ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №4, 1998 Механика

УДК 62.52

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ МОЩНОСТИ КОНТИНУУМА В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ

Габриелян М. С.

Մ.Ս.Գաբրիելյան

Կոնտինուումի հզորության մեխանիկական համակարգի օպտիմալ ղեկավարության մասին հակամետ իրավիճակներում

Հետազոտված է կոնտինուումի հզորության մեխանիկական համակարգի օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը, երբ նրա վրա ազդում են հակամետ ուժեր: Խնդրի լուծումը բերվում է սիմետրիկ կորիզով, և աջ մասով ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը: Աջ մասում մասնակցում են երկու ֆունկցիաներ, որոնք հանդիսանում են հակամետ ազդեցություններ: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի եղանակով և բերված է երկրորդ կարգի անվերջ դիֆերենցիալ հավասարումներով բնութագրվող խաղային խնդրին:

Էքստրեմալ նշանառության եղանակով որոշված են օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունները: Նշված են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում այդ ուժերը պատկանում են L_2 դասին:

M.S.Gabrielyan

On the optimal control for the continuum power mechanical system in the conflict situations

Исследуется задача об оптимальном управлении механической системой мощности континуума, когда на континуум действуют противоборствующие силы. Решение задачи приводится к решению интегро-дифференциального уравнения с симметричным ядром и правой частью [1]. В правой части участвуют две противоборствующие силы в виде функций, действующих на континуум. Задача решается методом Фурье и приводится к игровой задаче для бесконечной системы дифференциальных уравнений второго порядка.

Применяя методы экстремального прицеливания, определяются оптимальные управляющие силы. Указываются достаточные условия, при которых действующие силы принадлежат классу L_2.

§1. Рассмотрим упругий линейный континуум S. Пусть $Y(x,t)$ - отклонение точки с абсциссой x от положения равновесия в момент t. Допустим, что функция $K(x,s)$ есть функция влияния, т.е. прогиб точки x от единичной силы, приложенной в точке $s(x,s\in S)$ континуума. Пусть на континуум действуют дополнительные силы $dF_1(x,t)$ и $dF_2(x,t)$, приложенные к участку dx в точке x перпендикулярно к оси x.

Известно [1], что определение прогиба $Y(x,t)$ приводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$Y(x,t)=-\int_S K(x,s)\frac{\partial^2 Y(s,t)}{\partial t^2}d\sigma(s)+\int_S K(x,s)dF_1(s,t)+ \\ +\int_S K(x,s)dF_2(s,t), \tag{1.1}$$

где $d\sigma(s)$ - масса, приходящаяся на элемент ds континуума. Исходя из принципа Максвелла, предположим, что функция влияния $K(x,s)$ симметрична, квадратично суммируема на континууме S по отношению к дифференциалу $d\sigma(s)$. Тогда интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_S K(x,s)\varphi(s)d\sigma(s) \tag{1.2.}$$

соответствует система ортонормированных собственных функций $\{\varphi_n(x)\}$ по отношению к дифференциалу $d\sigma(s)$ с вещественными собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$.

При сделанных предположениях ядро $K(x,s)$ можно представить в виде

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i} \tag{1.3}$$

Таким образом, (1.1) можем переписать в виде

$$Y(x,t) = -\int_S K(x,s)\frac{\partial^2 Y(s,t)}{\partial t^2}d\sigma(s) + \int_S K(x,s)dF_1(s,t) + \\ + \int_S K(x,s)dF_2(s,t) \tag{1.4}$$

Подставляя значение $K(x,s)$ (1.3) в (1.4), получим

$$Y(x,t) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\int_S \frac{\partial^2 Y(s,t)}{\partial t^2}\varphi_i(s)d\sigma(s) + \\ + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\int_S \varphi_i(s)dF_1(s,t) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\int_S \varphi_i(s)dF_2(s,t) \tag{1.5}$$

Умножая (1.5) на $\varphi_i(x)$ и интегрируя по $d\sigma(x)$ на S, получим

$$T_i''(t) = -\lambda_i T_i(t) + u_i(t) + \mathrm{v}_i(t) \qquad (i = 1,2,\ldots) \tag{1.6}$$

Здесь

$$T_i = \int_S Y(x,t)\varphi_i(x)d\sigma(x) \tag{1.7}$$

$$u_i(t) = \int_S \varphi_i(x)dF_1(x,t); \quad \mathrm{v}_i(t) = \int_S \varphi_i(x)dF_2(x,t);$$

Предполагаем, что силы $dF_1(x,t)$ и $dF_2(x,t)$ ограничены в классе функций L_2 на S по следующей норме:

$$\left[\int_S \left(\frac{dF_1(x,t)}{d\sigma(x)}\right)^2 d\sigma(x)\right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(t)\right]^{1/2} \le P$$

$$\left[\int_S \left(\frac{dF_2(x,t)}{d\sigma(x)}\right)^2 d\sigma(x)\right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{v}_i^2(t)\right]^{1/2} \le Q \tag{1.8}$$

равномерно по $t \in [0,T]$.

Здесь P, Q, T — заданные положительные числа.

Пусть заданы также начальный прогиб и начальная скорость континуума

$$Y(x,0) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(0)\varphi_i(x), \qquad \left.\frac{\partial Y}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{T}_i(0)\varphi_i(x) \tag{1.9}$$

Рассмотрим следующую игровую ситуацию:

Пусть первый игрок, распоряжающийся управлениями u_i $(i = 1,2,\ldots)$ стремится привести континуум S в такое положение, чтобы

$\sum_{i=1}^{\infty}(T_i^2(\vartheta)+\dot{T}_i^2(\vartheta))$ принимал наименьшее значение при самом упорном сопротивлении второго игрока, распоряжающегося управляющими воздействиями $\mathrm{v}_i \quad (i=1,2,\ldots)$, а второй игрок в свою очередь стремится максимизировать значение величины (платы) $\sum_{i=1}^{\infty}(T_i^2(\vartheta)+\dot{T}_i^2(\vartheta))$ при самом упорном сопротивлении со стороны первого игрока. Величину $\vartheta(0<\vartheta\le T)$ определим ниже. Динамика игры определяется бесконечной системой дифференциальных уравнений (1.6). Следует отметить, что полученную игровую ситуацию можно было аккуратно исследовать разделением на три игровые задачи. Но так как метод экстремального прицеливания [2] позволяет определить оптимальные стратегии при динамике, определяемой конечномерной системой дифференциальных уравнений, то целесообразно использовать указанный метод с предельным переходом.

§2. Составим гипотетическое рассогласование. Для простоты предположим, что собственные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ положительны, тогда, обозначая

$$z_{1i}=T_i;\quad z_{2i}=\frac{\dot{T}_i}{\sqrt{\lambda_i}}\qquad (i=1,2,\ldots) \tag{2.1}$$

систему дифференциальных уравнений (1.6) можем записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1i}&=\sqrt{\lambda_i}\,z_{2i}\\ \dot{z}_{2i}&=-\sqrt{\lambda_i}\,z_{1i}+u_i+\mathrm{v}_i\qquad (i=1,2,\ldots)\end{aligned} \tag{2.2}$$

i-ый блок фундаментальной матрицы однородной части сисмемы (2.2) будет:

$$Z_i(t,\tau)=\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda_i}\,(t-\tau) & \sin\sqrt{\lambda_i}\,(t-\tau)\\ -\sin\sqrt{\lambda_i}\,(t-\tau) & \cos\sqrt{\lambda_i}\,(t-\tau)\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Гипотетическое рассогласование для сформированной игровой ситуации будет

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(0)}\left(t,\{z_{1i}(t),z_{2i}(t)\},T\right)=\max_{\sum_{i=1}^{\infty}(l_{1i}^2+l_{2i}^2)=1}\Bigg[&\sum_{i=1}^{\infty}(l_{1i},l_{2i})Z_i(T,t)\begin{pmatrix}z_{1i}(t)\\ z_{2i}(t)\end{pmatrix}+\\ &+\int_t^T\min_{\sum_{i=1}^{\infty}u_i^2\le P^2}\sum_{i=1}^{\infty}(l_{1i},l_{2i})Z_i(T,\tau)\cdot\begin{pmatrix}0\\ (\lambda_i)^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}u_i\,d\tau+\\ &+\int_t^T\max_{\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{v}_i^2\le Q^2}\sum_{i=1}^{\infty}(l_{1i},l_{2i})Z_i(T,\tau)\cdot\begin{pmatrix}0\\ (\lambda_i)^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\mathrm{v}_i\,d\tau\Bigg]\end{aligned} \tag{2.4}$$

Так как области $\sum_{i=1}^{\infty}u_i^2\le P^2$; $\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{v}_i^2\le Q^2$ выпуклые, а минимизирующиеся и максимизирующиеся функции линейные, то минимум и максимум достигаются на границах, то есть

$$\varepsilon^{(0)}\left(t,\{z_{1i}(t),z_{2i}(t)\},T\right)=\max_{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(l_{1i}^2+l_{2i}^2\right)\le 1}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[\,l_{1i}a_i+l_{2i}b_i+\right.\right.$$

$$+\int_t^T\min_{\sum u_i^2=P^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(l_{1i}\sin\sqrt{\lambda_i}\,(T-\tau)+l_{2i}\cos\sqrt{\lambda_i}\,(T-\tau)\right)\frac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}}\,d\tau+$$

$$\left.\left.+\int_t^T\max_{\sum v_i^2=Q^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(l_{1i}\sin\sqrt{\lambda_i}\,(T-\tau)+l_{2i}\cos\sqrt{\lambda_i}\,(T-\tau)\right)\frac{v_i}{\sqrt{\lambda_i}}\,d\tau\,\right]\right\} \tag{2.5}$$

где

$$a_i=z_{1i}(t)\cos\sqrt{\lambda_i}\,(T-\tau)+z_{2i}\sin\sqrt{\lambda_i}\,(T-\tau)$$

$$b_i=z_{2i}(t)\cos\sqrt{\lambda_i}\,(T-\tau)-z_{1i}\sin\sqrt{\lambda_i}\,(T-\tau)$$

Используя метод неопределенных коэффициентов Лагранжа, для u_i^0 и v_i^0 получим

$$u_i^0(\tau)=-\frac{P\left[l_{1i}\sin\sqrt{\lambda_i}\,(T-\tau)+l_{2i}\cos\sqrt{\lambda_i}\,(T-\tau)\right]}{\sqrt{\lambda_i}\left[\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}\left(l_{1j}\sin\sqrt{\lambda_j}\,(T-\tau)+l_{2j}\cos\sqrt{\lambda_j}\,(T-\tau)\right)^2\right]^{1/2}} \tag{2.6}$$

$$v_i^0(\tau)=\frac{Q\left[l_{1i}\sin\sqrt{\lambda_i}\,(T-\tau)+l_{2i}\cos\sqrt{\lambda_i}\,(T-\tau)\right]}{\sqrt{\lambda_i}\left[\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}\left(l_{1j}\sin\sqrt{\lambda_j}\,(T-\tau)+l_{2j}\cos\sqrt{\lambda_j}\,(T-\tau)\right)^2\right]^{1/2}}$$

Подставляя значения $u_i^0(\tau)$ и $v_i^0(\tau)$ из (2.6) в (2.5), получим

$$\varepsilon^{(0)}\left(t,\{z_{1i}(t),z_{2i}(t)\},T\right)=\max_{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(l_{1i}^2+l_{2i}^2\right)\le 1}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left(l_{1i}a_i+l_{2i}b_i\right)-\right.$$

$$-(P-Q)\int_t^T\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}\left(l_{1j}\sin\sqrt{\lambda_j}\,(T-\tau)+\right.\right. \tag{2.7}$$

$$\left.\left.\left.+l_{2j}\cos\sqrt{\lambda_j}\,(T-\tau)\right)^2\right]^{1/2}d\tau\right\}$$

При условии $P>Q$ выражение в фигурных скобках в формуле (2.7) является вогнутой функцией по переменным l_{1j} и l_{2j} $(j=1,2,\ldots)$, следовательно [2], максимум в (2.7) при любых $z_{1i}(t),z_{2i}(t)$ достигается на единственном векторе l_{1i}^0,l_{2i}^0 $(i=1,2,\ldots)$, т.е. при любых начальных значениях игровая ситуация регулярна. Компоненты вектора l^0 определяются из следующих уравнений:

$$a_k+\mu l_{1k}^0+$$

$$+\frac{Q-P}{\lambda_k}\int\limits_t^T\frac{\left(\ l_{1k}^0\sin\sqrt{\lambda_k}(T-\tau)+l_{2k}^0\cos\sqrt{\lambda_k}(T-\tau)\ \right)\sin\sqrt{\lambda_k}(T-\tau)d\tau}{\left[\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{-1}\left(l_{1i}^0\sin\sqrt{\lambda_k}(T-\tau)+l_{2i}^0\cos\sqrt{\lambda_k}(T-\tau)\right)^2\right]^{1/2}}=0$$

$$b_k+\mu l_{2k}^0+ \tag{2.8}$$

$$+\frac{Q-P}{\lambda_k}\int\limits_t^T\frac{\left(\ l_{1k}^0\sin\sqrt{\lambda_k}(T-\tau)+l_{2k}^0\cos\sqrt{\lambda_k}(T-\tau)\ \right)\cos\sqrt{\lambda_k}(T-\tau)d\tau}{\left[\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{-1}\left(l_{1i}^0\sin\sqrt{\lambda_i}(T-\tau)+l_{2i}^0\cos\sqrt{\lambda_i}(T-\tau)\right)^2\right]^{1/2}}=0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[(l_{1k}^0)^2+(l_{2k}^0)^2\right]=1$$

Нетрудно заметить, что $\varepsilon^{(0)}\left(t,\left\{z_{1i}(t),z_{2i}(t)\right\},T\right)$ - ограниченная величина, так как ряды, участвующие в выражениях (2.7), сходятся, следовательно, оптимальные управляющие воздействия, определяемые формулой (2.6) равномерно по $\tau\in\left[0,T\right]$, составляют сходящиеся квадратом ряды. Для определения момента ϑ в каждой ситуации нужно найти наименьший корень уравнения.

$$\min_{\tau\in[t_*,\tau]}\varepsilon^{(0)}\left(t_*,\left\{z_{1i}(t_*),z_{2i}(t_*)\right\},\tau\right)=\varepsilon^{(0)}(t_*,\cdot,\vartheta)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осциляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. -М.: Гостехиздат, 1960.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. - М.: Наука, 1974.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 20.01.1997