ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №4, 1998 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИН

Саркисян С.В.

Ս.Վ. Սարգսյան
էլեկտրահաղորդիչ սալերի ոչ գծային մագնիսաառաձգական տատանումների հավասարումների մեկ ճշգրտման մասին

Ճշգրտելով սալի դիմային մակերևույթների վրա գործող պայմանները առաջարկված է հաստատուն մագնիսական դաշտում գտնվող էլեկտրահաղորդիչ սալերի ոչ գծային մագնիսաառաձգական տատանումների հավասարումների մի տարբերակ: Ստացված հավասարումների հիման վրա լուծված է սալ-շերտի ոչ գծային տատանումների խնդիրը լայնական մագնիսական դաշտում:

S.V.Sarkisyan
Some improvements in equations of nonlinear magnetoelastic vibrations of electroconductive plates

Путем уточнения условий на лицевых поверхностях пластин предложен вариант уравнений нелинейных магнитоупругих колебаний электропроводящих пластин во внешнем постоянном магнитном поле. На основе полученных уравнений решена задача нелинейных колебаний пластинки-полосы в поперечном магнитном поле.

Исследованию нелинейных магнитоупругих колебаний пластин и оболочек в магнитном поле посвящены работы [1, 3-5].

В работе [1] на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел [2] получены основные уравнения и соотношения, описывающие нелинейные колебания проводящей пластинки в магнитном поле. Нелинейные колебания проводящей пластинки в продольном магнитном поле изучены в [3]. В работе [4] получены уравнения и граничные условия нелинейных колебаний магнитоупругих идеально проводящих пластин в наклонном магнитном поле. Путем уточнения условий на лицевых поверхностях пластинки в [6] предложен вариант уравнений теории гибких пластин.

В настоящей работе, исходя из гипотезы магнитоупругости тонких тел, путем уточнения условий на лицевых поверхностях пластинки, получены уравнения и граничные условия нелинейных магнитоупругих колебаний электропроводящих пластин во внешнем магнитном поле.

1. Рассмотрим упругую изотропную однородную пластинку постоянной толщины $2h$, с модулем упругости E, коэффициентом Пуассона υ и с конечной электропроводностью σ. Пластинка находится в постоянном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_0(H_{01}, H_{02}, H_{03})$. Принимается, что для среды, окружающей пластинку, справедливы уравнения Максвелла для вакуума. Сторонние токи и сторонние заряды отсутствуют. Одновременно считается, что задача магнитостатики для невозмущенного состояния решена. Нелинейные колебания пластинки в магнитном поле будем описывать на основе геометрически нелинейной теории, считая прогибы пластинки сопоставимы с ее толщиной, но малыми по сравнению с основными

размерами. Пусть пластинка в невозмущенном состоянии занимает область $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b, -h \le z \le h$.

Трехмерная задача магнитоупругости пластин сводится к совместному интегрированию систем дифференциальных уравнений [2]. Причем в этих уравнениях наряду с линейными членами будем оставлять члены, обусловленные квадратичной нелинейностью.

Уравнения электродинамики для области, занимаемой телом (внутренняя область)

$$\mathrm{rot}\vec{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{b}}{\partial t},\quad \mathrm{rot}\vec{h} = \frac{4\pi}{c}\vec{j},\ \mathrm{div}\vec{d} = 4\pi\rho_e,\ \mathrm{div}\vec{b} = 0 \tag{1.1}$$

Функциональные связи для возмущенного электромагнитного поля

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times (\vec{B}_0 + \vec{b})\right) + \rho_e\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

$$\vec{d} = \varepsilon\vec{e},\quad \vec{b} = \mu\vec{h},\qquad \vec{B}_0 = \mu\vec{H}_0 \tag{1.2}$$

Уравнения электродинамики для среды, окружающей тело

$$\mathrm{rot}\vec{h}^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{e}^{(e)}}{\partial t},\qquad \mathrm{rot}\vec{e}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\vec{h}^{(e)} = 0,\qquad \mathrm{div}\vec{e}^{(e)} = 0 \tag{1.3}$$

Уравнения теории упругости, с учетом объемных сил электромагнитного происхождения (сил Лоренца), в которых сохранены члены с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},\qquad (i, j = 1,2,3) \tag{1.4}$$

$$x_1 = x,\qquad x_2 = y,\qquad x_3 = z$$

$$\rho\vec{K}(F_1, F_2, F_3) = \rho_e\left(\vec{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B}_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{b}\right) + \tag{1.5}$$

$$+\frac{\sigma}{c}\left(\vec{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B}_0\right) \times \vec{B}_0 + \frac{\sigma}{c}\left(\vec{e} \times \vec{b} + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B}_0\right) \times \vec{b} + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{b}\right) \times \vec{B}_0\right)$$

На лицевых поверхностях пластинки имеем следующие граничные условия:

$$\vec{\sigma}_i\vec{n} = 0 \tag{1.6}$$

$$\vec{n} \times \left[\vec{H}^{(e)} - \vec{H}\right] = -\frac{\mathrm{v}_n}{c}\left[\vec{E}^{(e)} - \varepsilon\vec{E}\right] \tag{1.7}$$

$$\vec{n}\left[\vec{H}^{(e)} - \mu\vec{H}\right] = 0 \tag{1.8}$$

$$\vec{n} \times \left[\vec{E}^{(e)} - \vec{E}\right] = \frac{\mathrm{v}_n}{c}\left[\vec{H}^{(e)} - \mu\vec{H}\right] \tag{1.9}$$

$$\vec{n}\left[\vec{E}^{(e)} - \varepsilon\vec{E}\right] = 4\pi\rho_e \tag{1.10}$$

Здесь и в последующем величины, относящиеся к внешней области пластинки, отмечаются индексом (e), а по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

В приведенных выше уравнениях $\vec{h}(h_1, h_2, h_3)$, $\vec{e}(e_1, e_2, e_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$ и $\vec{j}(j_1, j_2, j_3)$ - векторы индуцированного электромагнитного поля, ρ_e - объемная плотность электрического заряда, c — электродинамическая постоянная, μ и ε — магнитная и диэлектрическая проницаемости материала пластинки, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ - вектор перемещения точек пластинки, ρ - плотность деформированного тела, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, $\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$, $\vec{n}$ - нормаль к возмущенной поверхности пластинки,

$$\vec{\sigma}_i = \left(\sigma_{i1} + T_{i1} - T_{i1}^{(e)}\right)\hat{i} + \left(\sigma_{i2} + T_{i2} - T_{i2}^{(e)}\right)\hat{j} + \\ + \left(\sigma_{i3} + T_{i3} - T_{i3}^{(e)}\right)\hat{k} \tag{1.11}$$

T_{ij} и $T_{ij}^{(e)}$ – компоненты тензоров напряжений Максвелла соответственно в пластинке и в вакууме, причем

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(e_i d_k + H_{0i} B_{0k} + H_{0i} b_k + h_i B_{0k} + h_i b_k\right) - \\ - \frac{\delta_{ik}}{8\pi}\left(\vec{e}\vec{d} + \vec{H}_0 \vec{B}_0 + \vec{H}_0 \vec{b} + \vec{h}\vec{B}_0 + \vec{h}\vec{b}\right)$$

$$T_{ik}^{(e)} = \frac{1}{4\pi}\left(e_i^{(e)} e_k^{(e)} + H_{0i}^{(e)} H_{0k}^{(e)} + h_i^{(e)} h_k^{(e)} + H_{0i}^{(e)} h_k^{(e)} + H_{0k}^{(e)} h_i^{(e)}\right) - \\ - \frac{\delta_{ik}}{8\pi}\left(\vec{e}^{(e)}\vec{e}^{(e)} + \vec{H}_0^{(e)} \vec{H}_0^{(e)} + 2\vec{H}_0^{(e)} h^{(e)} + \vec{h}^{(e)}\vec{h}^{(e)}\right) \tag{1.12}$$

δ_{ik} – символ Кронекера.

Для приведения трехмерной нелинейной задачи магнитоупругости тонких пластин к двухмерной принимается гипотеза магнитоупругости тонких тел [2]. Уравнения возмущенных лицевых поверхностей пластинки примем в виде [6]

$$z = \pm h + w(x, y, \pm h, t) \tag{1.13}$$

Согласно (1.13), для нормалей к срединной поверхности пластинки получим следующие выражения:

$$\vec{n} = \left(\mp \frac{\partial w}{\partial x}\hat{i} \mp \frac{\partial w}{\partial y}\hat{j} \mp \vec{k}\right)\left(1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{1.14}$$

при $z = \pm h + w$. Здесь $w(x, y, t)$ - искомое перемещение срединной плоскости пластинки.

Из (1.6), согласно (1.11) и (1.14), получим следующие значения напряжений σ_{13}, σ_{23} и σ_{33} при $z = \pm h + w$ [6]:

$$\sigma_{13} = \mp \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial w}{\partial x} \mp 2hG \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\sigma_{23} = \mp 2hG \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial w}{\partial y} \mp \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\sigma_{33} = 0, \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.15}$$

Здесь оставлены только члены с квадратичной нелинейностью и пренебрежены нелинейности, где сомножители производные u и v ($u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ - искомые перемещения срединной плоскости пластинки), а также принято, что $T_{ij} - T_{ij}^{(e)} = 0$ (в виду конечной проводимости).

2. Поступая обычным образом [2], вместо напряжений введем в рассмотрения статически эквивалентные им внутренние силы и моменты. Осредняя уравнения (1.4), получим следующие двумерные уравнения движения пластинки, находящейся во внешнем постоянном магнитном поле:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}+\sigma_{13}\Big|_{-h+w}^{h+w}+\int_{-h+w}^{h+w}F_1dz=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h+w}^{h+w}u_1dz$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial y}+\sigma_{23}\Big|_{-h+w}^{h+w}+\int_{-h+w}^{h+w}F_2dz=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h+w}^{h+w}u_2dz$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}+\sigma_{33}\Big|_{-h+w}^{h+w}+\frac{\partial}{\partial x}(z\sigma_{13})\Big|_{-h+w}^{h+w}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(z\sigma_{23})\Big|_{-h+w}^{h+w}+\int_{-h+w}^{h+w}F_3dz+\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h+w}^{h+w}zF_1dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h+w}^{h+w}zF_2dz=$$

$$=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h+w}^{h+w}wdz+\rho\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}\int_{-h+w}^{h+w}zu_1dz+\rho\frac{\partial^3}{\partial y\partial t^2}\int_{-h+w}^{h+w}zu_2dz \qquad (2.1)$$

К этим уравнениям должны быть присоединены граничные и начальные условия.

Из уравнений (1.1) и (1.2), согласно гипотезе магнитоупругости тонких тел, получим

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial h_2}{\partial z}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\varphi+\frac{\mu}{c}\left((H_{03}+f)\left(\frac{\partial v}{\partial t}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)-\frac{\partial w}{\partial t}(H_{02}+h_2)\right)\right] \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\psi+\frac{\mu}{c}\left(\frac{\partial w}{\partial t}(H_{01}+h_1)-(H_{03}+f)\left(\frac{\partial u}{\partial t}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\right)\right] \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x}-\frac{\partial h_1}{\partial y}=\frac{4\pi\sigma}{c}e_3+\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\left[(H_{02}+h_2)\left(\frac{\partial u}{\partial t}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)-\right.$$

$$\left.-(H_{01}+h_1)\left(\frac{\partial v}{\partial t}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)\right] \qquad (2.4)$$

где $\varphi(x,y,t)$, $\psi(x,y,t)$ и $f(x,y,t)$ - искомые функции индуцированного электромагнитного поля.

Интегрируя неоднородные линейные дифференциальные уравнения (2.2) и (2.3) и удовлетворяя поверхностным условиям (1.7)–(1.10), определим возмущения тангенциальных компонент магнитного поля h_1 и h_2. В их выражения входит функция $(\mathrm{ch}\alpha h)^{-1}\exp(\alpha(z-w))$, где $\alpha h=\frac{4\pi\sigma h}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}$, которая для тонких пластинок намного меньше единицы [1]. Разлагая указанную функцию в ряд по степеням малого параметра αh, получим окончательные выражения для h_1 и h_2, где учтены члены не выше второй степени малости. Ввиду громоздкости их выражения здесь не приведены, в последующем приводятся эти значения для частного случая. Имея эти значения, из (2.4) получим выражение для возмущения нормальной компоненты вектора напряженности электрического поля e_3. Возмущения всех компонент электромагнитного поля представляются посредством шести искомых функций $u, \mathrm{v}, w, \varphi, \psi, f$ и значениями тангенциальных компонент магнитного поля h_1 и h_2 на поверхностях пластинки $z = \pm h + w$

3. В дальнейшем для простоты выкладок, не нарушая общности рассуждений, будем рассматривать одномерную задачу и примем, что $H_{01} = H_{02} = 0, \quad H_{03} = H \neq 0$ и $\mu = 1$. В этом случае граничные условия (1.6)-(1.10) после некоторых преобразований примут вид

$$\sigma_{13} = \sigma_{11}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{21}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{33} = 0 \tag{3.1}$$

$$\mp\frac{\partial w}{\partial x}\left(h_1^{(e)} - h_1\right) \pm \left(h_3^{(e)} - f\right) = 0 \tag{3.2}$$

$$\mp\frac{\partial w}{\partial x}\left(e_1^{(e)} - \varepsilon\varphi\right) \pm \left(e_3^{(e)} - \varepsilon e_3\right) = 4\pi\rho_e \tag{3.3}$$

$$\mp\left(h_1^{(e)} - h_1\right) \pm \frac{1-\varepsilon}{c}\psi\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{3.4}$$

$$\mp\left(e_2^{(e)} - \psi\right) \pm \frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\left(h_1^{(e)} - h_1\right) = 0 \tag{3.5}$$

$$\mp\left(h_2^{(e)} - h_2\right) \pm \frac{1-\varepsilon}{c}\varphi\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{3.6}$$

$$\mp\left(e_1^{(e)} - \varphi\right) \pm \frac{\partial w}{\partial x}\left(e_3^{(e)} - e_3\right) \mp \frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\left(h_2^{(e)} - h_2\right) = 0 \tag{3.7}$$

$$\mp\frac{\partial w}{\partial x}\left(h_2^{(e)} - h_2\right) \pm \frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\left(e_3^{(e)} - \varepsilon e_3\right) = 0 \tag{3.8}$$

$$\mp\frac{\partial w}{\partial x}\left(e_2^{(e)} - \psi\right) \mp \frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\left(h_3^{(e)} - f\right) = 0 \tag{3.9}$$

при $z = \pm h + w$. Интегрируя уравнения (2.2) и (2.3) с учетом поверхностных условий (3.4) и (3.6), для возмущений тангенциальных компонент магнитного поля h_1 и h_2 получим

$$h_1 = \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} + \frac{1-\varepsilon}{c}\psi\frac{\partial w}{\partial t} + z\left[\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{h_1^+ + h_1^-}{2} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi - \frac{H}{c}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] - w\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left(w\psi - \frac{H}{c}w\frac{\partial u}{\partial t}\right) +$$
$$+\frac{z^2 - h^2}{2}\left[\frac{4\pi\sigma H}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}f\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{16\pi^2\sigma^2}{c^3}\frac{\partial w}{\partial t}\left(\psi - \frac{H}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] \tag{3.10}$$

$$h_2 = \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} + \frac{1-\varepsilon}{c}\varphi\frac{\partial w}{\partial t} + z\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{h_2^+ + h_2^-}{2} - \left(\varphi + \frac{H}{c}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \frac{f}{c}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}\right)\right] + \frac{4\pi\sigma}{c}w\left(\varphi + \frac{H}{c}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}\right) -$$
$$-\frac{16\pi^2\sigma^2}{c^3}\frac{z^2 - h^2}{2}\frac{\partial w}{\partial t}\left(\varphi + \frac{H}{c}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}\right) \tag{3.11}$$

Здесь $h_i^{\pm} = h_i^{(e)}(\pm h + w) \quad (i = 1,2)$. Имея значения h_1 и h_2 (3.10) и (3.11) из (2.4), можно определить значение для e_3

$$e_3 = \frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(h_2\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right) - h_1\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right] \tag{3.12}$$

Таким образом, компоненты индуцированного электромагнитного поля выражаются посредством шести искомых функций $u, v, w, \varphi, \psi, f$ и значениями тангенциальных компонент магнитного поля $h_i^{\pm}$ на поверхностях пластинки.

При удовлетворении поверхностных условий (3.4) и (3.6) кроме (3.10) и (3.11), получаются также следующие уравнения:

$$\frac{h_1^+ - h_1^-}{2h} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi - \frac{H+f}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{h_1^+ + h_1^-}{2}\frac{\partial w}{\partial t} + \tag{3.13}$$

$$\underline{+\frac{4\pi\sigma}{c^2}H\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\left(w - \frac{4\pi\sigma h^2}{3c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right)}$$

$$\frac{h_2^+ - h_2^-}{2h} = -\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi + \frac{H+f}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{h_2^+ + h_2^-}{2}\frac{\partial w}{\partial t} \tag{3.14}$$

Из (1.1) с учетом гипотезы магнитоупругости тонких тел [2] для основных искомых функций будем иметь еще одно уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{3.15}$$

Отметим, что в работе [1], исходя из основных положений нелинейной теории магнитоупругости и гипотезы магнитоупругости тонких тел, выведены основные уравнения и соотношения нелинейных магнитоупругих колебаний проводящих тонких пластинок в магнитном поле. Сравнивая (3.10) -(3.14) с соответствующими выражениями, приведенными в [1], замечаем, что, в основном, эти выражения совпадают, кроме подчеркнутых нелинейных членов, которые обусловлены уточнением условий на лицевых поверхностях пластинки. В [1] имеются также нелинейные члены, обусловленные начальным и текущим состоянием пластинки.

Уравнения движения пластинки (2.1) в перемещениях при наличии внешнего поперечного магнитного поля будут представлены в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \underline{\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)} - \underline{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} +$$

$$+\frac{1-\nu^2}{E}\left[\underline{\rho_e\left(\varphi + \frac{H+f}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)} + \frac{\sigma H}{c}\left(\psi - \frac{H}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \underline{\frac{\sigma H^2 w}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}} + \frac{\sigma}{c}\psi f - \frac{2\sigma H f}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \right.$$

$$\left.\underline{-\frac{1}{4\pi}\frac{h_2^+ + h_2^-}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_2^+ + h_2^-}{2}\right)} + \frac{\sigma H}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{h_1^+ + h_1^-}{2} - \underline{\frac{4\pi\sigma h^2 H}{3c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}}\right) - \underline{\frac{\rho_e}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{h_2^+ + h_2^-}{2}}\right] =$$

$$= \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \underline{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right)}\right] \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{2(1+\nu)}{E}\left[\rho_e\left(\psi-\frac{H}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\sigma H}{c}\left(\varphi+\frac{H}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{\rho_e H w}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\frac{\rho_e}{c}f\frac{\partial \psi}{\partial t}-\right.$$

$$-\frac{\sigma}{c}\varphi f-\frac{2\sigma H}{c^2}f\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{4\pi}\frac{h_1^{+}+h_1^{-}}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_2^{+}+h_2^{-}}{2}\right)+\frac{\sigma H}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{h_2^{+}+h_2^{-}}{2}\right)+$$

$$\left.+\frac{\rho_e}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{h_1^{+}+h_1^{-}}{2}-\frac{4\pi\sigma h^2 H}{3c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\right]=\frac{2\rho(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (3.17)$$

$$\frac{h^2}{3}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(w\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(uw)-\right.$$

$$\left.-\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]-\frac{1-\nu^2}{E}\left\{\rho_e\left[\frac{c}{4\pi\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_2^{+}+h_2^{-}}{2}\right)-\frac{1-\varepsilon}{4\pi\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\right.\right.$$

$$+\frac{4\pi\sigma h^2}{3c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{H}{c}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}\right)-\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{h_2^{+}+h_2^{-}}{2}+\frac{1}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{h_1^{+}+h_1^{-}}{2}-$$

$$\left.-\frac{4\pi\sigma h^2 H}{3c^3}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right]+\frac{h_2^{+}+h_2^{-}}{2}\left(\frac{\rho_e}{c}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\sigma}{c}\varphi+\frac{\sigma H}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t}\right)+$$

$$+\left(\frac{h_1^{+}+h_1^{-}}{2}-\frac{4\pi\sigma h^2 H}{3c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\cdot\left(\frac{\sigma H}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\sigma}{c}\psi-\frac{\rho_e}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)-$$

$$\left.-\frac{1}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\left[-\rho_e\frac{4\pi\sigma h^2}{3c}\left(\varphi+\frac{H}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{\sigma H}{c}\left(\frac{h^2}{3}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma h^2}{3c}\left(\psi-\frac{H}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\right]\right\}-$$

$$-\frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\sigma h^2 H^2}{3c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\frac{2\sigma h^2 H}{3c^2}f\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\rho_e\left(w\varphi+\frac{H}{c}w\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma H}{c}\left(w\psi-\frac{H}{c}w\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\rho_e\frac{4\pi\sigma h^2}{3c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\left(\varphi+\frac{H}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right\}=0 \qquad (3.18)$$

Таким образом, система трехмерных уравнений внутренней задачи нелинейной теории магнитоупругости тонких пластин на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел путем уточнения условий на лицевых поверхностях пластинки свелась к интегрированию шести двумерных (одномерных) дифференциальных уравнений (3.13) – (3.18) относительно основных неизвестных функций $u, v, w, \varphi, \psi, f$. Как было уже сказано выше, в этих уравнениях наряду с нелинейными членами, обусловленные начальным и текущим состоянием пластинки [1], присутствуют также нелинейные члены, которые получены путем уточнения условий на лицевых поверхностях пластинки. Отметим, что если в этих уравнениях не учитывать влияние внешнего магнитного поля, то полученные уточненные нелинейные уравнения совпадают с уравнениями, приведенными в [6].

В нелинейные уравнения магнитоупругости тонких пластин (3.13) - (3.18) входят неизвестные граничные значения возмущений тангенциальных компонент магнитного поля на поверхностях пластинки $z=\pm h+w$. На основе некоторых допущений о характере изменения компонент электромагнитного поля в пограничной к поверхностям пластинки области внешней среды в [2] из уравнений электродинамики окружающего тела (1.3) получаются недостающие следующие четыре дифференциальных уравнения

$$\cup h_1^+ = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right), \quad \cup h_1^- = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$$

$$\cup h_2^+ = -\frac{1}{\lambda c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \cup h_2^- = \frac{1}{\lambda c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \cup \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{3.19}$$

где λ - некоторый характерный для данной задачи размер. Следовательно, пространственная задача магнитоупругих нелинейных колебаний тонких пластин свелась к решению системы десяти двумерных (одномерных) нелинейных дифференциальных уравнений (3.13) - (3.19), при обычных условиях закрепления краев пластинки и условия затухания возмущений на бесконечности.

4. Рассмотрим задачу колебания шарнирно-опертой пластинки, один из размеров которой значительно превышает второй размер, во внешнем поперечном постоянном магнитном поле. Исследуем эту задачу на основе уравнений (3.13) - (3.19). Граничные условия при $x = 0$ и $x = a$ представим в виде [6]

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad T_1 = 0 \tag{4.1}$$

Для компонент индуцированного электромагнитного поля граничные условия будут [2]

$$\psi = \frac{H}{c}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad f = -H\frac{\partial u}{\partial x}, \quad h_1^+ + h_1^- = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1^+ - h_1^-\right) = 0 \qquad \text{при } x = 0, a \tag{4.2}$$

Представим решение системы (3.13) - (3.19), удовлетворяющее граничным условиям (4.1) и (4.2), в виде

$$u = u(t)\cos\frac{\pi x}{a}, \quad w = w(t)\sin\frac{\pi x}{a}, \quad \psi = \psi(t)\cos\frac{\pi x}{a}$$

$$f = f(t)\sin\frac{\pi x}{a}, \quad h_1^+ + h_1^- = q_+(t)\sin\frac{\pi x}{a}, \quad h_1^+ - h_1^- = q_-(t)\cos\frac{\pi x}{a} \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в систему (3.13) - (3.19) и применяя метод Бубнова-Галеркина, получается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем виде задача интегрирования полученной нелинейной системы почти неразрешима. Целесообразно рассмотреть частный случай. Примем, что $\rho_e = 0$ и не будем учитывать инерционные члены, обусловленные тангенциальным перемещением. Для электродинамической части и для тангенциального перемещения примем квазистатическое приближение и в уравнении (3.16) отбросим нелинейные члены. Исключая из уравнений (3.13) - (3.16) u, ψ, f и q_- и принимая $\lambda = \dfrac{a}{\pi}$ из (3.17), для $w(t)$ получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega_0^2 w = -2\alpha\frac{dw}{dt} - \beta^2\left(\frac{dw}{dt}\right)^3 + \gamma^2 w\left(\frac{dw}{dt}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{\sigma h^2 \pi^2 H^2}{6\rho a^2 c^2}, \quad \beta^2 = \frac{256}{27}\frac{\sigma^3 h^5 \pi^3 H^2}{\rho a^3 c^6\left(1 + h\pi a^{-1}\right)}$$

$$\gamma^2 = \frac{64}{9}\frac{\sigma^2 h^3 \pi^2 H^2}{\rho a^3 c^4\left(1 + h\pi a^{-1}\right)}, \quad \omega_0^2 = \frac{Eh^2\pi^4}{3\rho a^4\left(1 - \nu^2\right)} \tag{4.4}$$

Применим к уравнению (4.4) метод гармонического баланса [7]. Выберем решение уравнения в форме

$$w(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t, \; A_1, A_2 = \mathrm{const} \tag{4.5}$$

Подставляя (4.5) в уравнение (4.4) и разлагая

$$F(t) = w(t) + \frac{2\alpha}{\omega_0^2}\frac{dw}{dt} + \frac{\beta^2}{\omega_0^2}\left(\frac{dw}{dt}\right)^3 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2} w\left(\frac{dw}{dt}\right)^2$$

в ряд по косинусам (при этом ограничимся в разложении первым членом), придем к следующему уравнению:

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 + \frac{1}{4}\gamma^2\left(A_1^2 + A_2^2\right)\right)^{-1} \tag{4.6}$$

Уравнение (4.6) выражает зависимость частоты нелинейных магнитоупругих колебаний ω и амплитуды. Учет нелинейности приводит к уменьшению частоты колебаний. В зависимости от напряженности внешнего магнитного поля, характер нелинейных магнитоупругих колебаний пластинки может быть мягким (мягкая колебательная система). При отсутствии внешнего магнитного поля $\gamma = 0$ $(H = 0)$ нелинейность исчезает и пластинка совершает линейные колебания с частотой ω_0.

Теперь построим решение нелинейного уравнения (4.4) методом усреднения [8]. Для того, чтобы применить метод усреднения к уравнению (4.4) воспользуемся идеей вариации произвольных постоянных и введем преобразование

$$w(t) = A(t)\cos\theta, \qquad \frac{dw}{dt} = -A(t)\omega_0 \sin\theta, \qquad \theta = \omega_0 t + \varphi(t) \tag{4.7}$$

Подставляя выражение (4.7) в исходное уравнение (4.4), после некоторых преобразований [8], получим

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha A - \frac{3}{8}\omega_0^2\beta^2 A^3 + \left(\alpha A + \frac{1}{2}\beta^2\omega_0^2 A^3\right)\cos 2\theta - \frac{1}{8}\beta^2\omega_0^2 A^3 \cos 4\theta -$$
$$- \frac{1}{4}\gamma^2\omega_0 A^3 \sin 2\theta + \frac{1}{8}\gamma^2\omega_0 A^3 \sin 4\theta \tag{4.8}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{8}\gamma^2\omega_0 A^2 + \frac{1}{8}\gamma^2\omega_0 A^2 \cos 4\theta + \frac{1}{8}\beta^2\omega_0^2 A^2 \sin 4\theta -$$
$$-\left(\alpha + \frac{1}{4}\beta^2\omega_0^2 A^2\right) \times \sin 2\theta \tag{4.9}$$

В первом приближении, сохраняя только медленно меняющиеся члены, т.е члены, не содержащие тригонометрических функций, уравнения (4.8) и (4.9) заменим следующими усредненными уравнениями

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha A - \frac{3}{8}\omega_0^2\beta^2 A^3 \tag{4.10}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{8}\gamma^2\omega_0 A^2 \tag{4.11}$$

Интегрируя уравнения (4.10) и (4.11) с начальными условиями при $t = 0$ $A = A_0 = \mathrm{const}$ $\varphi = 0$, согласно (4.7) и (4.3), для прогиба нелинейных магнитоупругих колебаний пластинки получим

$$w(x,t) = A_0 e^{-\alpha t}\left[1 + \chi A_0^2\left(1 - e^{-2\alpha t}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \cos\left\{\omega_0\left(t - \frac{c^2}{8\pi\sigma h^2\omega_0^2}\ln\left[1 + \chi A_0^2\left(1 - e^{-2\alpha t}\right)\right]\right)\right\}\sin\frac{\pi x}{a} \tag{4.12}$$

где

$$\chi = \frac{64\sigma^2 h^3 \pi\omega_0^2}{3ac^4\left(1 + h\pi a^{-1}\right)}$$

Имея значения прогиба (4.12), для электродинамических величин в квазистатическом приближении, согласно (4.3), из системы уравнений (3.13) - (3.19) будем иметь

$$\psi = 0, \qquad h_1^+ - h_1^- = -2f(t)\cos\frac{\pi x}{a}, \qquad f(x,t) = f(t)\sin\frac{\pi x}{a}$$

$$f(t) = \frac{16\pi\sigma hH}{3ac^2\left(1 + h\pi a^{-1}\right)}\left[\frac{4\pi\sigma h^2}{3c^2}\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - w\frac{dw}{dt}\right] \tag{4.13}$$

Настоящее исследование выполнено по гранту INTAS-94-1210.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Основные уравнения и соотношения нелинейных магнитоупругих колебаний тонких электропроводящих пластинок. -Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1985, т.38, N2, с.17-29.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. -М.: Наука, 1977.
3. Багдасарян Г.Е., Хачатрян Г.М. Нелинейные колебания проводящей пластинки в продольном магнитном поле. -Изв. НАН РА, Механика, 1991, т.44, N3, с.34-41.
4. Багдасарян Г.Е. Нелинейные колебания идеально проводящей пластинки в наклонном магнитном поле. -Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, N3, с.5-14.
5. Мольченко Л.В. Математические основы нелинейной магнитоупругости теории оболочек.-Киев, 1988, 48с. (Препринт АН УССР. -Ин-т математики; 88, 47).
6. Белубекян М.В., Саркисян С.В. Об одном уточнении уравнений нелинейных колебаний пластин. - Уч. зап. ЕГУ, 1992, N1.
7. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. -М.: Наука, 1972.
8. Найфэ А. Введение в методы возмущений. -М.: Мир, 1984.

Ереванский Госуниверситет

Поступила в редакцию
16.01.1997