ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОЙ КРУГЛОЙ ЛУНОЧКИ С ТРЕЩИНОЙ МЕЖДУ МАТЕРИАЛАМИ

Арутюнян Л.А.

Լ.Ա. Հարությունյան
Բաժանման մակերևույթի վրա ճաք պարունակող բաղադրյալ լուսնաձև մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը:

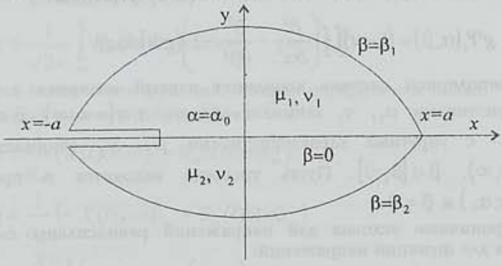
Երկբևեռ կոորդինատային համակարգի և Ֆուրյեի ինտեգրալների օգնությամբ տրվում է բաժանման մակերևույթի վրա, մինչև եզր դուրս եկող ճաք պարունակող բաղադրյալ լուսնաձև մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդրի փակ լուծումը:

L.A.Harutjunyan
A plane problem of elasticity theory for a compound circular moonlike, with a crack between materials

С помощью биполярных координат и интеграла Фурье дано замкнутое решение плоской контактной задачи теории упругости для составной области с трещиной.

В данной работе с помощью биполярных координат и аппарата интеграла Фурье дано замкнутое решение плоской контактной задачи теории упругости для двух областей, образованных пересечением дуг окружностей и имеющей трещину между материалами, которая выходит до границ.

Ось ox направим по линии контакта (фиг.1).



Фиг.1

Задача решается при помощи функции напряжений в биполярной системе координат α, β, которые связаны с декартовой системой координат x, y соотношениями [1]

$$x=\frac{a\,\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta};\; y=\frac{a\sin\beta}{\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta} \tag{1.1}$$

Функция напряжений $\Phi(\alpha,\beta)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению, которое в биполярной системе координат имеет вид [2,3]

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)(g\Phi)=0 \tag{1.2}$$

где $g=(\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta)/a$ характеризует масштаб преобразования, a - параметр биполярных координат.

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений соотношениями

$$a\sigma_\alpha=\left((\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\mathrm{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\mathrm{ch}\alpha\right)(g\Phi)$$

$$a\sigma_\beta=\left((\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\mathrm{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\cos\beta\right)(g\Phi)$$

$$a\tau_{\alpha\beta}=-(\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\Phi) \tag{1.3}$$

$$u=\frac{\partial}{2\mu}\left((1-2\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial\beta}\right)$$

$$v=\frac{\partial}{2\mu}\left((1-2\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial\alpha}\right)$$

где μ - модуль сдвига, ν - коэффициент Пуассона, $\Psi_1(\alpha,\beta)$ - бигармоническая функция, связанная с $\Phi(\alpha,\beta)$ формулой

$$g\Psi_1(\alpha,\beta)=(1-\nu)\int\int\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-1\right)(g\Phi)d\alpha d\beta \tag{1.4}$$

В биполярной системе координат первый материал с упругими характеристиками μ_1, ν_1 занимает область $\alpha\in(-\infty;\infty)$, $\beta\in[0;\beta_1]$, а второй - с упругими характеристиками μ_2, ν_2 занимает область $\alpha\in(-\infty;\infty)$, $\beta\in[\beta_2;0]$. Пусть трещина находится в промежутке $\alpha\in(-\infty;\alpha_0)$ и $\beta=0$.

Граничные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функций напряжений:

$$(g\Phi_m)\big|_{\beta=\beta_m}=\varphi_m(\alpha);\; \left.\frac{\partial(g\Phi_m)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_m}=\psi_m(\alpha)\;(m=1,2) \tag{1.5}$$

Предполагается, что $\varphi_m(\alpha)$ и $\psi_m(\alpha)$ удовлетворяют условиям разложимости в интервале Фурье.

На линии контакта имеем следующие условия:

$$\left.\frac{\partial(g\Phi_m)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0}=0 \qquad \alpha\in(-\infty;\infty)$$

$$(g\Phi_m)\big|_{\beta=0}=0 \qquad \alpha\in(-\infty;\alpha_0)$$

$$(g\Phi_1)\big|_{\beta=0}=(g\Phi_2)\big|_{\beta=0} \qquad \alpha\in(\alpha_0;\infty)$$

$$V_1\big|_{\beta=0}=V_2\big|_{\beta=0} \qquad \alpha\in(\alpha_0;\infty) \tag{1.6}$$

решение бигармонического уравнения (1.2) ищем в виде интеграла Фурье такого вида

$$g\Phi_m(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_m(t,\beta)\exp(-it\alpha)dt \qquad (m=1,2) \tag{1.7}$$

где

$$f_m(t,\beta)=A_m(t)\mathrm{ch}t(\beta_m-\beta)\cos\beta+B_m(t)\mathrm{ch}t\beta\cos(\beta_m-\beta)+$$
$$+C_m(t)\mathrm{sh}t(\beta_m-\beta)\sin\beta+D_m(t)\mathrm{sh}t\beta\sin(\beta_m-\beta) \quad (m=1,2) \tag{1.8}$$

Удовлетворяя граничным и контактным условиям (1.5) и (1.6), получаем следующие системы уравнений для определения неизвестных интегрирования:

$$A_m(t)\cos\beta_m+B_m(t)\mathrm{ch}t\beta_m=\overline{\varphi}_m(t)$$
$$-A_m(t)\sin\beta_m+tB_m(t)\mathrm{sh}t\beta_m-tC_m(t)\sin\beta_m-D_m(t)\mathrm{sh}t\beta_m=\overline{\psi}_m(t)$$
$$-tA_m(t)\mathrm{sh}t\beta_m+B_m(t)\sin\beta_m+C_m(t)\mathrm{sh}t\beta_m+tD_m(t)\sin\beta_m=0$$
$$A_m(t)\mathrm{ch}t\beta_m+B_m(t)\cos\beta_m=X(t) \quad (m=1,2) \tag{1.9}$$

где величины $\overline{\varphi}_m(t)$ и $\overline{\psi}_m(t)$ $(m=1,2)$ являются преобразованиями Фурье от заданных функций $\varphi_m(\alpha)$ и $\psi_m(\alpha)$ $(m=1,2)$

$$\overline{\varphi}_m(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(\alpha)\exp(it\alpha)d\alpha$$

$$\overline{\psi}_m(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(\alpha)\exp(it\alpha)d\alpha \qquad (m=1,2) \tag{1.10}$$

а $X(t)$ – пока неизвестная функция, которая определяется позже.

Разрешая систему (1.9), найдем

$$A_m(t)=\frac{1}{a_m}\left(X(t)\mathrm{ch}t\beta_m-\overline{\varphi}_m(t)\cos\beta_m\right)$$

$$B_m(t)=\frac{1}{a_m}\left(-X(t)\cos\beta_m+\overline{\varphi}_m(t)\mathrm{ch}t\beta_m\right)$$

$$C_m(t)=\frac{X(t)}{a_mb_m}\left(ta_m\mathrm{ch}t\beta_m+(t^2+1)\mathrm{sh}t\beta_m\sin\beta_m\cos\beta_m\right)-$$
$$-\frac{\overline{\varphi}_m(t)}{a_mb_m}\left(ta_m\cos\beta_m+(t^2+1)\mathrm{sh}t\beta_m\mathrm{ch}t\beta_m\sin\beta_m\right)+\frac{\overline{\psi}_m(t)t\sin\beta_m}{b_m}$$

$$D_m(t) = -\frac{X(t)}{a_m b_m}\left(ta_m \cos\beta_m + \left(t^2+1\right)\mathrm{sh}t\beta_m \mathrm{ch}t\beta_m \sin\beta_m\right) +$$

$$+\frac{\overline{\varphi}_m(t)}{a_m b_m}\left(ta_m \mathrm{ch}t\beta_m + \left(t^2+1\right)\mathrm{sh}t\beta_m \sin\beta_m \cos\beta_m\right) - \frac{\overline{\psi}_m(t)\mathrm{sh}t\beta_m}{b_m} \qquad (1.11)$$

где

$$a_m(t) = \mathrm{sh}^2 t\beta_m + \sin^2\beta_m \qquad (1.12)$$

$$b_m(t) = \mathrm{sh}^2 t\beta_m - t^2 \sin^2\beta_m$$

Неизвестная функция $X(t)$ определяется из следующей системы парных интегральных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t)\exp(-it\alpha)dt = 0 \quad \alpha \in (-\infty;\alpha_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(M(t)X(t) + N(t)\right)\exp(-it\alpha)dt = 0 \quad \alpha \in (\alpha_0;\infty) \qquad (1.13)$$

где

$$M(t) = \frac{1}{2b_1(t)}\left(\mathrm{sh}2t\beta_1 + t\sin 2\beta_1\right) - \frac{h}{2\beta_2(t)}\left(\mathrm{sh}2t\beta_2 + t\sin 2\beta_2\right)$$

$$N(t) = \frac{1}{b_1(t)}\left(-\overline{\varphi}_1(t)\left(t\mathrm{ch}t\beta_1 \sin\beta_1 + \mathrm{sh}t\beta_1\cos\beta_1\right) + \overline{\psi}_1(t)\mathrm{sh}t\beta_1 \sin\beta_1\right) +$$

$$+\frac{h}{b_2(t)}\left(\overline{\varphi}_2(t)\left(t\mathrm{ch}t\beta_2 \sin\beta_2 + \mathrm{sh}t\beta_2\cos\beta_2\right) - \overline{\psi}_2(t)\mathrm{sh}t\beta_2 \sin\beta_2\right)$$

$$h = \frac{\mu_1(1-\nu_2)}{\mu_2(1-\nu_1)} \qquad (1.14)$$

Если размеры областей и внешние усилия одинаковы, т.е. $\beta_1 = -\beta_2 = \beta_0$, $\overline{\varphi}_1 = \overline{\varphi}_2 = \overline{\varphi}_0$, $\overline{\psi}_1 = -\overline{\psi}_2 = \overline{\psi}_0$, то из (1.14) получим

$$M(t) = \frac{(1+h)}{2}\frac{\left(\mathrm{sh}2t\beta_0 + t\sin 2\beta_0\right)}{\left(\mathrm{sh}^2 t\beta_0 - t^2\sin^2\beta_0\right)}$$

$$N(t) = \frac{1+h}{\mathrm{sh}^2 t\beta_0 - t^2\sin^2\beta_0}\left[\overline{\psi}_0(t)\mathrm{sh}t\beta_0 \sin\beta_0 - \right. \qquad (1.15)$$

$$\left. - \overline{\varphi}_0(t)\left(t\mathrm{ch}t\beta_0\sin\beta_0 + \mathrm{sh}t\beta_0\cos\beta_0\right)\right]$$

Как видно из (1.13), решение поставленных задач не зависит от упругих характеристик составляющих материалов. Аналогичные результаты для других областей были получены в работах [5, 6].

Применяя преобразование Фурье для определения неизвестной функции $X(t)$ из (1.13), получаем следующие характеристические сингулярные уравнения с ядром Коши:

$$a(t)X(t) + tN(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(\tau)X(\tau) + \tau N(\tau)}{t-\tau}\exp(i(t-\tau)\alpha_0)d\tau \qquad (1.16)$$

или

$$\begin{cases} \int_0^\infty C(\xi)J_0(\xi r)d\xi = f_i(r), \quad a_i < r < b_i, \quad i = 1,2,\ldots,N \\ \int_0^\infty \xi C(\xi)J_0(\xi r)d\xi = 0, \quad 0 < r < a_1, \quad b_i < r < a_{i+1}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad r > b_N \end{cases} \tag{1.27}$$

In the case of $N = 1$ $(a_1 = a,\ b_1 = b)$ the solution of Eqs. (1.27) takes the form

$$C(\xi)(\pi/4)(b^2 - a^2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n\left(\xi\frac{b+a}{2}\right)J_n\left(\xi\frac{b-a}{2}\right) \tag{1.28}$$

where coefficients c_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ can be obtained using the solution of infinite system of algebraic equations

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\omega_{nk} = \frac{2}{\pi(b^2 - a^2)} f_k \quad (k = 0,1,2,\ldots) \tag{1.29}$$

Here

$$\omega_{nk} = (2/(b+a))\int_0^\infty J_n(\eta)J_n(\alpha\eta)J_k(\eta)J_k(\alpha\eta)d\eta \quad (n,\ k = 0,1,2,\ldots) \tag{1.30}$$

2. Let us analyse the coefficients ω_{nk} determined using the formula (1.30) in the form of the improper integral of the product of four Bessel functions. The simplest approximate numerical method for these coefficients is based on using the representation of ω_{nk} in the form

$$\omega_{nk} = \frac{2}{b+a}\int_0^{\eta_0} J_n(\eta)J_n(\alpha\eta)J_k(\eta)J_k(\alpha\eta)d\eta + \frac{2}{b+a}\int_{\eta_0}^\infty J_n(\eta)J_n(\alpha\eta)J_k(\eta)J_k(\alpha\eta)d\eta \tag{2.1}$$

where the reason for choice of the value η_0 is the possibility of using in the last integral asymptotic formulas for the Bessel functions

$$J_n(\eta) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\eta}}\cos\left[\eta - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right], \quad (\eta \geq \eta_0) \tag{2.2}$$

The asymptotic expression

$$\begin{aligned} J_n(\eta)J_k(\eta)J_n(\alpha\eta)J_k(\alpha\eta) &\cong (1/(2\pi^2\eta^2\alpha))[1 + (-1)^{n-k} + ((-1)^n + \\ &+ (-1)^k)(\sin 2\eta + \sin 2\alpha\eta) + \cos(2(1-\alpha)\eta) - (-1)^{n+k}\cos(2(1+\alpha)\eta)] \end{aligned} \tag{2.3}$$

is correct with account of (2.2). Using (2.3) we obtain the following form for the second integral in the right part of (2.1)

$$\begin{aligned} &\int_{\eta_0}^\infty J_n(\eta)J_k(\eta)J_n(\alpha\eta)J_k(\alpha\eta)d\eta \cong (1/(2\pi^2\alpha\eta_0))[1 + (-1)^{n-k} + ((-1)^n + \\ &+ (-1)^k)(\sin 2\eta_0 + \sin 2\alpha\eta_0 - 2\eta_0 Ci(2\eta_0) - 2\alpha\eta_0 Ci(2\alpha\eta_0)) + \\ &+ \cos(2(1-\alpha)\eta_0) - (-1)^{n+k}\cos(2(1+\alpha)\eta_0) + 2(1-\alpha)\eta_0 si(2(1-\alpha)\eta_0) - \\ &- (-1)^{n+k} 2(1+\alpha)\eta_0 si(2(1+\alpha)\eta_0)] \end{aligned} \tag{2.4}$$

Here

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)G(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau-z}$$

$$\Gamma^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{t-i}{t+i}\right)G(t)\right]+\Gamma(t),\quad \left(\Gamma(t)=\Gamma(z)\big|_{z=t}\right) \tag{1.24}$$

Пользуясь предельными значениями этой функции, преобразуем краевое условие (1.21) к виду

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)}=\frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)}+\frac{g(t)}{X^{+}(t)} \tag{1.25}$$

Далее, вводя аналитическую функцию

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z} \tag{1.26}$$

Представим краевое условие в виде

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)}-\Psi^{+}(t)=\frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)}-\Psi^{-}(t) \tag{1.27}$$

где

$$\Psi^{+}(t)=\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^{+}(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$\Psi^{-}(t)=-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^{+}(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t} \tag{1.28}$$

или

$$\Psi^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^{+}(t)}+\Psi(t)\qquad \left(\Psi(t)=\Psi(z)\big|_{z=t}\right).$$

Применяя теорему об аналитическом продолжении и учитывая, что единственной особенностью рассматриваемой функции может быть лишь полюс в точке $z=-i$, на основании обобщенной теоремы Лиувилля будем иметь:

$$\frac{\Phi^{+}(z)}{X^{+}(z)}-\Psi^{+}(z)=\frac{\Phi^{-}(z)}{X^{-}(z)}-\Psi^{-}(z) \tag{1.29}$$

Отсюда получаем общее решение задачи

$$\Phi(z)=X(z)\Psi(z) \tag{1.30}$$

Так как $\operatorname{Ind}G(t)=-1$, надо добавлять еще одно условие $\Psi(i)=0$ или

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau+i}=0 \tag{1.31}$$

Напишем решение (1.30) краевой задачи Римана (1.21) по формулам Сохоцкого. Предельные значения соответствующих функций есть:

$$\Phi^{+}(t)=X^{+}(t)\left[\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^{+}(t)}+\Psi(t)\right]$$

$$\Phi^{-}(t) = X^{-}(t)\left[-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^{-}(t)} + \Psi(t)\right] \qquad (1.32)$$

Отсюда по формуле (1.20) имеем

$$\varphi(t) = \frac{g(t)}{2}\left[1 + \frac{X^{-}(t)}{X^{+}(t)}\right] + X^{+}(t)\left[1 - \frac{X^{-}(t)}{X^{+}(t)}\right]\Psi(t) \qquad (1.33)$$

$\dfrac{X^{-}(t)}{X^{+}(t)}$ заменяя $1/G(t)$, а функцию $\Psi(t)$ - ее выражением из (1.2), получаем

$$\varphi(t) = \frac{g(t)}{2}\left[1 + \frac{1}{G(t)}\right] + X^{+}(t)\left[1 - \frac{1}{G(t)}\right]\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)d\tau}{X^{+}(\tau)(\tau - t)} \qquad (1.34)$$

Подставляя вместо $X^{+}(t)$, $G(t)$ и $g(t)$ значения из (1.23) и (1.22), имеем

$$\varphi(t) = \frac{a(t)f(t)}{a^2(t) - b^2(t)} - \frac{b(t)z(t)}{\sqrt{a^2(t) - b^2(t)}}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)d\tau}{\sqrt{a^2(\tau) - b^2(\tau)}z(\tau)(\tau - t)} \qquad (1.35)$$

где

$$Z(t) = \sqrt{\frac{t-i}{t+i}}\exp(\Gamma(t)) \qquad (1.36)$$

или окончательно для неизвестной функции $X(t)$ получаем следующие выражения:

$$X(t) = -\frac{N(t)}{2M(t)} + \frac{Z(t)}{\sqrt{t(t+i)}M(t)}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\tau(\tau+i)}N(\tau)\exp(i(t-\tau)\alpha_0)d\tau}{\sqrt{M(\tau)}Z(\tau)(t-\tau)} \qquad (1.37)$$

Рассмотрим частные случаи:

1) при $\alpha_0 \to \infty$ из (1.37) получаем

$$X(t) = 0 \qquad (1.38)$$

2) при $\alpha_0 \to -\infty$

$$X(t) = -\frac{N(t)}{M(t)} \qquad (1.39)$$

Эти результаты совпадают с известными результатами [2, 3, 4]. При получении значений (1.38) и (1.39) использовали следующие пределы:

$$\lim_{\alpha_0 \to \pm\infty}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)\exp(i(t-\tau)\alpha_0)}{t-\tau}d\tau = \pm f(t)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968.
3. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек. -Изв. АН Арм ССР, Механика, 1976, т.29, №1, с. 51-66.
4. Арутюнян Л.А., Апикян Ж.Г., Аветисян Г.А. Плоская контактная задача для составного тела с симметричной трещиной между материалами. – Инж. проблемы строительной механики ЕрПИ, 1975, т.28, №3.
5. Мелконян М.Г., Мкртчян А.М. Об одной контактной задаче для двух прямоугольников. -Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т.28, №3, с. 13-28.
6. Абрамян Б.Л., Макарян В.С. Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями из различных материалов с учетом трения между слоями. -Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т.29, №5, с. 3-14.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. -М.:Физматтиз, 1963.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
22.04.1998