ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №1, 1999 Механика

УДК 539.3

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЯМИ ОРТОТРОПНОГО КРУГОВОГО СЕКТОРА

Шабоян А.Ф

Ա.Ֆ.Շաբոյան
Օրթոտրոպ կորագիծ եզրով սալի տատանումների օպտիմալ ստաբիլիզացիան

Դիտարկվում է գլանաձև անիզոտրոպիայով օժտված կորագիծ, օրթոտրոպ սալի օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդիրը, որի խտությունը փոփոխվում է նշված օրենքով: Սալը հոդակապորեն ամրացված է եզրերով: Տատանումների կայունացումը տեղի է ունենում ղեկավարող ազդեցությամբ, որը կիրառվում է սալի վերին մակերևույթի վրա:

Խնդիրը լուծվում է Ֆուրիեի-Բեսսելի մեթոդով, ստացվում է ժամանակից կախված, անջատվող փոփոխականներով երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների անվերջ համակարգ: Որոշվում է օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունը, որը ստաբիլիզացիայի է ենթարկվում տվյալ շարժումը համակարգի լրիվ էներգիայի մինիմալ արժեք ունենալու դեպքում:

A.F.Shaboyan
On the optimal stabilization of orthotropic curvilinear plate by vibration

Рассматривается задача об оптимальной стабилизации колебаниями шарнирно-опертой по краям цилиндрически анизотропной пластинки, плотность которой изменяется по заданному закону.

Срединная плоскость пластинки имеет вид криволинейного четырехугольника.

Пластинка стабилизируется при помощи управляющего воздействия, приложенного на ее верхней плоскости. Применяя метод Фурье-Бесселя, получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Определяется оптимальное управляющее воздействие для каждого уравнения в классе L_2, стабилизирующее данное движение при минимизации полной энергии системы.

Вопросам оптимальной стабилизации ортотропной пластинки и оболочки посвящены работы [1]- [2].

§1. Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации цилиндрически анизотропной пластинки, плотность которой изменяется по заданному закону $\rho=\rho(r)=\rho_0 r^{\alpha}$. Срединная плоскость пластинки имеет вид криволинейного четырехугольника. На пластинку действует сила $F(r,\theta,t)\in L_2$.

В полярных координатах уравнение колебания имеет следующий вид [3]:

$$D_r\frac{\partial^4 W}{\partial r^4}+\frac{2D_{r\theta}}{r^2}\frac{\partial^4 W}{\partial r^2\partial\theta^2}+\frac{D_\theta}{r^4}\frac{\partial^4 W}{\partial\theta^4}+\frac{2D_r}{r}\frac{\partial^3 W}{\partial r^3}-$$

$$-\frac{2D_{r\theta}}{r^3}\frac{\partial^3 W}{\partial r\partial\theta^2}-\frac{D_\theta}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{2\left(D_\theta+D_{r\theta}\right)}{r^4}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}+$$

$$+\frac{D_\theta}{r^3}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\rho(r)h}{g}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=F(r,\theta,t) \tag{1.1}$$

где $W(r,\theta,t)$ - прогиб пластинки, h - ее толщина, а D_r, D_θ, $D_{r\theta}$ - жесткости. Предположим, что пластинка шарнирно оперта по краям. Тогда прогиб пластинки удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} &W=0 \\ &\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}=0 \end{aligned}\right| \text{при} \quad \begin{aligned} \theta=0 \\ \theta=\alpha \end{aligned} \quad c \le r \le b \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &W=0 \\ &\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{\nu_\theta}{r}\frac{\partial W}{\partial r}=0 \end{aligned}\right| \text{при} \quad \begin{aligned} r=c \\ r=b \end{aligned} \quad 0 \le \theta \le \gamma \tag{1.3}$$

Пусть $W(r,\theta,t)$ удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$W(r,\theta,0)=\varphi(r,\theta) \qquad c \le r \le b \tag{1.4}$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(r,\theta) \qquad 0 \le \theta \le \gamma$$

где $\varphi(r,\theta)$ и $\psi(r,\theta)$ - соответственно, начальный прогиб и скорость произвольной точки срединной плоскости.

Задача заключается в следующем:

определить закон внешней нагрузки $F(r,\theta,t)$, удовлетворяющей краевой задаче (1.1)-(1.3) при начальных условиях (1.4), который функционалу

$$I=K+V+\frac{h\chi}{2g}\int_c^b\int_0^\gamma\int_0^\infty \rho F^2(r,\theta,t)\,dr\,d\theta\,dt \tag{1.5}$$

придает минимальное значение.

В выражении (1.5) K - кинетическая энергия, а V - потенциальная энергия. Третий член функционала - энергия внешней нагрузки. χ - положительный коэффициент, обеспечивающий одинаковую размерность всех слагаемых.

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.1), имеет следующий вид [5]:

$$W(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}T_{nm}(t)R_{nm}(r)\sin\lambda_n\theta \tag{1.6}$$

где $\lambda_n=\dfrac{\pi n}{\gamma}$

$$R_{nm}(r)=r^a\left[C_{1n}J_{\nu n}(p_{nm}r^{\alpha_1})+C_{2n}Y_{\nu n}(p_{nm}r^{\alpha_1})+C_{3n}J_{\nu n}(ip_{nm}r^{\alpha_1})+C_{4n}Y_{\nu n}(ip_{nm}r^{\alpha_1})\right]$$

$$a=-\frac{\alpha}{4},\ \alpha_1=\frac{\alpha}{4}+1,\ \nu_n^2=\frac{2l_n-(1+\alpha)^2\left((2\alpha+1)^2-K_n\right)}{\alpha^2\left((2\alpha+1)^2-K_n\right)} \tag{1.7}$$

$$l_n=\frac{\lambda_n^2\left[D_\theta\lambda_n^2-2(D_\theta+D_{r\theta})\right]}{D_r},\ K_n=\frac{D_\theta+2\lambda_n^2D_{r\theta}}{D_r}$$

числа p_{nm} являются собственными значениями. Так как функции $J_{\nu n}$ и $Y_{\nu n}$ образуют полный ортогональный базис в классе L_2 с весом x, то с помощью метода преобразования Фурье-Бесселя для внешней нагрузки получим:

$$F(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}T_{nm}^*(t)R_{nm}(r)\sin\lambda_n\theta \tag{1.8}$$

где $T_{nm}^*(t)=a_{nm}\cdot T_{1n}(t)$, а a_{nm} - коэффициенты разложения Бесселя, которые определяются по формулам

$$a_{nm}=\frac{2}{l^2 J^2_{\nu_n+1}(p_{nm}l)}\int_0^l R_n(x)J_{\nu_n}(p_{nm}x)xdx$$

Подставляя выражения (1.6) и (1.8) в уравнение (1.1) с учетом независимости функций $R_{nm}(r)$ и $\sin\lambda_n\theta$ $(n=1,2,...,\ m=1,2,...)$, получим следующую систему бесконечных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{T}_{nm}(t)+H_{nm}T_{nm}(t)=H_{nm}u_{nm}(t)$$

где $H_{nm}=\dfrac{D_r g\, p^2_{nm}}{\rho_0 h}$, $H_{nm}=\dfrac{\rho_0 h}{D_r g\, p^2_{nm}}$ (1.9)

После ряда преобразований функционал (1.5) примет следующий вид:

$$I=\frac{h\gamma\rho_0}{4g}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}B_{nm}\int_0^{\infty}\left[\dot{T}^2_{nm}(t)+\frac{D_r g}{h\rho_0}\tilde{\lambda}_{nm}T^2_{nm}(t)+u^2_{nm}(t)\right]dt \qquad (1.10)$$

где $\tilde{\lambda}_{nm}=\dfrac{A_{nm}}{B_{nm}}$, $B_{nm}=\displaystyle\int_c^b r^{\alpha+1}R^2_{nm}(r)dr$

$$A_{nm}=\int_c^b\left\{R_{nm}+\sqrt{\frac{D_\theta+4D_k\lambda_n^2}{D_r}}\frac{1}{r}R_{nm}+\sqrt{\frac{D_\theta+4D_k\lambda_n^2}{D_r}}\frac{1}{r^2}R_{nm}\right\}^2dr$$

Из того, что функционал (1.10) должен принимать минимальное значение, следует стабильность движения, так как в противном случае функционал примет бесконечно большое значение. Из начальных условий следует, что функции $T_{nm}(t)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$T_{nm}(t)\big|_{t=0}=a_{nm}\quad (n,m=1,2,...) \qquad (1.11)$$

$$\dot{T}_{nm}(t)\big|_{t=0}=b_{nm}$$

где $a_{nm}=\dfrac{4}{b^2\gamma R^2_{nm}(p_{nm}b)}\displaystyle\int_c^b\int_0^{\gamma} r^{2\alpha_1-1}\varphi(r,\theta)R_{nm}(r)\sin\lambda_n\theta drd\theta$

$$b_{nm}=\frac{4}{b^2\gamma R^2_{nm}(p_{nm}b)}\int_c^b\int_0^{\gamma} r^{2\alpha_1-1}\psi(r,\theta)R_{nm}(r)\sin\lambda_n\theta drd\theta$$

Общий функционал (1.10) примет минимальное значение, если минимальным будут значения каждого слагаемого, входящего в функционал.

$$I_{nm}=\lambda_{nm}\int_0^{\infty}\left[\dot{T}_{nm}(t)+L_{nm}T^2_{nm}(t)+u^2_{nm}(t)\right]dt$$

где $L_{nm}=\dfrac{Drg}{h\rho_0}\dfrac{A_{nm}}{B_{nm}}$ (1.12)

Функции $u_{nm}(t)$ ищем следующим образом:

$$u_{nm}(t)=C_{1nm}T_{nm}(t)+C_{2nm}\dot{T}_{nm}(t) \qquad (1.13)$$

Введем функции Ляпунова $V_{nm}\left(T_{nm},\overset{\circ}{T}_{nm}\right)$, которые вместе с $u_{nm}\left(T_{nm},\overset{\circ}{T}_{nm}\right)$ удовлетворяют уравнению Ляпунова-Беллмана [4].

$$\frac{\partial V_{nm}}{\partial T_{nm}}\dot{T}_{nm}+\frac{\partial V_{nm}}{\partial \dot{T}_{nm}}(-H_{nm}T_{nm}+H_{nm}u_{nm})=$$

$$=-\left[K_{1nm}T_{nm}^2+2K_{2nm}T_{nm}\dot{T}_{nm}+K_{3nm}\left(\dot{T}_{nm}\right)^2+u_{nm}^2\right],\ (n,m=1,2,\dots) \tag{1.14}$$

$$\lambda_{nm}\frac{\partial V_{nm}}{\partial T_{nm}}=-2u_{nm}$$

Представим V_{nm} в следующем виде:

$$V_{nm}=A_{1nm}T_{nm}^2+2A_{2nm}T_{nm}\dot{T}_{nm}+A_{3nm}\dot{T}_{nm}^2 \tag{1.15}$$

Подставляя (1.13) в (1.14), с учетом (1.15) получим

$$A_{1nm}=C_{1nm}C_{2nm}-C_{2nm},\ C_{1nm}=1\pm\sqrt{1+L_{nm}} \quad \text{(I)}$$

$$A_{2nm}=-\frac{1}{H_{nm}}C_{1nm},\ C_{2nm}=\pm\sqrt{1-\frac{2}{\lambda_{nm}}C_{1nm}} \quad \text{(II)}$$

$$A_{3nm}=-\frac{1}{H_{nm}}C_{2nm}$$

Знак в (I) и (II) определяется из условий Сильвестра, откуда следует, что

$$\frac{C_{1nm}}{H_{nm}}<0;\ \frac{C_{2nm}}{H_{nm}}<0 \tag{1.16}$$

Таким образом, решение задачи (1.9), (1.11), (1.13) имеет следующий вид:

$$T_{nm}(t)=\frac{b_{nm}-a_{nm}}{\alpha_{1nm}-\alpha_{2nm}}e^{\alpha_{1nm}t}+\frac{b_{nm}-a_{nm}\alpha_{1nm}}{\alpha_{2nm}-\alpha_{1nm}}e^{\alpha_{2nm}t} \tag{1.17}$$

где $\alpha_{1nm}=\frac{C_{2nm}H_{nm}}{2}+\sqrt{\frac{C_{2nm}^2H_{nm}^2}{4}+H_{nm}(C_{1nm}-1)}$

$$\alpha_{2nm}=\frac{C_{2nm}H_{nm}}{2}-\sqrt{\frac{C_{2nm}^2H_{nm}^2}{4}+H_{nm}(C_{1nm}-1)} \tag{1.18}$$

Для $u_{nm}(t)$ получим

$$u_{nm}(t)=\frac{(C_{1nm}+\alpha_{1nm}C_{2nm})(b_{nm}-a_{nm}\alpha_{2nm})}{\alpha_{1nm}-\alpha_{2nm}}e^{\alpha_{1nm}t}+$$

$$+\frac{(C_{1nm}+\alpha_{2nm}C_{2nm})(a_{nm}\alpha_{1nm}-b_{nm})}{\alpha_{1nm}-\alpha_{2nm}}e^{\alpha_{2nm}t}$$

§2. Функции $T_{nm}(t)$ и $u_{nm}(t)$ являются решениями задачи оптимальной стабилизации для функционала I.

С помощью функций u_{nm} можно получить значения внешней нагрузки $F(r,\theta,t)$, которая является функцией класса L_2. Это следует из равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u_{nm}^2(t)$ (2.1)

Из условий (1.16) и (1.18) получаем, что

$\mathrm{Re}(\alpha_{1nm})<0,\ \mathrm{Re}(\alpha_{2nm})<0$

Для доказательства равномерной сходимости ряда (2.1) достаточно показать, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_{1nm}-\alpha_{2nm}}\left[b_{nm}\left(C_{1nm}+\alpha_{1nm}C_{2nm}\right)-a_{nm}\alpha_{2nm}\left(C_{1nm}+\alpha_{1nm}C_{2nm}\right)\right]\right\}^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_{1nm}-\alpha_{2nm}}\left[a_{nm}\left(C_{1nm}+\alpha_{2nm}C_{2nm}\right)-b_{nm}\left(C_{1nm}+\alpha_{2nm}C_{2nm}\right)\right]\right\}^2 \qquad (2.2)$$

мажорирующие ряд (2.1), сходятся.

Рассмотрим следующие величины:

$$\left|\frac{C_{1nm}+\alpha_{knm}C_{2nm}}{\alpha_{1nm}-\alpha_{2nm}}\right|,\ \left|\frac{\alpha_{jnm}\left(C_{1nm}+\alpha_{knm}C_{2nm}\right)}{\alpha_{1nm}-\alpha_{2nm}}\right| \qquad (2.3)$$

где $\qquad (j\cdot k=2;\ j,k=1,2)$

После некоторых преобразований (2.3) можно привести к следующему виду:

$$\left|\frac{\alpha_{jnm}\left(C_{1nm}+\alpha_{knm}C_{2nm}\right)}{\alpha_{1nm}-\alpha_{2nm}}\right|=\left|\left(C_{2nm}H_{nm}+\varepsilon_k\sqrt{C_{2nm}^2H_{nm}^2+4H_{nm}\left(C_{1nm}-1\right)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{2C_{1nm}C_{2nm}^2H_{nm}+\varepsilon_k\sqrt{C_{2nm}^4H_{nm}^2+4C_{2nm}H_{nm}\left(C_{1nm}-1\right)}}{4\sqrt{C_{2nm}^2H_{nm}^2+4H_{nm}\left(C_{1nm}-1\right)}}\right|$$

$$\left|\frac{C_{1nm}+\alpha_{knm}C_{2nm}}{\alpha_{1nm}-\alpha_{2nm}}\right|=\left|\frac{2C_{1nm}+C_{2nm}^2H_{nm}+\varepsilon_k\sqrt{C_{2nm}^4H_{nm}^2+4C_{nm}H_{nm}\left(C_{1nm}-1\right)}}{2\sqrt{C_{2nm}^2H_{nm}^2+4H_{nm}\left(C_{1nm}-1\right)}}\right|$$

$$n,m=1,2,\ldots;\ j,\ \ k=1,2;\ \ j\cdot k=2;\ \ \varepsilon_1=1;\ \ \varepsilon_2=-1 \qquad (2.4)$$

Так как функции $\dfrac{\partial^4 W}{\partial r^{4-j}\partial\theta^j}$ и $\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ $\quad (j=\overline{0,4})$ также принадлежат по крайней мере к классу L_2 на $[b;c]\times[0;\gamma]\times[0;\infty]$, то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(n^j m^{4-j}a_{nm}\right)^2 \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(n^j m^{4-j}b_{nm}\right)^2,\ (j=\overline{0,4}) \qquad (2.5)$$

должны сходиться [6].

Сходимость рядов (2.2) следует из сходимости рядов (2.5), выполнение которых естественно предполагать, исходя из того, что силы, действующие на пластинку, принадлежат к классу L_2.

Следовательно, равномерная сходимость ряда (2.1) при условии сходимости рядов (2.5) установлена.

Ограниченность минимального значения функционала I тоже следует из сходимости рядов (2.5)

$$\min I=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\rho_0 h\gamma}{4}A_{nm}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{b_{nm}-a_{nm}\alpha_{2nm}}{\alpha_{1nm}-\alpha_{2nm}}\right)^2\left[\frac{L_{nm}}{\alpha_{1nm}}+\alpha_{1nm}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha_{1nm}}\left(C_{1nm}+\alpha_{1nm}C_{2nm}^2\right)^2\right]+2\frac{\left(b_{nm}-a_{nm}\alpha_{2nm}\right)\left(a_{nm}\alpha_{1nm}-b_{nm}\right)}{\left(\alpha_{1nm}-\alpha_{2nm}\right)^2}\times$$

$$\times\left[\frac{L_{nm}}{\alpha_{1nm}+\alpha_{2nm}}+\frac{\alpha_{1nm}\alpha_{2nm}}{\alpha_{1nm}+\alpha_{2nm}}+\frac{\left(C_{1nm}+C_{2nm}\alpha_{1nm}\right)\left(C_{1nm}+\alpha_{2nm}C_{2nm}\right)}{\alpha_{1nm}+\alpha_{2nm}}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{a_{nm}\alpha_{1nm}-b_{nm}}{\alpha_{1nm}-\alpha_{2nm}}\right)^2\times\left[\frac{L_{nm}}{\alpha_{2nm}}+\alpha_{2nm}+\frac{1}{\alpha_{2nm}}(C_{1nm}+\alpha_{2nm}C_{2nm})^2\right]\Bigg\}\Bigg] \quad (2.6)$$

Таким образом, функция $F(r,\theta,t)$ оптимально стабилизирует колебательное движение пластинки при минимизации функционала (1.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян В.С., Габриелян М.С., Юсиф Ю.Дж. Об оптимальной стабилизации ортотропной прямоугольной пластинки. -Уч. зап. ЕГУ, 1987, №3.
2. Юсиф Ю.Дж. Решение задачи оптимальной стабилизации цилиндрической оболочки. -Уч. зап. ЕГУ, 1989, №2.
3. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. -Ер. изд. ЕГУ, 1976.
4. Габриелян М.С. О стабилизации маханической системы мощности континуума. -Уч. зап. ЕГУ, 1975, №2.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1976.
6. Колмогоров А.М., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука, 1976.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 22.11.1996