ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №4, 1998 Механика

УДК 539.3:534.1

ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛ Я СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Мелкумян С.А.

Ս.Ա.Մելքումյան

Կիսաանվերջ ճեղքերով թուլացված բաղադրյալ հարթության էլեկտրաառաձգականության խնդիրը

Աշխատանքում դիտարկվում է կիսաանվերջ ճեղքերով թուլացված բաղադրյալ հարթության էլեկտրաառաձգականության համաչափ խնդիրը: Հարթությունը բաղկացած է երկու կիսահարթությունից, որոնցից մեկը նախնական բևեռացված պիեզոկերամիկա է, իսկ մյուսը՝ օրթոտրոպ հաղորդիչ: Ընդունված է, որ պիեզոկերամիկայի նախնական բևեռացման ուղղությանը ուղղահայաց է կիսահարթությունների միջև կոնտակտի գծին, որի ուղղությամբ հարթությունը թուլացված է երկու կիսաանվերջ ճեղքերով: Ենթադրվում է, որ ճեղքերի ափերին համաչափ կերպով ազդում են բացարձակ ինտեգրելի արտաքին նորմալ լարումներ: Դիտարկվում է հարթ դեֆորմացիոն վիճակ:

Օգտվելով զույգ ինտեգրալ հավասարումների մեթոդից, խնդիրը լուծված է ճշգրիտ, փակ տեսքով:

S.A. Melkumyan

A Problem of Electrical Elasticity for a Composite Plane with a Semi-Infinite Cracks

Рассматривается симметричная плоская задача электроупругости для составной плоскости с полубесконечными разрезами. Плоскость состоит из двух полуплоскостей, одна из которых представляет предварительно поляризованную упругую пьезокерамику, а другая-упругий ортотропный проводник. Принимается, что направление предварительной поляризации пьезокерамики перпендикулярно к линии сцепления полуплоскостей. Предполагается, что на линии сцепления полуплоскостей плоскость имеет два полубесконечных разреза, на берегах которых симметрично действует обсолютно интегрируемые нормальные нагрузки. Рассматривается плоское деформированное состояние.

Используя метод парных интегральных уравнений, задача решена точно в замкнутом виде.

Рассматривается симметричная плоская задача электроупругости для составной плоскости с полубесконечными разрезами $(z=0, |x|>a)$. Плоскость состоит из двух полуплоскостей, одна из которых представляет предварительно поляризованную упругую пьезокерамику $(z>0, \quad |x|<\infty)$, а другая — упругий ортотропный проводник $(z<0, |x|<\infty)$, которые жестко сцепляются друг с другом на конечном участке $(|x| \le a)$. Принимается, что направление предварительной поляризации пьезокерамики перпендикулярно к линии контакта полуплоскостей $(z=0)$. Главные направления анизотропии ортотропного материала совпадают с направлениями координатных осей

Фиг. 1

Предполагается, что на берегах

разрезов $(z=0, |x|>a)$ действуют симметрично распределенные абсолютно интегрируемые нормальные нагрузки (фиг.1).

Рассматривается плоское деформированное состояние

$$\left(U_y \equiv 0,\ U_x = U_x(x,z), U_z = U_z(x,z)\right)$$

Используя метод парных интегральных уравнений, задача решена точно в замкнутом виде.

Для решения задачи за основные неизвестные принимаем упругие перемещения $(U_x(x,z),\ U_z(x,z))$ и электростатический потенциал $(\Psi(x,z))$. Условия существования плоской задачи пьезоэлектрической среды рассмотрены в работах [1,2], а для ортотропного материала – в [3].

Система уравнений равновесия при плоской деформации пьезокерамической среды совпадает с системой уравнений (3.15)-(3.17) в книге [2].

Все величины, которые принадлежат к пьезокерамической полуплоскости $(z>0, |x|<\infty)$, будем писать с индексом один, а для упругого ортотропного проводника $(z<0, |x|<\infty)$ – с индексом два.

Имея в виду симметричность задачи относительно оси oz, решение ее ищем в виде интегралов Фурье:

$$c_{11}^E u_x^{(1)}(x,z) = \int_0^\infty \alpha \overline{U}^{(1)}(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha,\quad c_{44}^E u_z^{(1)}(x,z) = \int_0^\infty \alpha \overline{W}^{(1)}(\alpha,z)\cos\alpha x d\alpha$$

$$e_{15}\Psi(x,z) = -\int_0^\infty \alpha\overline{\Psi}(\alpha,z)\cos\alpha x d\alpha,\quad (|x|<\infty,\quad 0<z<\infty) \tag{1}$$

$$A_{44}u_x^{(2)}(x,z) = \int_0^\infty \alpha\overline{U}^{(2)}(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha,\ A_{11}u_z^{(2)}(x,z) = \int_0^\infty \alpha\overline{W}^{(2)}(\alpha,z)\cos\alpha x d\alpha \tag{2}$$

$$(|x|<\infty, -\infty<z<0)$$

Затухающие в бесконечности неизвестные плотности интегралов Фурье (1),(2) представляются в виде [4]:

$$\overline{U}^{(1)}(\alpha,z) = \sum_{k=1}^{3} t_k\Delta_1(t_k)A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z},\ \overline{W}^{(1)}(\alpha,z) = \sum_{k=1}^{3}\Delta_2(t_k)A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z}$$

$$\overline{\Psi}(\alpha,z) = \sum_{k=1}^{3}\Delta_3(t_k)A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z},\quad (z>0) \tag{3}$$

$$\overline{U}^{(2)}(\alpha,z) = \sum_{m=1}^{2}\Delta_5(\xi_m)C_m(\alpha)e^{\alpha z\xi_m^{-1}}, \overline{W}^{(2)}(\alpha,z) = \sum_{m=1}^{2}\Delta_4(\xi_m)C_m(\alpha)e^{\alpha z\xi_m^{-1}}, (z<0)$$

Определение $\Delta_1(t_k)$, $\Delta_2(t_k)$, $\Delta_3(t_k)$ и t_k дано в работе [4], а $\Delta_4(\xi_m)$, $\Delta_5(\xi_m)$ и ξ_m – в [5].

Пользуясь (1), (2), (3) и уравнением электроупругости в декартовых координатах [6], а также основными соотношениями теории упругости для ортотропного материала [3], можно все компоненты сопряженного электроупругого и упругого полей выразить соответственно через неизвестные функции интегрирования $A_k(\alpha)$ и $C_m(\alpha)$:

$$\sigma_x^{(1)}(x,z) = \int_0^\infty \alpha^2\overline{\sigma}_x^{(1)}(\alpha,z)\cos\alpha x d\alpha,\ \sigma_z^{(1)}(x,z) = \int_0^\infty \alpha^2\overline{\sigma}_z^{(1)}(\alpha,z)\cos\alpha x d\alpha$$

$$\tau_{zx}^{(1)}(x,z)=-\int_0^\infty \alpha^2\bar{\tau}_{zx}^{(1)}(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha,\quad c_{11}^E D_x(x,z)=-e_{15}\int_0^\infty \alpha^2\overline{D}_x(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha$$

$$c_{11}^E D_z(x,z)=e_{15}\int_0^\infty \alpha^2\overline{D}_z(\alpha,z)\cos\alpha x d\alpha,\quad e_{15}E_x(x,z)=-\int_0^\infty \alpha^2\overline{E}_x(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha$$

$$e_{15}E_z(x,z)=-\int_0^\infty \alpha^2\overline{E}_z(\alpha,z)\cos\alpha x d\alpha,\quad (|x|<\infty,\ 0<z<\infty) \tag{4}$$

и $\sigma_x^{(2)}(x,z)=\int_0^\infty \alpha^2\bar{\sigma}_x^{(2)}(\alpha,z)\cos\alpha x d\alpha,\ \sigma_z^{(2)}(x,z)=\int_0^\infty \alpha^2\bar{\sigma}_z^{(2)}(\alpha,z)\cos\alpha x d\alpha$

$$\tau_{zx}^{(2)}(x,z)=\int_0^\infty \alpha^2\bar{\tau}_{zx}^{(2)}(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha,\quad (|x|<\infty,\ -\infty<z<0) \tag{5}$$

где $\bar{\sigma}_x^{(1)}(\alpha,z)=\sum_{k=1}^{3} t_k\left[\Delta_1(t_k)-\frac{c_{13}^E}{c_{44}^E}\Delta_2(t_k)+\frac{e_{31}}{e_{15}}\Delta_3(t_k)\right]A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z}$

$$\bar{\sigma}_z^{(1)}(\alpha,z)=\sum_{k=1}^{3} t_k\left[\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E}\Delta_1(t_k)-\frac{c_{33}^E}{c_{44}^E}\Delta_2(t_k)+\frac{e_{33}}{e_{15}}\Delta_3(t_k)\right]A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z}$$

$$\bar{\tau}_{zx}^{(1)}(\alpha,z)=\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{c_{44}^E}{c_{11}^E}\Delta_1(t_k)t_k^2+\Delta_2(t_k)-\Delta_3(t_k)\right]A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z}$$

$$\overline{D}_x(\alpha,z)=\sum_{k=1}^{3}\left[\Delta_1(t_k)t_k^2+\frac{c_{11}^E}{c_{44}^E}\Delta_2(t_k)+\frac{c_{11}^E\varepsilon_{33}^S}{e_{15}e_{15}}\Delta_3(t_k)\right]A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z} \tag{6}$$

$$\overline{D}_z(\alpha,z)=\sum_{k=1}^{3} t_k\left[\frac{e_{31}}{e_{15}}\Delta_1(t_k)-\frac{c_{11}^E e_{33}}{c_{44}^E e_{15}}\Delta_2(t_k)-\frac{c_{11}^E\varepsilon_{33}^S}{e_{15}e_{15}}\Delta_3(t_k)\right]A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z}$$

$$\overline{E}_x(\alpha,z)=\sum_{k=1}^{3}\Delta_3(t_k)A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z},\quad \overline{E}_z(\alpha,z)=\sum_{k=1}^{3}t_k\Delta_3(t_k)A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z},\ (z>0)$$

и $\bar{\sigma}_x^{(2)}(\alpha,z)=\sum_{m=1}^{2}\left[\frac{A_{13}}{A_{11}}\frac{\Delta_4(\xi_m)}{\xi_m}+\frac{A_{33}}{A_{44}}\Delta_5(\xi_m)\right]C_m(\alpha)e^{\alpha z\xi_m^{-1}}$

$$\bar{\sigma}_z^{(2)}(\alpha,z)=\sum_{m=1}^{2}\left[\frac{\Delta_4(\xi_m)}{\xi_m}+\frac{A_{13}}{A_{44}}\Delta_5(\xi_m)\right]C_m(\alpha)e^{\alpha z\xi_m^{-1}} \tag{7}$$

$$\bar{\tau}_{zx}^{(2)}(\alpha,z)=\sum_{m=1}^{2}\left[\frac{\Delta_5(\xi_m)}{\xi_m}-\frac{A_{44}}{A_{11}}\Delta_4(\xi_m)\right]C_m(\alpha)e^{\alpha z\xi_m^{-1}},\ (z<0)$$

Здесь $\sigma_x,\sigma_z,\tau_{zx}$ – компоненты тензора механических напряжений; D_x, D_z - компоненты вектора электрической индукции; E_x, E_z - компоненты вектора напряженности электрического поля; $c_{11}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$ - модули упругости пьезокерамики при нулевом электрическом поле; e_{31}, e_{15}, e_{33} - пьезомодели; ε_{11}^S, ε_{33}^S - диэлектрические проницаемости при нулевой деформации; $A_{11}, A_{13}, A_{33}, A_{44}$ - модули упругости ортотропного проводника; $A_k(\alpha)$ и $C_m(\alpha)$ - произвольные функции интегрирования, которые нужно определить из граничных условий [6]:

$$\Psi(x,0)=0\quad (0<x<\infty) \tag{8}$$

$$\tau_{zx}^{(1)}(x,0)=\tau_{zx}^{(2)}(x,0)=0,\quad \sigma_z^{(1)}(x,0)=\sigma_z^{(2)}(x,0)=f(x)\quad (a<x<\infty) \tag{9}$$

и условия полного контакта полуплоскостей:

$$\tau_{zx}^{(1)}(x,0)=\tau_{zx}^{(2)}(x,0),\quad \sigma_z^{(1)}(x,0)=\sigma_z^{(2)}(x,0),\quad (0<x<a) \tag{10}$$

$$u_x^{(1)}(x,0)=u_x^{(2)}(x,0),\quad u_z^{(1)}(x,0)=u_z^{(2)}(x,0),\quad (0\le x\le a) \tag{11}$$

Из (9) и (10) вытекают условия

$$\tau_{zx}^{(1)}(x,0)=\tau_{zx}^{(2)}(x,0),\quad \sigma_z^{(1)}(x,0)=\sigma_z^{(2)}(x,0),\quad (0<x<\infty) \tag{12}$$

Условия симметрии задачи удовлетворяются тождественно, а из условия (8) имеем:

$$A_k(\alpha)=a_kA_1(\alpha)+b_kA_2(\alpha) \tag{13}$$

где

$$a_1=1,\ a_2=0,\ a_3\cdot\Delta_3(t_3)=-\Delta_3(t_1),\ b_1=0,\ b_2=1,\ b_3\cdot\Delta_3(t_3)=-\Delta_3(t_2) \tag{14}$$

Имея в виду (13), удовлетворяя условиям (12), получаем:

$$\begin{aligned}&d_{11}A_1(\alpha)+d_{12}A_2(\alpha)+b_{11}C_1(\alpha)+b_{12}C_2(\alpha)=0\\&d_{21}A_1(\alpha)+d_{22}A_2(\alpha)-b_{21}C_1(\alpha)-b_{22}C_2(\alpha)=0\end{aligned} \tag{15}$$

Имея в виду (13), удовлетворяя условиям (9) и (11), получаем следующую систему из двух парных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\alpha\left[d_{31}A_1(\alpha)+d_{32}A_2(\alpha)-\frac{\Delta_4(\xi_1)}{A_{11}}C_1(\alpha)-\frac{\Delta_4(\xi_2)}{A_{11}}C_2(\alpha)\right]\cos\alpha x d\alpha=0\\&\int_0^\infty\alpha\left[d_{41}A_1(\alpha)+d_{42}A_2(\alpha)-\frac{\Delta_5(\xi_1)}{A_{44}}C_1(\alpha)-\frac{\Delta_5(\xi_2)}{A_{44}}C_2(\alpha)\right]\sin\alpha x d\alpha=0\end{aligned}\quad (0\le x\le a) \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\alpha^2[d_{11}A_1(\alpha)+d_{12}A_2(\alpha)]\sin\alpha x d\alpha=0\\&\int_0^\infty\alpha^2[d_{21}A_1(\alpha)+d_{22}A_2(\alpha)]\cos\alpha x d\alpha=f(x),\quad (a<x<\infty)\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\begin{Bmatrix}d_{11}\\d_{12}\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^3a_{1k}\begin{Bmatrix}a_k\\b_k\end{Bmatrix};\qquad \begin{Bmatrix}d_{21}\\d_{22}\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^3a_{2k}\begin{Bmatrix}a_k\\b_k\end{Bmatrix}\\&\begin{Bmatrix}d_{31}\\d_{32}\end{Bmatrix}=\frac{1}{c_{44}^E}\sum_{k=1}^3\Delta_2t_k\begin{Bmatrix}a_k\\b_k\end{Bmatrix};\qquad \begin{Bmatrix}d_{41}\\d_{42}\end{Bmatrix}=\frac{1}{c_{11}^E}\sum_{k=1}^3t_k\Delta_1(t_k)\begin{Bmatrix}a_k\\b_k\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{18}$$

$$a_{1k}=\frac{c_{44}^E}{c_{11}^E}\Delta_1(t_k)t_k^2+\Delta_2(t_k)-\Delta_3(t_k)$$

$$a_{2k}=t_k\left[\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E}\Delta_1(t_k)-\frac{c_{33}^E}{c_{44}^E}\Delta_2(t_k)+\frac{e_{33}}{e_{15}}\Delta_3(t_k)\right]$$

$$b_{1m}=-\frac{A_{44}}{A_{11}}\Delta_4(\xi_m)-\frac{\Delta_5(\xi_m)}{\xi_m};\quad b_{2m}=\frac{\Delta_4(\xi_m)}{\xi_m}+\frac{A_{13}}{A_{44}}\Delta_5(\xi_m),\ (k=1,2,3;\ m=1,2)$$

Из (15) имеем:

$$C_1(\alpha)=d_{51}A_1(\alpha)+d_{52}A_2(\alpha),\ C_2(\alpha)=d_{61}A_1(\alpha)+d_{62}A_2(\alpha) \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}&\delta_0d_{51}=d_{11}b_{22}+d_{21}b_{12},\quad \delta_0d_{52}=d_{12}b_{22}+d_{22}b_{12},\quad \delta_0=b_{12}b_{21}+b_{11}b_{22},\\&-\delta_0d_{61}=b_{11}d_{21}+b_{21}d_{11},\quad -\delta_0d_{62}=b_{11}d_{22}+b_{21}d_{12}\end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя (19) в (16), получаем:

$$\int_0^\infty \alpha\left[m_{11}A_1(\alpha)+m_{12}A_2(\alpha)\right]\sin\alpha x d\alpha = 0$$
$$\int_0^\infty \alpha\left[m_{21}A_1(\alpha)+m_{22}A_2(\alpha)\right]\cos\alpha x d\alpha = 0 \quad (0 < x \le a) \tag{21}$$

здесь

$$m_{11} = d_{41} - \frac{\Delta_5(\xi_1)}{A_{44}}d_{51} - \frac{\Delta_5(\xi_2)}{A_{44}}d_{61}, \quad m_{12} = d_{42} - \frac{\Delta_5(\xi_1)}{A_{44}}d_{52} - \frac{\Delta_5(\xi_2)}{A_{44}}d_{62}$$
$$m_{21} = d_{31} - \frac{\Delta_4(\xi_1)}{A_{11}}d_{51} - \frac{\Delta_4(\xi_2)}{A_{11}}d_{62}, \quad m_{22} = d_{32} - \frac{\Delta_4(\xi_1)}{A_{11}}d_{52} - \frac{\Delta_4(\xi_2)}{A_{11}}d_{62} \tag{22}$$

Решение задачи сведено к решению системы парных интегральных уравнений (21), (17). Одним из методов решения систем парных интегральных уравнений (21), (17) является введение неизвестных касательных $(\tau_{xz}(x,0)=S(x))$, нормальных $(\sigma_z(x,0)=H(x))$ напряжений в зоне полного контакта $(0 < x < a)$ квадрантов. После этого (17) допускает обратное преобразование Фурье:

$$d_{11}A_1(\alpha)+d_{12}A_2(\alpha) = \frac{2}{\pi\alpha^2}\int_0^a S(x)\sin\alpha x dx$$
$$d_{21}A_1(\alpha)+d_{22}A_2(\alpha) = \frac{2}{\pi\alpha^2}\int_0^a H(x)\cos\alpha x dx + \frac{2}{\pi\alpha^2}\int_a^\infty f(x)\cos\alpha x dx \tag{23}$$

Подставим теперь $A_1(\alpha)$ и $A_2(\alpha)$ из (23) в (21), далее продифференцируем по x и воспользуемся известными соотношениями для дельта-функции Дирака [2]:

$$\int_0^\infty \cos\alpha t\cos\alpha x d\alpha = \frac{\pi\delta(t-x)}{2}, \quad \int_0^\infty \sin\alpha t\sin\alpha x d\alpha = \frac{\pi\delta(t-x)}{2}$$
$$\int_0^\infty \sin\alpha t\cos\alpha x d\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}\right) \tag{24}$$

получаем следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{g_{11}}{\pi}\int_0^a S(t)\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}\right)dt + g_{12}H(x) = 0$$
$$\frac{g_{22}}{\pi}\int_0^a H(t)\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}\right)dt + g_{21}S(x) = f_1(x) \quad (0 < x < a) \tag{25}$$

где

$$g_{11} = m_{11}P_{11}+m_{12}P_{21}, \quad -g_{12} = m_{11}P_{12}+m_{12}P_{22}$$
$$g_{21} = m_{21}P_{11}+m_{22}P_{21}, \quad -g_{22} = m_{21}P_{12}+m_{22}P_{22}$$
$$\delta_1\begin{Bmatrix}P_{11}\\P_{12}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}d_{22}\\d_{12}\end{Bmatrix}, \quad \delta_1\begin{Bmatrix}P_{21}\\P_{22}\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}d_{21}\\d_{11}\end{Bmatrix}, \quad \delta_1 = d_{11}d_{22}-d_{21}d_{12} \tag{26}$$
$$f_1(x) = -\frac{g_{22}}{\pi}\int_a^\infty\left(\frac{1}{x-t}+\frac{1}{x+t}\right)f(t)dt$$

Продолжая $S(x)$ нечетно, а $H(x)$ четно на интервале $-a < x < 0$, систему (25) можно привести к виду:

$$\chi(x)+\frac{g}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\chi(x)}{t-x}dt=f^{*}(x) \qquad (27)$$

где

$$\chi(x)=H(x)+iS_1(x),\quad S_1(x)=g_1S(x),\quad f^{*}(x)=i\varphi(x)$$

$$\varphi(x)=\frac{g_1f_1(x)}{g_{21}},\quad g_1=\sqrt{\frac{g_{11}g_{21}}{g_{12}g_{22}}},\quad g=\frac{g_{22}g_1}{g_{21}},\quad (i)^2=-1 \qquad (28)$$

Решая (27) в замкнутом виде [7,8], разделяя вещественные и мнимые части, получаем:

$$\sigma_z(x,0)=H(x)=\frac{c}{\sqrt{a^2-x^2}}\cos\gamma\ln\frac{a+x}{a-x}-$$

$$-\frac{g}{\pi(1-g^2)\sqrt{a^2-x^2}}\sin\gamma\ln\frac{a+x}{a-x}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-x}\sin\gamma\ln\frac{a+t}{a-t}\varphi(t)dt-$$

$$-\frac{g}{\pi(1-g^2)\sqrt{a^2-x^2}}\cos\gamma\ln\frac{a+x}{a-x}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-x}\cos\gamma\ln\frac{a+t}{a-t}\varphi(t)dt \qquad (29)$$

$$\tau_{zx}(x,0)=S(x)=\frac{\varphi(x)}{g_1(1-g^2)}-\frac{c}{\sqrt{a^2-x^2}}\sin\gamma\ln\frac{a+x}{a-x}+$$

$$+\frac{g}{\pi(1-g^2)g_1\sqrt{a^2-x^2}}\sin\gamma\ln\frac{a+x}{a-x}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-x}\cos\gamma\ln\frac{a+t}{a-t}\varphi(t)dt-$$

$$-\frac{g}{\pi(1-g^2)g_1\sqrt{a^2-x^2}}\cos\gamma\ln\frac{a+x}{a-x}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-x}\sin\gamma\ln\frac{a+t}{a-t}\varphi(t)dt \quad (0<x<a)$$

где

$$\gamma=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{g+1}{g-1} \qquad (30)$$

Входящая в (29) постоянная „C" определяется из условия

$$\int_{-a}^{a}\sigma_z(x,0)dx=F \qquad (31)$$

где $F=2\int_{a}^{\infty}f(x)dx$ (32)

Используя (29), (23), (19) и (13), можно определить все искомые функции. Далее по формулам (1)-(7) можно определить все компоненты сопряженно-электроупругого поля в любой точке пьезокерамики и упругого поля в ортотропном проводнике.

Задача решена точно в замкнутом виде.

Нормальные составляющие векторов электрической индукции и напряженности в зоне сцепления квадрантов соответственно определяются по формулам [9]:

$$D_z(x,0)=\frac{e_{15}}{c_{11}^{E}}(P_{12}n_{11}-P_{22}n_{12})H(x)+F_1(x)$$

$$E_z(x,0)=\frac{n_{21}P_{12}+n_{22}P_{22}}{e_{15}}H(x)+F_2(x) \qquad (0<x<a) \qquad (33)$$

где

$$\begin{Bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{3} a_{3k} \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_{21} \\ n_{22} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{3} t_k \Delta_3(t_k) \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \end{Bmatrix}$$

$$a_{3k} = t_k \left[\frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_1(t_k) - \frac{c_{11}^E e_{33}}{c_{44}^E e_{15}} \Delta_2(t_k) - \frac{c_{11}^E \varepsilon_{33}^S}{e_{15} e_{15}} \Delta_3(t_k) \right] \tag{34}$$

Из (29) и (33) видно, что на концах зоны полного контакта полуплоскостей механические напряжения, нормальные составляющие электрической индукции и напряженности сопровождаются осцилляциями со значительными механическими и электрическими полями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. – Изв.АН Арм. ССР, Механика, 1985, т.38, №1, с.12-19.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. – Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. 470с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. 415с.
4. Мелкумян С.А., Улитко А.Ф. Осесимметричная контактная задача электроупругости для полупространства. – ПМ, 1987, т.23, №9, с. 44-51.
5. Тоноян В.С., Мелкумян С.А. Симметричная контактная задача для ортотропной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом. – Докл. НАН РА, 1991, т. 92, №3, с. 133-137.
6. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. – Киев: Наукова Думка, 1989. 479 с.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Физматгиз. 1963. 639 с.
8. Михлин С.Г.. Интегральные уравнения. – М.-Л.: ОГИЗ, 1949. 380 с.
9. Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Гостехиздат, 1971. 1108 с.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию 2.10.1997