

УДК 539.3+537.228.1

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ НАПРЯЖЕНИЙ В ДВУХ ЗАДАЧАХ
ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ТЕЛА

Саргсян А.М., Хачикян А.С.

Ա. Մ. Սարգսյան, Ա. Ս. Խաչիկյան

Կտոր առ կտոր համասեռ մարմնի համար էլեկտրաառաձգականության երկու
խնդիրներում լարումների եզակիության մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է էլեկտրական և մեխանիկական դաշտերի կապակցվածության
ազդեցությունը բաժանորդ սեպի միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում առաձգական լարումների և
էլեկտրական դաշտի լարվածության վայրի վրա:

A.M. Sargsian, A.S. Khachikyan

On the behavior of stresses in two problems of Electroelasticity
for a piecewise homogeneous body

В работе исследуется влияние связанности электрических и механических полей на
поведение упругих напряжений и напряженности электрического поля в окрестности края
поверхности контакта кусочно-однородного клина.

Интерес к изучению эффектов взаимодействия механических полей с
электромагнитными полями (пьезоэффект) связан с тем, что в различных
областях современной техники стали широко применять функциональные
элементы, изготовленные из высокоэффективных пьезоматериалов [1-3].

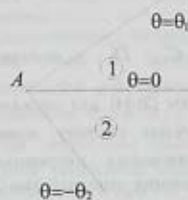
Методы же расчета таких элементов в одномерной постановке весьма
приближены и, как правило, не дают полной картины физических
явлений, происходящих в них. Предложенный в [3] численно-
аналитический метод расчета в двумерной постановке, применительно к
пьезоэлектрическим трансформаторам, не может обеспечить необходимую
точность из-за невыделенности асимптотических поведений решений
вблизи концентраторов (края поверхности контакта секции возбуждения
и генераторной секции).

Определенный интерес представляет также учет влияния эффекта
связанности механических и электромагнитных полей в горных породах
на флуктуации фона геофизических полей, необходимых при
электроразведке и изучении землетрясений и земной коры
геофизическими методами [4].

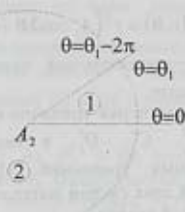
В настоящей работе исследуется влияние связанности электрических
и механических полей на поведение характеристик этих полей (упругие
напряжения и напряженность электрического поля) в окрестности края
поверхности контакта кусочно-однородных тел, находящихся в условиях
продольного сдвига. Получены условия, при которых имеет место сильная
концентрация характеристик этих полей, и формулы, определяющие их
асимптотическое поведение.

Рассматриваются две задачи электроупругости для кусочно-
однородных призматических тел, поперечные сечения которых
представлены на фиг. 1, 2.

Составные призматические тела изготовлены из пьезоматериалов
классов 4mm, 6mm и т.д., для которых возможны состояния продольного
сдвига. Главные оси симметрии пьезоматериалов проходят через вершины
 A_1 , A_2 и совпадают с осью z цилиндрической системы координат r , θ , z .



Фиг. 1



Фиг. 2

При отсутствии массовых сил решение задач электроупругости сводится к интегрированию систем дифференциальных уравнений [3]

$$\Delta U_j(r, \theta) = 0, \quad \Delta \Phi_j(r, \theta) = 0, \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

при соответствующих гранично-контактных условиях:
для первой задачи зададим следующие граничные

$$\begin{aligned} c_{44}^{(1)} \partial U_1 / \partial \theta + e_{15}^{(1)} \partial \Phi_1 / \partial \theta &= 0, \quad \theta = \theta_1 \\ \Phi_1(r, \theta_1) = 0, \quad U_2(r, -\theta_2) &= 0 \\ e_{15}^{(2)} \partial U_2 / \partial \theta - \varepsilon_2 \partial \Phi_2 / \partial \theta &= 0, \quad \theta = -\theta_2 \end{aligned} \quad (2)$$

и контактные условия (на линии $\theta = 0$)

$$\begin{aligned} c_{44}^{(1)} \partial U_1 / \partial \theta + e_{15}^{(1)} \partial \Phi_1 / \partial \theta &= c_{44}^{(2)} \partial U_2 / \partial \theta + e_{15}^{(2)} \partial \Phi_2 / \partial \theta \\ U_1(r, 0) = U_2(r, 0), \quad \Phi_1(r, 0) &= \Phi_2(r, 0) \\ e_{15}^{(1)} \partial U_1 / \partial \theta - \varepsilon_1 \partial \Phi_1 / \partial \theta &= e_{15}^{(2)} \partial U_2 / \partial \theta - \varepsilon_2 \partial \Phi_2 / \partial \theta \end{aligned} \quad (3)$$

Для второй задачи кроме контактных условий (3) существуют аналогичные условия и на линии $\theta = \theta_1$ (фиг.2)

$$\begin{aligned} c_{44}^{(1)} \partial U_1 / \partial \theta + e_{15}^{(1)} \partial \Phi_1 / \partial \theta \Big|_{\theta=\theta_1} &= c_{44}^{(2)} \partial U_2 / \partial \theta + e_{15}^{(2)} \partial \Phi_2 / \partial \theta \Big|_{\theta=\theta_1-2\pi} \\ U_1(r, \theta_1) = U_2(r, \theta_1 - 2\pi), \quad \Phi_1(r, \theta_1) &= \Phi_2(r, \theta_1 - 2\pi) \\ e_{15}^{(1)} \partial U_1 / \partial \theta - \varepsilon_1 \partial \Phi_1 / \partial \theta \Big|_{\theta=\theta_1} &= e_{15}^{(2)} \partial U_2 / \partial \theta - \varepsilon_2 \partial \Phi_2 / \partial \theta \Big|_{\theta=\theta_1-2\pi} \end{aligned} \quad (4)$$

где $U_j(r, \theta)$ - упругие перемещения, $\Phi_j(r, \theta)$ - электрические потенциалы, $c_{44}^{(j)}$ - модули упругости, $e_{15}^{(j)}$ - пьезомодули, ε_j - диэлектрические проницаемости соответствующих областей.

Первые и четвертые условия в (2) - (4) получаются при помощи уравнений состояния [3]

$$\begin{aligned} \tau_{\theta\theta}^{(j)} &= c_{44}^{(j)} \gamma_{\theta\theta}^{(j)} - e_{15}^{(j)} E_{\theta}^{(j)}, \quad \tau_{r\theta}^{(j)} = c_{44}^{(j)} \gamma_{r\theta}^{(j)} - e_{15}^{(j)} E_r^{(j)} \\ D_{\theta}^{(j)} &= e_{15}^{(j)} \gamma_{\theta\theta}^{(j)} + \varepsilon_j E_{\theta}^{(j)}, \quad D_r^{(j)} = e_{15}^{(j)} \gamma_{r\theta}^{(j)} + \varepsilon_j E_r^{(j)} \\ \gamma_{\theta\theta}^{(j)} &= \partial U_j / r \partial \theta, \quad \gamma_{r\theta}^{(j)} = \partial U_j / \partial r, \quad E_{\theta}^{(j)} = -\partial \Phi_j / r \partial \theta, \quad E_r^{(j)} = -\partial \Phi_j / \partial \theta \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\tau_{\theta\theta}$, $\tau_{r\theta}$, $\gamma_{\theta\theta}$, $\gamma_{r\theta}$ - компоненты упругих напряжений и деформаций, D_{θ} , D_r , E_{θ} , E_r - компоненты векторов электрической индукции и напряженности электрического поля.

Методом разделения переменных [5] для решения уравнения (1) находим

$$\Phi_j(r, \theta) = r^{\lambda} (C_j^* \cos \lambda \theta + D_j^* \sin \lambda \theta)$$

$$U_j(r, \theta) = r^\lambda (A_j^* \cos \lambda \theta + B_j^* \sin \lambda \theta) \quad (6)$$

где λ — произвольный параметр, A_j^* , B_j^* , C_j^* , D_j^* — неизвестные постоянные.

Удовлетворяя гранично-контактным условиям (2)-(4) для определения A_j^* , B_j^* , C_j^* , D_j^* , в каждой задаче получаем систему линейных однородных уравнений. Из условий существования нетривиальных решений этих систем вытекают следующие уравнения относительно λ : для первой задачи

$$A_1 \cos \lambda \theta_+ + A_2 \cos \lambda \theta_- + A_3 \cos \lambda \theta_1 + A_4 \cos \lambda \theta_2 + A_5 = 0 \quad (7)$$

где

$$\theta_\pm = \theta_1 \pm \theta_2, \quad A_1 = ha_+ b_+ - g_2 e_+, \quad A_2 = ha_- b_- - g_2 e_-$$

$$A_3 = h(a_+ b_- + a_- b_+) - 2g_2 - g_3, \quad A_4 = A_3 - g_2$$

$$A_5 = h(a_+ b_+ + a_- b_-) - g_3 + g_4, \quad h = \varepsilon(\varepsilon + a_0 e)$$

$$b = (1 + a_0) / (\varepsilon + a_0 e), \quad g_2 = a_0 \varepsilon (a - e), \quad g_3 = 4a_0 e (\varepsilon - e)$$

$$g_4 = 4a_0 (1 + a_0) e^2, \quad a_\pm = a \pm 1, \quad b_\pm = b \pm 1, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$$

$$a = c_{44}^{(2)} / c_{44}^{(1)}, \quad e = e_{15}^{(2)} / e_{15}^{(1)}, \quad a_0 = (e_{15}^{(1)})^2 / c_{44}^{(1)} \varepsilon_1$$

для второй задачи

$$\left[\sin^2 \lambda \pi - y_1 \sin^2 \lambda (\pi - \theta_1) \right] \left[\sin^2 \lambda \pi - y_2 \sin^2 \lambda (\pi - \theta_1) \right] = 0 \quad (8)$$

где

$$y_{1,2} = \left[2A_\pm A_- - C \pm \sqrt{C(C - 4A_\pm A_-)} \right] / 2A_\pm^2$$

$$A_\pm = a_\pm \varepsilon_\pm + a_0 e_\pm^2, \quad C = 4 \left[4a_0 (a - e) (\varepsilon - e) + (a - \varepsilon)^2 \right] \quad (9)$$

При конкретных значениях параметров θ_j , a , e , ε , a_0 уравнения (7) и (8) имеют бесконечное множество физически допустимых корней λ_m ($m = 1, 2, 3, \dots$), которые могут быть пронумерованы по порядку возрастания их действительных частей ($0 < \text{Re} \lambda_1 < \text{Re} \lambda_2 < \dots$) [5-7].

Упругое перемещение и электрический потенциал в окрестности края соединения представляется в виде суммы

$$U_j(r, \theta) = \sum_{(\lambda_m)} r^{\lambda_m} (A_{1m} \cos \lambda_m \theta + B_{1m} \sin \lambda_m \theta)$$

$$\Phi_j(r, \theta) = \sum_{(\lambda_m)} r^{\lambda_m} (C_{1m} \cos \lambda_m \theta + D_{1m} \sin \lambda_m \theta) \quad (6^*)$$

где суммирование распространяется на все положительные корни уравнений (7) или (8).

Из (5) и (6*) следует, что если $0 < \text{Re} \lambda_1 < 1$, то характеристики связанных полей (упругие напряжения и компоненты вектора электрической индукции) в окрестности угловых точек A_j ($j = 1, 2$) стремятся к бесконечности (концентрационное состояние), при этом порядок особенности равен $|\text{Re} \lambda_1 - 1|$. Если $\text{Re} \lambda_1 > 1$, характеристики полей убывают до нуля при приближении к точкам A_j (малонапряженное состояние). В случае $\text{Re} \lambda_1 = 1$ эти характеристики в

угловых точек конечны и вообще отличны от нуля (предельное состояние).

Следовательно, исследование особенности характеристик полей около угловых точек A_j приводится к отысканию корней с наименьшей положительной действительной частью уравнений (7) и (8) в зависимости от параметров $\theta_j, a, e, \varepsilon, a_0$.

При отсутствии пьезоэффекта ($e_{15} = 0$) из (7) и (8) получаются известные уравнения, определяющие особенность характеристик полей в соответствующих задачах теории упругости и электростатики [6,7].

В общем случае легко показать, что при фиксированных значениях a, e, ε, a_0 предельные кривые (определяемые из (7) при условии $\operatorname{Re} \lambda_1 = 1$), разделяющие в плоскости θ_1, θ_2 области малонапряженности и концентрации, проходят через точки $(\pi/2, 0)$ и $(0, \pi/2)$, пересекая прямую $\theta_1 = \theta_2$ в точках θ_1^* , соответствующих различным парам соединяемых пьезоматериалов. Значение θ_1^* определяется из (7) при условии $\operatorname{Re} \lambda_1 = 1$.

При равенстве углов растворов однородных клиньев с помощью (7) явно определяется первый корень λ_1 в зависимости от параметров задачи и угла θ_1 .

В предлагаемой таблице для некоторых реальных соединяемых пар [10] приведены также предельные углы θ_1^* , меньше (больше) которых в окрестности точки A_1 имеет место малонапряженное (концентрационное состояние).

Таблица

Материалы соединяемых пар	Действительная часть первого корня	Предельный угол
ЦТС4-ZnO	$\sigma_1 \approx \pi/8\theta_1$	$\theta_1^* \approx \pi/8$
ЦТС4-CdS	$\sigma_1 \approx \pi/2\theta_1$	$\theta_1^* \approx \pi/2$
ZnO-CdS	$\lambda_1 \approx 0,09\pi/\theta_1$	$\theta_1^* \approx 0,09\pi$
ЦТС19-ZnO	$\sigma_1 \approx 0,214\pi/\theta_1$	$\theta_1^* \approx 0,214\pi$
ЦТС4- ЦТС19	$\sigma_1 \approx \pi/4\theta_1$	$\theta_1^* \approx \pi/4$

Для частного случая однородного клина, полагая в (7) $a = \varepsilon = e = 1$, получим

$$\Delta(\lambda) = \cos 2\lambda\theta_+ + 1 + 2a_0 = 0 \quad (10)$$

Приравнивая нулю действительную и мнимую части $\Delta(\lambda)$, легко показать, что уравнение (10) имеет только комплексные корни и степень особенности напряжений для однородного клина при данных граничных условиях определяется формулой

$$\lambda_1 = \pi/2\theta_+ \pm i\tau_0 \quad (11)$$

где τ_0 - точки пересечения кривых $y = \operatorname{ch} 2t\theta_+$ и $y = (-1)^{k+1}(1 + 2a_0)$.

Из (11) следует, что в случае однородного клина особенность напряжений не зависит от электроупругих параметров задачи. Этот частный случай был рассмотрен также в работах [8,9].

Как показано в работе [5], первый корень уравнения (8) при действительных значениях $y_k < 1$ ($k=1,2$) всегда меньше единицы. При других значениях y_k уравнение (8) может иметь и комплексные корни. Численные расчеты показывают, что для первых четырех вышеприведенных пар $\text{Re} \lambda_1 < 1$, т.е. характеристики связанных полей бесконечно возрастают при приближении к угловой точке A_2 . Аналогичная ситуация имеет место в случаях $a = \varepsilon = e$; $a = e = 1$, $\varepsilon \neq 1$; $\varepsilon = e = 1$, $a \neq 1$ и др. Для пятой пары $\lambda_1 = 1 + i\varepsilon$ (ε - малое положительное число), т.е. соединение работает как однородный материал. Это и следовало ожидать, т.к. в этом случае отношения соответствующих параметров близки к единице ($a = 0.973$, $\varepsilon = 1.117$, $e = 0.756$).

В частном случае, когда $C = 4A_+A_-$, что эквивалентно условию

$$c_{44}^{(1)} \varepsilon_1 + e_{15}^{(1)} e_{15}^{(1)} = c_{44}^{(2)} \varepsilon_2 + (e_{15}^{(2)})^2$$

из (8) и (9) следует уравнение

$$\left[\sin^2 \lambda \pi - (A_- / A_+) \sin^2 \lambda (\pi - \theta_1) \right]^2 = 0$$

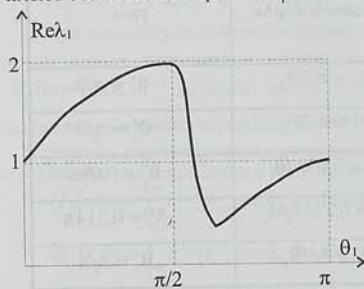
которое, как легко показать, при $|A_-| < A_+$ ($A_- < 0$) не имеет комплексных корней. Действительные корни в этом случае равны

$$\lambda_1 = nq \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

при

$$\theta_1 = \pi p / q, \quad (p = 1, 2, 3, \dots; q = 1, 2, 3, \dots)$$

Это означает, что характеристики полей в окрестности точки A_2 не имеют особенностей при $0 < \theta_1 < 2\pi$.



Фиг.3

В общем случае зависимость λ_1 от электромеханических и геометрических параметров составного тела достаточно сложная. На фиг. 3 приведен график изменения $\text{Re} \lambda_1$ в зависимости от θ_1 ($0 \leq \theta_1 \leq \pi$) для случая $y_1 = 4$, $y_2 = 5$, рассчитанный по (8). В интервале $0 < \theta_1 \leq 2\pi$ график симметричен относительно линии $\theta_1 = \pi$. Видно, что пьезоэффект может изменить

около угловой точки A_2 концентрационное состояние на малонапряженное. Расчеты показывают, что малонапряженное состояние имеет место также в других случаях, например, в случае $y_1 = -0.6$, $y_2 = -4$ всегда $\text{Re} \lambda_1 > 1$ для θ_1 из интервала $0 < \theta_1 \leq 2\pi$. При отсутствии пьезоэффекта ($e_{15} = 0$) угловая точка A_2 всегда является очагом сильной концентрации напряжений [5], если только $a \neq 1$ и $\theta_1 \neq \pi$. Следовательно, в случае второй задачи пьезоэффект может существенно изменить поведения характеристик связанных полей в окрестности угловой точки кусочно-однородного тела.

Таким образом, получены решения для асимптотического поведения характеристик связанных полей в окрестности угловых точек (формулы (6')), которые могут быть использованы при построении более точных аналитических и численных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лавриенко В.В. Пьезоэлектрические трансформаторы. -М.: Энергия, 1975, 122с.
2. Кудиев Ю.Н. и др. Основы колебаний однослойных и многослойных пьезокерамических преобразователей. -Баку: ЭЛМ, 1982, 365 с.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических электропроводных тел. -М.: Наука, 1988, 472 с.
4. Электроразведка. Справочник геофизика. -М. Недра, 1980, 518 с.
5. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. -Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987, 338 с.
6. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Об одной антиплоской задаче электроупругости для составного тела. //Изв. НАН Армении, Механика, 1995, т. 48, №3, с. 15-23.
7. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела. //Докл. АН АрмССР, 1988, т.86, №4, с. 161-165.
8. Белубекян М.В., Галпчян П.В. Об особенностях электроупругого поля в окрестности угловой точки при антиплоской задаче. //Инженерно-физические проблемы новой техники. Тезисы докладов. М: 1992, с. 60-61.
9. Белубекян М.В., Галпчян П.В. Определение особенности связанного электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического тела в виде двугранного угла при продольном сдвиге. //МТТ, 1994, №3, с. 102-108.
10. Акустические кристаллы (под редакцией М.П. Шаскольской). -М.: Наука, 1982, с. 632.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
13.06.1997

