ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №1, 1999 Механика

УДК 539.2

К ЗАДАЧЕ СДВИГОВОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Мухсихачоян А.Р.

Ա.Ռ. Մուխսիխաչոյան
Սահքի մակերևույթային ալիքի անհամասեռ միջավայրում

Ցույց է տրված, որ որոշակի տիպերի անհամասեռ միջավայրերի համար շարժման հավասարումը բերվում է հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարման: Ստացված է դիսպերսիոն հավասարումը և բերված են դիսպերսիոն կորերը: Ցույց է տրված, որ սահքի մակերևույթային ալիքի թե փուլային արագությունը և թե գոյության պայմանները էապես կախված են անհամասեռության բնութագրիչներից:

A.R. Mukhsikhachoyan
On The Shear Surface Waves In a Nonhomogeneous Solid

Для конкретных типов неоднородных сред показана возможность приведения уравнения движения к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Получено дисперсионное уравнение и приведены дисперсионные кривые. Показано, что как фазовая скорость, так и условие существования СПВ существенно зависят от характеристик неоднородностей.

Изучение распространения поверхностных акустических волн в неоднородных твердых средах становится все более актуальным в связи с тем, что задав характеристики неоднородной среды, можно управлять распространением волны.

Поперечные поверхностные волны в полупространстве с небольшой поверхностной неоднородностью рассмотрены в работе [1]. В работе [2] показано, что в слабонеоднородном по глубине упругом полупространстве распространяются сдвиговые поверхностные волны (СПВ), условия существования которых существенно зависят от параметров неоднородностей. При помощи БВК метода авторами [3] получено решение задачи о распространении упругих волн в неоднородной упругой среде, рассмотрено движение в неограниченной среде, свойства которой изменяются по гармоническому закону. В работе [4] рассмотрены поверхностные волны в слое при конкретных законах неоднородности среды, а в [5] - динамические особенности распространения волн в вертикально-неоднородных средах.

В настоящей статье исследуется как возможность приведения уравнения движения к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами (с помощью соответствующего выбора законов изменения жесткости и плотности неоднородной среды), так и возможность существования СПВ в данной среде.

1. Отнесем декартовую систему координат XYZ к упругому неоднородному полупространству таким образом, чтобы абсциссы совпали с направлением распространения волны, а ординаты - с направлением распространения в глубь полупространства $y > 0$. Рассматривается антиплоское напряженно-деформируемое состояние с вектором перемещения $U = \{0;0;W(x,y,t)\}$. Характеристиками неоднородной

среды являются модуль сдвига $G(y)$ и плотность $\rho(y)$. Как известно, уравнение движения упругой изотропной неоднородной среды имеет вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{1}{G(y)}\frac{\partial}{\partial y}\left[G(y)\frac{\partial W}{\partial y}\right]=\frac{1}{c^2(y)}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$

где $C(y)=\left[G(y)/\rho(y)\right]^{1/2}$ – переменная скорость сдвиговой объемной волны. Ищем решение этого уравнения в виде

$$W=\varphi(y)\exp\left[i(kx-\omega t)\right]$$

Тогда уравнение (1.1) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами

$$\varphi\ (y)+G\ (y)G^{-1}(y)\varphi\ (y)-k^2(1-\eta)\varphi(y)=0 \qquad (1.2)$$

где $\eta(y)=V^2/C^2(y)$, $V=\omega/k$ - фазовая скорость СПВ. Если ввести функцию

$$\Psi(y)=G^{1/2}(y)\varphi(y) \qquad (1.3)$$

то для $\Psi(y)$ получим

$$\Psi\ \ -\nu^2\Psi=0 \qquad (1.4)$$

где

$$\nu=\left[k^2(1-\eta(y))+(G^{1/2}(y))\ \ G^{-1/2}(y)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Однако видно, что при определенных неоднородностях, (1.4) можно привести к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Для этого необходимо, чтобы имели место следующие требования:

1. $C(y)=C=\text{const}$ – скорость сдвиговой объемной волны была постоянной, т.е. жесткость и плотность среды менялись идентичным образом.

2. $(G^{1/2}(y))\ \ G^{-1/2}(y)=\beta=\pm\dfrac{1}{p^2}=\text{const}$ (1.5)

второе слагаемое в выражении ν также постоянно.

Интегрируя выражение (1.5), для жесткости неоднородной среды получим следующие возможные законы изменения [7]:

$$G(y)=\begin{cases} G_0\left[\mathrm{ch}(y/p)+A\mathrm{sh}(y/p)\right]^2, & \beta=1/p^2 \quad (1.6)\\ G_0\left[1+Ay\right]^2, & \beta=0 \quad (1.7)\\ G_0\left[\cos(y/p)+A\sin(y/p)\right]^2, & \beta=-1/p^2 \quad (1.8)\end{cases}$$

где p, A и $G(0)=G_0>0$ - постоянные. По требованию 1 плотность этой среды будет меняться аналогичными (1.6)-(1.8) законами

$$\rho(y)=G(y)/C^2$$

2. С учетом требований 1 и 2 решение уравнения (1.4) запишется следующим образом [6] :

$$\psi(y)=\psi(0)\exp(-\nu y) \qquad (2.1)$$

где

$$\nu=\left[k^2(1-\eta)\pm 1/p^2\right]^{1/2}, \qquad \eta=V^2/C^2$$

Тогда поле упругих перемещений СПВ представляется в виде

$$W(x,y,t)=W(0)[G(0)/G(y)]^{1/2}\exp(-\nu y)\exp[i(kx-\omega t)] \tag{2.2}$$

Исходя из (2.1), условие затухания волны примет вид

$$0<V/C<\left[1\pm 1/(kp)^2\right]^{1/2} \tag{2.3}$$

Очевидно, что оно зависит от волнового числа и, следовательно, затухание допустимо для СПВ с длиною

$$kp>1,\ \text{если}\ \beta=-1/p^2 \tag{2.4}$$

$$\infty>kp>0,\ \text{если}\ \beta=1/p^2 \tag{2.5}$$

По коротковолновому приближению (2.3) приводится к условию затухания волны для однородной среды, а в случае длинноволнового приближения (что приемлемо только для (2.5)) верхний предел допустимого диапазона фазовой скорости стремится к бесконечности.

Пусть граница полупространства $y=0$ свободна от механических нагрузок $\sigma_{32}=0$. Тогда дисперсионное уравнение запишется в виде

$$2\nu G(0)+G\ (0)=0 \tag{2.6}$$

где ν определяется по (2.1), а $G(y)$ - по (1.6)-(1.8). Из (2.6) видно, что условием существования СПВ в рассматриваемой среде является

$$G\ (0)\le 0 \tag{2.7}$$

Последнее условие равносильно тому, чтобы постоянная **A** в (1.6)-(1.8) стала отрицательной при $\beta=0$ или неположительной при других значениях β. Из дисперсионного уравнения (2.6) определим фазовую скорость СПВ

$$V/C=\left[1+H\ (0)/k^2\right]^{1/2} \tag{2.8}$$

где

$$H=\ln\sqrt{G}$$

Легко заметить, что найденная скорость удовлетворяет условию затухания волны. Требование, чтобы скорость была действительной величиной, приводит к ограниченности длины распространяющихся волн:

$$kp>K_1=\left[-H\ (0)p^2\right]^{1/2} \tag{2.9}$$

если

$$H\ (0)<0 \tag{2.10}$$

В обратном же случае, если

$$H\ (0)>0 \tag{2.11}$$

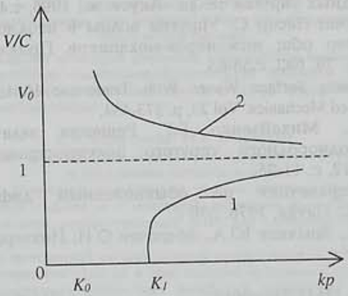
длина этих волн не ограничивается. Однако, требование (2.9) более сильно, чем (2.4), следовательно, длина СПВ определяется именно по (2.9). Для конкретных неоднородностей (1.6)-(1.8) соответственно получим

$$H\ (0)=\begin{cases}(1-A^2)/p^2\\ -A^2\\ -(1+A^2)/p^2\end{cases}$$

Как и следовало ожидать, при (1.6) выполняется условие (2.10), если $A^2>1$ или (2.11), если $A^2<1$. Из всего вышесказанного следует, что дисперсионные кривые, изображающие зависимость $V(kp)$, имеют вид приведенный на фиг.1. Кривая 1 соответствует случаю (2.10), а кривая 2 - случаю (2.11). Первая начинается со значения K_1 и при $kp\to\infty$ приближается к 1, оставаясь меньше ее. Вторая кривая начинается с верхнего предела допускаемого диапазона фазовой скорости V_0 (которая пределяется по (2.3) для определенного K_0) и при $kp \to \infty$ приближается 1, оставаясь больше нее.

3. Обсудим некоторые частные случаи. Пусть постоянная $A=1$, тогда жесткость представится в виде

$$G(y)=\begin{cases} G_0 \exp(2y/p), & \beta>0 \quad (3.1)\\ G_0(1+y/p)^2, & \beta=0 \quad (3.2)\\ G_0[1+\sin(2y/p)]^2, & \beta<0 \quad (3.3)\end{cases}$$



Фиг. 1

Первая из этих функций представляет из себя экспоненциально возрастающуюся зависимость от координаты y. Вторая функция на области определения $G(y)$ также непрерывно возрастает. И, наконец, третья - (3.3) является периодически изменяющейся по глубине характеристикой среды. Все эти случаи характерны тем, что ни при одной из них СПВ не существует, поскольку нарушается условие существования поверхностной волны $A<0$.

Теперь предположим $A=-1$. Тогда

$$G(y)=\begin{cases} G_0 \exp(-2y/p), & \beta>0 \quad (3.4)\\ G_0(1-y)^2, & \beta=0 \quad (3.5)\\ G_0[1-\sin(2y/p)]^2, & \beta<0 \quad (3.6)\end{cases}$$

Здесь, в отличие от предыдущего, (3.4) характеризует по глубине убывающуюся жесткость. При том для всех случаев (3.4)-(3.6) СПВ существует.

В случае $A=0$ имеем

$$G(y)=\begin{cases} G_0 \mathrm{ch}^2(y/p), & \beta>0 \quad (3.7)\\ G_0, & \beta=0 \quad (3.8)\\ G_0\cos^2(y/p), & \beta<0 \quad (3.9)\end{cases}$$

Тут характерным является тот факт, что (3.8) соответствует случаю однородной среды, при которой, как известно, СПВ не существует, но для

(3.7) и (3.9) $G(0)=0$, что вполне соответствует условию существования СПВ.

Автор благодарен доценту кафедры механики сплошной среды ЕГУ Минасяну М.М. за полезные обсуждения и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И.А. О поверхностной волне, вызванной неоднородностью в твердом теле. - В кн.: Акустическая спектроскопия, квантовая акустика, акустоэлектроника: Материалы X Всесоюз. конф. по квантовой акустике и акустоэлектронике. Ташкент: Фан, 1978, с. 101-103.
2. Белубекян М.В., Мухсихачоян А.Р. Сдвиговая поверхностная волна в слабонеоднородных упругих телах. -Акуст. ж., 1996, т.42, №2, с.179-182.
3. Нэйфех А., Немат-Насер С. Упругие волны в неоднородных упругих средах. -Тр. амер. общ. инженеров-механиков. Прикладная механика, серия Е, 1972, т. 39, №3, с.58-65.
4. Maugin G.A. Elastic Surface Waves With Transverse Horizontal Polarization// Advances In Applied Mechanics. Vol 23, p. 373-434.
5. Алексеев А.С., Михайленко Б.Г. Решение задачи Лэмба для вертикально-неоднородного упругого полупространства. - Физика Земли, 1976, №12, с. 11-25.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1976. 576 с.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. -М.: Наука, 1981. 797 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
9.07.1997