ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №1, 1999 Механика

УДК 532.516

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С ПОДВИЖНОЙ СТЕНКОЙ И С ПЕРЕПАДОМ ДАВЛЕНИЯ

Бабаджанян Г.А.

Գ.Հ. Բաբաջանյան

Իրական հեղուկի չհաստատված շարժումը շարժական պատով ջրանցքում ճնշման անկման առկայությամբ

Հոդվածում քննարկվում է իրական անսեղմելի հեղուկի ոչ ստացիոնար (չհաստատված) շարժումը հարթ հեղուկատարում, երբ շարժման ոչ ստացիոնարությունը պայմանավորված է հեղուկատարի պատերից մեկի շարժումով և հեղուկի սեփական հոսքի առկայությամբ: Դրված խնդրի ուսումնասիրությունը բերվում է մասնակի ածանցյալներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը: Օգտվելով Լապլասի ինտեգրալ ձևափոխությունից կառուցվում են հավասարման լուծումները, որոնք հնարավորություն են տալիս որոշել շարժման բնութագրիչ մեծությունների (արագության, ճնշման, շփման ուժի) փոփոխման օրինաչափությունները կախված ժամանակից և տարածության կետի կոորդինատներից:

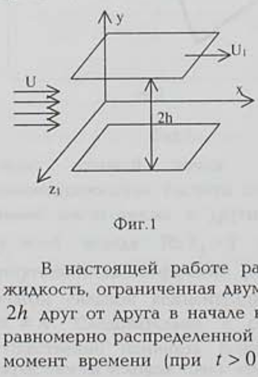
G.H. Babajanian

Unsteady motion of viscous liquid in chanal with movable wall and differential pressure

В статье рассматривается нестационарное движение реальной несжимаемой жидкости в плоском канале. Нестационарность движения обусловлена движением одной из стенок канала и движением самой жидкости. Исследование поставленной задачи сведено к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных. Используя интегральное преобразование Лапласа, построены решения уравнений, которые дают возможность определять закономерности изменения скорости, давления и силы трения жидкости в зависимости от времени и координат.

1. Рассматривается развитие нестационарного изотермического течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с движущейся стенкой при наличии перепада давления, т.е. имеет место одновременное течение жидкости.

Исследования динамического взаимодействия таких движений вязкой жидкости с твердыми поверхностями (неподвижными и подвижными) помимо теоретического интереса имеют также и различные практические приложения.



Фиг.1

Развитие только по времени движения вязкой жидкости между двумя параллельными движущимися плоскостями исследовалось в [1], где принималось, что жидкость и стенки в начале движения (при $t \le 0$) находились в покое, а с момента времени (при $t > 0$) стенки перемещались с постоянными скоростями, увлекая за собой частицы жидкости. Были найдены законы изменения скорости частиц жидкости и силы трения, зависящие от времени и координат.

В настоящей работе рассматривается более общий случай. Вязкая жидкость, ограниченная двумя параллельными плоскостями на расстоянии $2h$ друг от друга в начале времени (при $t = 0$), движется с постоянной, равномерно распределенной в начальном сечении канала, скоростью U. В момент времени (при $t > 0$) одна из плоскостей начинает двигаться с постоянной скоростью U_1. Требуется определить развитие со временем и по координатам движения жидкости между плоскостями, при условии, что параллельные плоскости неограничены по осям ox и oz_1, а движение одной из них происходит в своей плоскости (фиг. 1). Пренебрегая дейсвием сил тяжести, для решения поставленной задачи в качестве исходных уравнений примем линеаризованные уравнения движения, получаемые из уравнений Навье-Стокса с частичным учетом слагаемых от ускорения и вязкости в следующем виде:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+U\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \qquad (1.1)$$

В системе уравнений (1.1) v_x и v_y – соответствующие компоненты скорости потока по осям ox и oy, p – давление, ρ – плотность, ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости. Приняв начало координат на оси симметрии канала, начальные и граничные условия задачи примут вид:

$$\text{при } t=0,\ x=0 \qquad v_x=U=\text{const},\quad p=p_H=\text{const}$$

$$\text{при } t>0,\ x>0,\ y=h \qquad v_x=U_1=\text{const},\quad v_y=0$$

$$\text{при } t\ge 0, x>0, y=-h \qquad v_x=0,\quad v_y=0 \qquad (1.2)$$

где p_H – давление жидкости в начальном сечении канала.

Вводя новые переменные

$$z=\frac{x}{h},\ \xi=\frac{y}{h},\ u=\frac{v_x-U}{U},\ v=\frac{v_y}{U},\ \Phi=\frac{p-p_H}{\rho U^2},\ T=\frac{U}{h}t$$

система уравнений (1.1) и краевые условия (1.2) примут следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial T}+\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}=0,\ \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial \xi}=0 \qquad (1.3)$$

$$\text{при } T=0,\ z=0 \qquad u=0,\quad \Phi=0$$

$$\text{при } T>0,\ z>0,\ \xi=1 \qquad u=\frac{U_1-U}{U},\quad v=0$$

$$\text{при } T\ge 0,\ z>0,\ \xi=-1 \qquad u=-1,\quad v=0 \qquad (1.4)$$

Применяя к уравнениям (1.3) и к краевым условиям (1.4) двойное преобразование Лапласа [2], получим

$$\frac{d^2\bar{\bar{u}}}{d\xi^2}-R_e(s_1+s_2)\bar{\bar{u}}=R_e s_1\bar{\bar{\Phi}}$$

$$\frac{d\bar{\bar{\Phi}}}{d\xi}=0,\quad s_1\bar{\bar{u}}+\frac{d\bar{\bar{v}}}{d\xi}=0 \qquad (1.5)$$

$$\text{при } T=0, z=0 \qquad \bar{\bar{u}}=0,\ \bar{\bar{\Phi}}=0$$

$$\text{при } T>0, z>0, \xi=1 \qquad \bar{\bar{u}}=\frac{U_1-U}{U}\frac{1}{s_1 s_2},\ \bar{\bar{v}}=0$$

при $T \geq 0,\ z > 0,\ \xi = -1 \qquad \overline{\overline{u}} = -\frac{1}{s_1 s_2},\ \overline{\overline{v}} = 0$ (1.6)

где s_1 и s_2 – параметры преобразования Лапласа по переменным z и T соответственно, $R_e = \frac{Uh}{\nu}$ – число Рейнольдса.

Общее решение первого уравнения системы (1.5) с учетом граничных условий (1.6) имеет вид:

$$\overline{\overline{u}} = \frac{\frac{U_1 - U}{U}\operatorname{sh}\beta(\xi+1) + \operatorname{sh}(\xi-1)}{s_1 s_2 \operatorname{sh}2\beta} + \frac{s_1\overline{\overline{\Phi}}}{s_1+s_2}\left(\frac{\operatorname{ch}\beta\xi}{\operatorname{ch}\beta} - 1\right) \tag{1.7}$$

где $\beta^2 = R_e\left(s_1 + s_2\right)$.

Из последних двух уравнений системы (1.5) с учетом граничных условий (1.6) для функции $\overline{\overline{\Phi}}$ получим:

$$\overline{\overline{\Phi}} = \frac{2U - U_1}{2U}\frac{(s_1+s_2)\operatorname{th}\beta}{s_1^2 s_2(\operatorname{th}\beta - \beta)} \tag{1.8}$$

Применяя двойное обратное преобразование Лапласа к уравнениям (1.7) и (1.8) и переходя к первоначальным переменным, для искомых величин v_x и p получим:

$$\begin{aligned}
v_x = U + \frac{U_1 - 2U}{2}\Bigg\{&\frac{3y^2}{2h^2} - \frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\left(1 - \frac{\cos\lambda_n y/h}{\cos\lambda_n}\right)\exp\left(-\frac{\lambda_n^2\nu x}{Uh^2}\right) + \\
&+ 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2}\left(1 - \frac{\cos\mu_n y/h}{\cos\mu_n}\right)\left[\exp\left(-\frac{\mu_n^2\nu t}{h^2}\right) - \exp\left(-\frac{\mu_n^2\nu x}{Uh^2}\right)\right]\Bigg\} + \\
+ \frac{U_1}{2}\Bigg\{&\frac{y}{h} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin n\pi y/h}{n\pi}\exp\left(-\frac{h^2\pi^2\nu x}{Uh^2}\right) + \\
&+ 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin n\pi y/h}{n\pi}\left[\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right) - \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu x}{Uh^2}\right)\right]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
p = p_H - \frac{\rho U^2}{2}\frac{2U - U_1}{U}\Bigg\{&\frac{3\nu x}{Uh^2} + \frac{1}{5} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\exp\left(-\frac{\lambda_n^2\nu x}{Uh^2}\right) - \\
-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2}&\left[\exp\left(-\frac{\mu_n^2\nu t}{h^2}\right) - \exp\left(-\frac{\mu_n^2\nu x}{Uh^2}\right)\right] + \frac{2\nu}{Uh^2}\sum_{n=1}^{\infty}(x - Ut)\exp\left(-\frac{\mu_n^2\nu t}{h^2}\right)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Из третьего уравнения системы (1.1) определим v_y:

$$\begin{aligned}
v_y = \frac{(U_1 - 2U)\nu}{Uh}\Bigg\{&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{y}{h} - \frac{\sin\lambda_n y/h}{\sin\lambda_n}\right)\exp\left(-\frac{\lambda_n^2\nu x}{U h^2}\right) - \\
-\sum_{n=1}^{\infty}&\left(\frac{y}{h} - \frac{\sin\mu_n y/h}{\sin\mu_n}\right)\exp\left(\frac{\mu_n^2\nu x}{U h^2}\right)\Bigg\} - \frac{U_1\nu}{Uh}\Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\cos\frac{n\pi y}{h} - 1\right]\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu x}{Uh^2}\right) - \\
-\sum_{n=1}^{\infty}&\left[(-1)^n\cos\frac{n\pi y}{h} - 1\right]\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu x}{Uh^2}\right)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

В формулах (1.9)−(1.11) $\lambda_n = -i\sqrt{R_e s_1}$ и $\mu_n = -i\sqrt{R_e\ (s_1 + s_2)}$ ……………… вляются действительными корнями уравнений $\operatorname{tg}\lambda_n = \lambda_n$ и $\operatorname{tg}\mu_n = \mu_n$.

Сила трения между слоями жидкости определяется по следующей формуле:

$$\tau = \mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x}\right)$$

В частном случае на верхней подвижной и на нижней неподвижной стенках силы трения будут:

$$\tau_{y=h} = \frac{\mu(U_1 - 2U)}{2h}\left\{3 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\lambda_n^2 \nu x}{Uh^2}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left[\exp\left(\frac{-\mu_n^2 \nu t}{h^2}\right) - \exp\left(\frac{-\mu_n^2 \nu x}{Uh^2}\right)\right]\right\} + \qquad (1.12)$$
$$+ \frac{\mu U_1}{2h}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(\frac{-n^2\pi^2 \nu x}{Uh^2}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left[\exp\left(\frac{-n^2\pi^2 \nu t}{h^2}\right) - \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 \nu x}{Uh^2}\right)\right]\right\}$$

$$\tau_{y=-h} = -\frac{\mu(U_1 - 2U)}{2h}\left\{3 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\lambda_n^2 \nu x}{Uh^2}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left[\exp\left(\frac{-\mu_n^2 \nu t}{h^2}\right) - \exp\left(\frac{-\mu_n^2 \nu x}{Uh^2}\right)\right]\right\} + \qquad (1.13)$$
$$+ \frac{\mu U_1}{2h}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(\frac{-n^2\pi^2 \nu x}{Uh^2}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left[\exp\left(\frac{-n^2\pi^2 \nu t}{h^2}\right) - \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 \nu x}{Uh^2}\right)\right]\right\}$$

Таким образом, определены законы изменения давления, скорости и силы трения для нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости при вышеуказанной постановке задачи.

В случае обеих движущихся плоскостей решение поставленной задачи можно построить тем же методом. Отметим, что во всех формулах суммы со знаком "штрих" равны нулю при $0 \le x < Ut$ и отличны от нуля при $x > Ut$ [3].

Анализ полученных результатов показывает,что:

−давление, продольная скорость и сила трения зависят от времени и координат, а поперечная скорость−только от координат;

−при стремлении t к бесконечности (соблюдая условие $x > Ut$ в суммах со знаком "штрих") из решения задачи о неустановившемся движении получается решение задачи об установившемся движении жидкости при тех же граничных условиях;

−при $U_1 > 2U$ сила трения по абсолютной величине на подвижной стенке больше, чем на неподвижной, при $U_1 < 2U$, наоборот, а в случае $U_1 = 2U$ −силы трения на обеих стенках равны;

−в начальные моменты времени силы трения на стенках стремятся к бесконечности, что свидетельствует о явлении удара плоскостей по жидкости;

−ряды, входящие в выражения v_x, p, v_y и τ −равномерно сходящиеся;

—подбором скоростей стенки, основного потока жидкости и соответствующих начальных и граничных условий можно получить различные частные случаи, исследованные другими авторами [4]—[7] .

Работа выполнена в рамках научной темы №94-670, финансируемой государственными источниками Республики Армения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаджанян Г.А. Неустановившееся движение вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями. - Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, №4, с. 86-89.
2. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения.-М.: Физматгиз, 1958. 47с.
3. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике.-М.: Наука, 1968. 230с.
4. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений.-М.-Л.: Гостехтеориздат, 1961. 249с.
5. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости М.: Гостехтеориздат, 1955. 319с.
6. Шлихтинг Г.А. Теория пограничного слоя.-М.: Изд иностр. лит., 1956. 74с.
7. Бабаджанян Г.А., Мнацаканян Р.Ж. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями.-Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1987, т. 40, №3, с. 49-53.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
12.02.1996