y + \dot{C}_2, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -by + C_1 \tag{39}$$

Предполагается, что при $t > t_0$ выполняются условия

$$t > t_0, \; y = -z(t), \; u = w(t), \; \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \; \tau_{yx}^0 = 0, \; H = 0 \tag{40}$$

В решении (39) функции времени C_1 и C_2 определяются условиями (40)

$$C_1 = -bz(t), \; C_2 = w(t) - \frac{b}{2} z^2(t)$$

$$u = -\frac{b}{2}\left(y^2 + z^2\right) - bzy + w(t), \; \frac{\partial u}{\partial y} = -b(y + z) \tag{41}$$

Из предположения в формуле (36) следует, что при $t \ge t_0$ скорость границы $y = h(t)$ равна нулю, а толщина слоя остается постоянной:

$$t \ge t_0,\ \dot{h} = 0,\ h = h(t_0) = h_0 \tag{42}$$

На этой границе скорость частиц среды равна нулю и решение (41) приводит к зависимостям:

$$y = -h_0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -b(h_0 - z),\ \dot{w} = \nu_0 b - \frac{\nu_*^2}{z} \tag{43}$$

Последнее равенство (43) совместно с уравнением (38) образуют систему, определяющую функции $z(t)$ и $w(t)$:

$$2w = b(h_0 - z)^2,\ \dot{w} = \nu_0 b - \frac{\nu_*^2}{z} \tag{44}$$

Уравнения (44) решаются при условиях

$$t = t_0,\ z = 0,\ 2w_0 = bh_0^2,\ w_0 = w(t_0) \tag{45}$$

Из системы (44) нетрудно получить соотношение, определяющее функцию $z(t)$

$$b\frac{(h_0 - z)zdz}{b\nu_0 z - \nu_*^2} = -dt \tag{46}$$

Интеграл уравнения (46) при условии в формуле (45) можно представить в виде

$$h_0 z + \frac{c^2 - (c+z)^2}{2} + c(h_0 - c)\ln\left(1 - \frac{z}{c}\right) = -\nu_0(t - t_0)$$

$$t \ge t_0,\ c = \frac{\nu_*^2}{\nu_0 b} \tag{47}$$

Массовый расход в единицу времени определяется по формуле

$$Q = \rho_0 \int_{-h_0}^{-z} u dy + \rho_0 wz \tag{48}$$

где скорость u под интегралом берется по формуле (41).

ЛИТЕРАТУРА

1. Реология суспензий (сб. статей). – М.: Мир, 1975.
2. Воларович М.П. Применение метода исследований вязкости и пластичности в прикладной минералогии. //Тр. ин-та минералогии. 1934. Вып. 6.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. -М: Наука, 1970.
4. Сагомонян А.Я. К вопросу дождевой эрозии почв. //Вестник МГУ. Сер. Математика и механика. 1995, №5, с. 84-93.
5. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. -М.: Мир, 1983.
6. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. -М.: Гостехиздат, 1955.
7. Слезкин Н.А. О течении вязкой жидкости при наличии свободной границы и пористого дна. //Вестник МГУ. Сер. Математика и механика. 1957, №5, с. 3-5.
8. Карл-Слоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. -М.: Физматгиз, 1964.
9. Швец М.Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. //ПММ, 1939, т.3, №3, с. 251-266.
10. Кочетков А.М. Приближенное решение некоторых задач нестационарного движения вязкопластической среды. //ПММ, 1950, т.14, №4, с. 433-43[illegible]
11. Бахшиян Ф.А. К вязкопластическому течению при ударе цилиндра по пластине. //ПММ, 1948, т.12, №1, с. 47-52
12. Шемякин Е.И. О подвижности больших оползней. //Докл. АН СССР, 1993, т.331, №6, с. 742-744

МГУ им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
05.03.1998