ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №4, 1998 Механика

УДК 539.3

К ТЕОРИИ ПЛАСТИН ПО НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Хачатрян А.А.

Ա.Ա. Խաչատրյան

Սալերի ոչ սիմետրիկ առաձգականության տեսության շուրջ

Որոշ ոչ ավանդական նյութերից պատրաստված սալերի ծռման խնդիրներ դիտարկելիս, առաջանում է ոչ սիմետրիկ առաձգականության տեսության շրջանակներում մոմենտային լարումների հաշվի առնելու անհրաժեշտություն [1-3]: Այս խնդրի եռաչափ լուծումը կապված է որոշակի դժվարությունների հետ: Այստեղ ոչ սիմետրիկ առաձգականության տեսության եռաչափ խնդիրը երկչափ խնդրին բերելու ևս մեկ փորձ է արվում [4, 5]: Ընդ որում, ի տարբերություն [5]-ի այստեղ առաջարկվում են հիպոթեզներ, որոնք տալիս են ոչ միայն ծռվող սալերի այլ նաև հարթ խնդրի դիտարկման համար ամփոփ արդյունքներ:

A.A. Khachatryan

On the Non-symmetrical Elasticity Theory of Plates

При рассматривании задач изгиба пластин, изготовленных из некоторых нетрадиционных материалов, возникает необходимость учета моментных напряжений на уровне несимметричной теории упругости [1-3]. Трехмерный подход к решению этой проблемы связан с некоторыми трудностями. Здесь делается еще одна попытка сведения трехмерной задачи несимметричной теории упругости к двумерной задаче пластинки [4, 5]. При этом, в отличие от [5], здесь предлагаются гипотезы, которые дают корректные результаты не только для изгибаемых пластин, но и для рассмотрения плоской задачи.

1. Рассмотрим пластинку постоянной толщины h в декартовой системе координат (x, y, z). Пусть срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью координат xOy $(z = 0)$. Пусть пластинка загружена поверхностными нормальными силами, приложенными к плоскостям $z = \pm h/2$ так, что

$$\text{при } z = \frac{h}{2} \quad \sigma_z = Z^+, \text{ при } z = -\frac{h}{2} \quad \sigma_z = -Z^-$$

$$\text{при } z = \pm\frac{h}{2} \quad \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \mu_{zz} = \mu_{zx} = \mu_{zy} = 0 \tag{1.1}$$

где σ_{ik} - силовые напряжения, μ_{ik} - моментные напряжения.

В основу предлагаемой теории лежат следующие гипотезы, которые в некоторых случаях совпадают, а в некоторых случаях обобщают известные гипотезы и представления уточненной теории пластин [4]:

а) нормальные к срединной плоскости перемещения u_z и повороты относительно координаты z не зависят от z, то есть

$$u_z = w(x, y), \quad \omega_z = \psi_3(x, y) \tag{1.2}$$

где w - искомое нормальное перемещение, ψ_3 - искомый поворот относительно координаты z;

б) касательные напряжения σ_{zx} и σ_{zy} по толщине пластинки меняются по заданному закону

$$\sigma_{zx} = f(z)\varphi_1(x,y), \quad \sigma_{zy} = f(z)\varphi_2(x,y) \tag{1.3}$$

где φ_i - искомые функции, характеризующие поперечные сдвиги; $f(z)$ - заданная функция, в частности, в последующем принимаем

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \tag{1.4}$$

в) повороты ω_x и ω_y относительно координат x и y соответственно, имеют структуру поворотов, определяемых по уточненной теории

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - f(z)\psi_2(x,y), \quad \omega_y = -\frac{\partial w}{\partial x} + f(z)\psi_1(x,y) \tag{1.5}$$

где ψ_i - искомые функции, характеризующие повороты относительно координат x и y;

г) нормальное напряжение σ_z пренебрежимо мало, моментные напряжения $\mu_{zz}, \mu_{zx}, \mu_{zy}$ достаточно малы и при необходимости, как и σ_z, могут быть определены из уравнений равновесия с учетом условий (1.1).

2. В выбранной системе координат для силовых и моментных напряжений имеем [2,3]

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} &= (\mu+\alpha)\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ji} \\ \mu_{ji} &= (\gamma+\varepsilon)\chi_{ji} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{ij} + \beta\chi_{kk}\delta_{ji} \end{aligned} \tag{2.1}$$

где для тензора деформаций и тензора изгиба-кручения имеем

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \epsilon_{kji}\,\omega_k, \quad \chi_{ji} = \omega_{i,j} \tag{2.2}$$

(суммирование по k)

далее, $\mu = E/2(1+\nu)$, $\lambda = \nu E/(1+\nu)(1-2\nu)$ - постоянные Ламе; E - модуль упругости; ν - коэффициент Пуассона; $\alpha, \gamma, \varepsilon, \beta$ - новые упругие постоянные (μ, λ, E, α - $ML^{-1}T^{-2}$; $\gamma, \varepsilon, \beta$ - MLT^{-2}); u_i - искомые перемещения; δ_{ji} - символ Кронекера; ϵ_{kji} - тензор Леви-Чивиты.

Уравнения движения в напряжениях запишутся следующим образом [2,3]:

$$\sigma_{ji,j} + X_i = \rho\ddot{u}_i, \; \epsilon_{ijk}\,\sigma_{ji} + \mu_{ji,j} + Y_i = J\ddot{\omega}_i \tag{2.3}$$

где ρ - плотность материала $\left(ML^{-3}\right)$; J - динамическая характеристика среды $\left(ML^{-1}\right)$; X_i, Y_i - составляющие массовых сил и массовых моментов.

Согласно (1.2) - (2.2), для тангенциальных перемещений какой-либо точки пластинки имеем

$$\begin{aligned} u_x &= u - z\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{I_0(z)}{\mu+\alpha}(\varphi_1 + 2\alpha\psi_1) \\ u_y &= v - z\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{I_0(z)}{\mu+\alpha}(\varphi_2 + 2\alpha\psi_2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $u(x,y)$, $v(x,y)$ - искомые тангенциальные перемещения срединной плоскости пластинки, $I_0(z)=\frac{z}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{z^2}{3}\right)$.

Таким образом, благодаря принятым гипотезам, трехмерная задача несимметричной теории упругости свелась к двумерной задаче, то есть к определению восьми "двумерных" функций: $u, v, w, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3$.

Подставляя в (2.1) значения γ_{ji} и χ_{ji} с учетом (1.2), (1.5), (2.2) и (2.4), для искомых напряжений (наряду с (1.3)) получим

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= B\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}-z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{I_0(z)}{\mu+\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1+2\alpha\psi_1)+\nu\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_2+2\alpha\psi_2)\right]\right\}\\
\sigma_{yy} &= B\left\{\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}-z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{I_0(z)}{\mu+\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_2+2\alpha\psi_2)+\nu\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1+2\alpha\psi_1)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

При определении этих напряжений, согласно предположению г), пренебрегли напряжением σ_{zz}.

Далее имеем следующие несимметричные силовые напряжения:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xy} &= (\mu+\alpha)\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)-2\mu z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-2\alpha\psi_3+\right.\\
&\left.+I_0(z)\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_2+2\alpha\psi_2)+\theta\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1+2\alpha\psi_1)\right]\right\}\\
\sigma_{yx} &= (\mu+\alpha)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\theta\frac{\partial v}{\partial x}\right)-2\mu z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+2\alpha\psi_3+\right.\\
&\left.+I_0(z)\left[\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1+2\alpha\psi_1)+\theta\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_2+2\alpha\psi_2)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{zx} &= f(z)\left(\theta\varphi_1+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_1\right)\\
\sigma_{yz} &= f(z)\left(\theta\varphi_2+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_2\right)
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Для моментных напряжений получим

$$
\begin{aligned}
\mu_{xx} &= 2\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-f(z)\left[(2\gamma+\beta)\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-\beta\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right]\\
\mu_{yy} &= -2\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+f(z)\left[(2\gamma+\beta)\frac{\partial\psi_1}{\partial y}-\beta\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right]
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

$$\mu_{xy} = (\gamma+\varepsilon)\left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(z)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \eta\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)\right]$$

$$\mu_{yx} = (\gamma+\varepsilon)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - f(z)\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y} - \eta\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)\right] \qquad (2.9)$$

$$\mu_{xz} = (\gamma+\varepsilon)\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + z\eta\psi_2\right)$$

$$\mu_{yz} = (\gamma+\varepsilon)\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial y} - z\eta\psi_1\right) \qquad (2.10)$$

Напряжения (2.5)-(2.10) в поперечных сечениях пластинки вызывают внутренние усилия и моменты, которые на единице длины срединной плоскости пластинки запишутся следующим образом: тангенциальные и перерезывающие усилия от силовых напряжений

$$T_{xx} = Bh\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right),\ T_{yy} = Bh\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$S_{xy} = (\mu+\alpha)h\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \theta\frac{\partial u}{\partial y}\right) - 2\alpha h\psi_3$$

$$S_{yx} = (\mu+\alpha)h\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \theta\frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\alpha h\psi_3 \qquad (2.11)$$

$$N_{xz} = \frac{h^3}{12}\left(\theta\varphi_1 + \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_1\right),\qquad N_{yz} = \frac{h^3}{12}\left(\theta\varphi_2 + \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_2\right)$$

Изгибающие и крутящие моменты от силовых напряжений

$$M_{xx} = -D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{h^2}{10(\mu+\alpha)}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1 + 2\alpha\psi_1) + \nu\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_2 + 2\alpha\psi_2)\right]\right\}$$

$$M_{yy} = -D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{h^2}{10(\mu+\alpha)}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_2 + 2\alpha\psi_2) + \nu\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1 + 2\alpha\psi_1)\right]\right\} \quad (2.12)$$

$$H_{xy} = -\frac{h^3}{12}\left\{2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{h^2}{10}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_2 + 2\alpha\psi_2) + \theta\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1 + 2\alpha\psi_1)\right]\right\}$$

$$H_{yx} = -\frac{h^3}{12}\left\{2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{h^2}{10}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1 + 2\alpha\psi_1) + \theta\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_2 + 2\alpha\psi_2)\right]\right\}$$

Суммарные крутящие-изгибающие моменты от моментных напряжений

$$P_{xx} = 2\gamma h\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{h^3}{12}\left[(2\gamma+\beta)\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \beta\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right]$$

$$P_{yy} = -2\gamma h\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{h^3}{12}\left[(2\gamma+\beta)\frac{\partial\psi_1}{\partial y} - \beta\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right]$$

$$R_{xy} = -(\gamma+\varepsilon)h\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \eta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \eta\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)\right]$$

$$R_{xy}=(\gamma+\varepsilon)h\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\eta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y}-\eta\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)\right] \tag{2.13}$$

$$Q_{xz}=(\gamma+\varepsilon)h\frac{\partial\psi_3}{\partial x},\qquad Q_{yz}=(\gamma+\varepsilon)h\frac{\partial\psi_3}{\partial y}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$B=\frac{E}{1-\nu^2},\ D=\frac{Bh^3}{12},\ \theta=\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha},\ \eta=\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \tag{2.14}$$

где θ и η - новые безразмерные величины типа коэффициента Пуассона. Кстати, как показано в [6], диапазон изменения η : $-1<\eta<1$. Полагаем также, что θ - положительная величина, меньше или равно единице ($0\le\theta\le 1$).

3. Осредняя уравнения движения (2.3) по толщине пластинки, после очевидных преобразований с учетом (1.1), (2.5)-(2.13), получим полную систему восьми дифференциальных уравнений относительно восьми искомых функций, с помощью которых определяются все расчетные величины задачи.

$$B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(B-\mu-\alpha)\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x\partial y}+2\alpha\frac{\partial\psi_3}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

$$B\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2}+(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}+(B-\mu-\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\alpha\frac{\partial\psi_3}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \tag{3.2}$$

$$2\alpha\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+(\gamma+\varepsilon)\Delta\psi_3-4\alpha\psi_3=J\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}-\frac{h^2}{12}\left[\theta\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)\right]-\\-\frac{1}{h}\left(Z^++Z^-\right)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}B\frac{\partial}{\partial x}\Delta w-\frac{h^2}{10}\left\{\Delta(\varphi_1+2\alpha\psi_1)+\left(\frac{B}{\mu+\alpha}-1\right)\times\right.\\ \left.\times\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi_1+2\alpha\psi_1)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\varphi_2+2\alpha\psi_2)\right]\right\}+\varphi_1=\rho\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered}B\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-\frac{h^2}{10}\left\{\Delta(\varphi_2+2\alpha\psi_2)+\left(\frac{B}{\mu+\alpha}-1\right)\times\right.\\ \left.\times\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varphi_2+2\alpha\psi_2)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\varphi_1+2\alpha\psi_1)\right]\right\}+\varphi_2=\rho\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2}\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta w-\frac{h^2}{12}\left[\Delta\psi_1+\left(\frac{\beta}{\gamma+\varepsilon}+\eta\right)\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{2\alpha(\varphi_1-2\mu\psi_1)}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\right]=\frac{J}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{h^2}{12}\psi_1\right) \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-\frac{h^2}{12}\left[\Delta\psi_2+\left(\frac{\beta}{\gamma+\varepsilon}+\eta\right)\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{2\alpha(\varphi_2-2\mu\psi_2)}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\right]=\frac{J}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{h^2}{12}\psi_2\right) \tag{3.8}$$

Рассматривая систему уравнений (3.1)-(3.8), замечаем, что первые три уравнения (3.1)-(3.3) отделяются, составляя полную систему относительно трех искомых функций u, v, ψ_3, представляя собой уравнения плоской задачи несимметричной теории упругости [1-3]. Остальные уравнения составляют полную систему относительно пяти искомых функций $w, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ и описывают задачу изгиба пластинки по несимметричной теории упругости.

К этим уравнениям должны быть присоединены граничные условия на торцах пластинки и начальные условия.

Приведем некоторые граничные условия в случае изгиба пластинки для края $x=0$

Свободный край: $M_{xx}=0, \quad N_{xz}=0, \quad R_{xy}=0$

Заделанный край: $u_x\big|_{z=\pm z_0}=0, \quad \omega_y\big|_{z=0}=0, \quad w=0$

Шарнирно опертый край: $M_{xx}=0, \quad R_{xy}=0, \quad w=0$

Здесь мы привели лишь осредненные граничные условия. Безусловно, возможны и другие варианты непротиворечащих граничных условий.

4. На основе предложенной здесь теории рассмотрим некоторые модельные задачи по изгибу пластинок.

а) Расмотрим изгиб прямоугольной пластинки $(a\times b)$, шарнирно закрепленной по всему контуру, под действием распределенной нормальной нагрузки

$$Z^+ + Z^- = Z = q\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \tag{4.1}$$

имеем следующую систему уравнений равновесия:

$$(\mu-\alpha)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)+4\mu\alpha\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)=-\frac{12}{h^3}(\mu+\alpha)Z$$

$$B\frac{\partial}{\partial x}\Delta w-\frac{h^2}{10}\left\{\Delta(\varphi_1+2\alpha\psi_1)+\left(\frac{B}{\mu+\alpha}-1\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi_1+2\alpha\psi_1)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\varphi_2+2\alpha\psi_2)\right]\right\}+\varphi_1=0$$

$$B\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-\frac{h^2}{10}\left\{\Delta(\varphi_2+2\alpha\psi_2)+\left(\frac{B}{\mu+\alpha}-1\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varphi_2+2\alpha\psi_2)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\varphi_1+2\alpha\psi_1)\right]\right\}+\varphi_2=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta w-\frac{h^2}{12}\left[\Delta\psi_1+\left(\frac{\beta}{\gamma+\varepsilon}+\eta\right)\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2\alpha(\varphi_1-2\mu\psi_1)}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\right]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-\frac{h^2}{12}\left[\Delta\psi_2+\left(\frac{\beta}{\gamma+\varepsilon}+\eta\right)\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial y}\right)+\right. \tag{4.2}$$

$$\left.+\frac{2\alpha(\varphi_2-2\mu\psi_2)}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\right]=0$$

и граничные условия

$$\text{при } x=0,\ x=a \qquad w=0,\ M_{xx}=0,\ R_{xy}=0$$

$$\text{при } y=0,\ y=b \qquad w=0,\ M_{yy}=0,\ R_{yx}=0 \tag{4.3}$$

Решение системы (4.2) ищем в виде

$$w=w_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

$$\varphi_1=\Phi_1\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},\qquad \psi_1=\Psi_1\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \tag{4.4}$$

$$\varphi_2=\Phi_2\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b},\qquad \psi_2=\Psi_2\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}$$

удовлетворяющее всем граничным условиям (4.3).

Подставив (4.4) в (4.2) и решив полученную систему, окончательно будем иметь

$$\Phi_1=\frac{b}{a}\Phi_2=\frac{6ql^2}{\pi ah^3}\frac{2\alpha+(5\mu-7\alpha)\delta\delta_1}{2\alpha(1+12\delta)+(5\mu+7\alpha)\delta\delta_1}$$

$$\Psi_1=\frac{b}{a}\Psi_2=\frac{6ql^2}{\pi ah^3\mu}\frac{\alpha+6\delta(\mu+\alpha+\mu\delta_1)}{2\alpha(1+12\delta)+(5\mu+7\alpha)\delta\delta_1} \tag{4.5}$$

$$w_0=\frac{ql^4}{4\pi^4D}\left\{1+\delta_1-\alpha\delta\frac{24+\delta_1(26+7\delta_1)}{2\alpha(1+12\delta)+(5\mu+7\alpha)\delta\delta_1}\right\}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$l^2=\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2},\quad \delta_1=\frac{\pi^2Bh^2}{5\mu l^2},\quad \delta=\frac{\gamma+\varepsilon}{Bh^2} \tag{4.6}$$

в) Чистый изгиб пластинки-полосы ширины a, длинные стороны которой закреплены шарнирно и вдоль них действуют изгибающие моменты $M_{xx}=M_0$. Здесь все искомые величины не зависят от координаты y, отсутствует поперечная нагрузка $(Z=0)$ и $\varphi_2=\psi_2=0$. Поэтому система уравнений равновесия (4.2) упрощается, принимая вид

$$(\mu-\alpha)\varphi'+4\mu\alpha\psi'=0$$
$$Bw'''-\frac{Bh^2}{10(\mu+\alpha)}(\varphi''+2\alpha\psi'')+\varphi=0 \tag{4.7}$$
$$w'''-\frac{h^2}{12}\left[\psi''+\frac{2\alpha}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}(\varphi-2\mu\psi)\right]=0$$

Граничные условия здесь следующие:

$$\text{при } x=0,\ x=a \qquad M_{xx}=M_0,\ R_{xy}=0,\ w=0 \tag{4.8}$$

Интегрируя первое уравнение системы (4.7) и учитывая, что перерезывающая сила N_{xz} (2.11) равна нулю, будем иметь

$$\varphi=-\frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha}\psi \tag{4.9}$$

Далее из последних двух уравнений системы (4.7) исключив w и учитывая (4.9), относительно ψ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\psi''-\lambda^2\psi=0,\quad \lambda^2=\frac{2a\mu\alpha(1+12\delta)}{Bh^2(5\mu+7\alpha)\delta},\quad \delta=\frac{\gamma+\alpha}{Bh^2} \tag{4.10}$$

Таким образом, имеем

$$\psi=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x},\quad \varphi=-\frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha}\left(C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}\right) \tag{4.11}$$

Подставляя значения φ и ψ во второе или третье уравнение системы (4.7), получим

$$w'''=\frac{\alpha}{\mu-\alpha}\left(\frac{4\mu}{B}-\frac{h^2\lambda^2}{5}\right)\left(C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}\right) \tag{4.12}$$

откуда

$$w=\frac{\alpha}{(\mu-\alpha)\lambda^3}\left(\frac{4\mu}{B}-\frac{h^2\lambda^2}{5}\right)\left(C_1e^{\lambda x}-C_2e^{-\lambda x}\right)+C_3x^2+C_4x+C_5 \tag{4.13}$$

Удовлетворяя граничным условиям (4.8), для постоянных интегрирования получим

$$C_1=-\frac{60M_0(\mu-\alpha)}{(5\mu+7\alpha)(1+e^{\lambda a})h^2\lambda D},\quad C_2=\frac{60M_0(\mu-\alpha)e^{\lambda a}}{(5\mu+7\alpha)(1+e^{\lambda a})h^2\lambda D}$$
$$C_3=-\frac{M_0}{2(1+12\delta)D},\quad C_4=\frac{M_0a}{2(1+12\delta)D} \tag{4.14}$$
$$C_5=\frac{60M_0\alpha}{(5\mu+7\alpha)h^2\lambda^4D}\left(\frac{4\mu}{B}-\frac{h^2\lambda^2}{5}\right)$$

Подставляя теперь (4.14) в (4.11) и (4.13), для искомых функций будем иметь

$$\varphi=\frac{240M_0\mu\alpha}{(5\mu+7\alpha)h^2\lambda D}\frac{\operatorname{sh}\lambda\left(x-\dfrac{a}{2}\right)}{\operatorname{ch}\dfrac{\lambda a}{2}}$$

$$\psi = -\frac{60M_0(\mu-\alpha)}{(5\mu+7\alpha)h^2\lambda D}\frac{\operatorname{sh}\lambda\left(x-\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{ch}\frac{\lambda a}{2}} \tag{4.15}$$

$$w = \frac{M_0}{(1+12\delta)D}\left[\frac{3\delta B}{\lambda^2\mu}\left(\frac{4\mu}{B}-\frac{h^2\lambda^2}{5}\right)\left(1-\frac{\operatorname{ch}\lambda\left(x-\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{ch}\frac{\lambda a}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(ax^2-x^2\right)\right]$$

Наибольший прогиб имеет место при $x = a/2$

$$w_{\max} = \frac{M_0a^2}{8D}\left\{1-\frac{12\delta}{1+12\delta}\times\right.$$
$$\left.\times\left[1+\frac{2B}{5\mu}\left(1-\frac{\delta}{\alpha}\frac{5\mu+7\alpha}{1+12\delta}\right)\left(1-\operatorname{sec}h\frac{\lambda a}{2}\right)\frac{h^2}{a^2}\right]\right\} \tag{4.16}$$

c) Изгиб пластинки-полосы ширины a, длинные стороны которой закреплены шарнирно, находящейся под действием сил интенсивности P, распределенных вдоль линии $x = a/2$.

Здесь, как и в предыдущей задаче, уравнения равновесия представляются системой (4.7), а граничные условия следующие:

при $x = 0,\ x = a \quad M_{xx} = 0,\ R_{xy} = 0,\ w = 0$ (4.17)

Для перерезывающей силы N_{xz} имеем

$$N_{xz} = \frac{h^3(\mu-\alpha)}{12(\mu+\alpha)}\left(\varphi+\frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha}\psi\right) = \begin{cases} P/2 & 0 \le x < \frac{a}{2} \\ -P/2 & \frac{a}{2} < x \le a \end{cases} \tag{4.18}$$

Поэтому придется рассмотреть участки $0 \le x < a/2$ и $a/2 < x \le a$ в отдельности.

Для участка $0 \le x < a/2$, интегрируя первое уравнение системы (4.7) и учитывая (4.18), будем иметь

$$\varphi = \frac{6(\mu+\alpha)P}{(\mu-\alpha)h^3}-\frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha}\psi \tag{4.19}$$

Из последних двух уравнений системы (4.7), исключив w и учитывая (4.19), относительно ψ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\psi''-\lambda^2\psi = -\frac{5P}{Dh^2\delta}\frac{\alpha+6(\mu+\alpha)\delta}{(5\mu+7\alpha)} \tag{4.20}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\psi = C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}+\frac{3P}{h^3\mu\alpha}\frac{\alpha+6(\mu+\alpha)\delta}{1+12\delta} \tag{4.21}$$

В силу этого, из (4.19) будем иметь

$$\varphi = -\frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha}\left(C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}\right)+\frac{6P}{(1+12\delta)h^3} \tag{4.22}$$

Подставляя значения φ и ψ во второе или третье уравнение системы (4.7), получим

$$w''' = \frac{\alpha}{\mu-\alpha}\left(\frac{4\mu}{B}-\frac{h^2\lambda^2}{5}\right)\left(C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}\right)-\frac{6P}{(1+12\delta)Bh^3}$$

откуда для w будем иметь

$$w = \frac{\alpha}{(\mu-\alpha)\lambda^3}\left(\frac{4\mu}{B}-\frac{h^2\lambda^2}{5}\right)\left(C_1e^{\lambda x}-C_2e^{-\lambda x}\right)-\frac{Px^3}{(1+12\delta)Bh^3}+$$
$$+C_3x^2+C_4x+C_5 \tag{4.23}$$

Здесь величины λ и δ определяются согласно (4.10).

Теперь аналогичные действия будем производить для участка $a/2 < x \le a$ и здесь все искомые величины будем обозначать черточкой сверху. Опуская подробности, приведем окончательные результаты

$$\overline{\psi} = \overline{C}_1e^{\lambda x}+\overline{C}_2e^{-\lambda x}-\frac{3P}{h^3\mu\alpha}\frac{\alpha+6(\mu+\alpha)\delta}{1+12\delta}$$

$$\overline{\varphi} = -\frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha}\left(\overline{C}_1e^{\lambda x}+\overline{C}_2e^{-\lambda x}\right)-\frac{6P}{(1+12\delta)Bh^3} \tag{4.24}$$

$$\overline{w} = \frac{\alpha}{(\mu-\alpha)\lambda^3}\left(\frac{4\mu}{B}-\frac{h^2\lambda^2}{5}\right)\left(\overline{C}_1e^{\lambda x}-\overline{C}_2e^{-\lambda x}\right)+$$
$$+\frac{Px^3}{(1+12\delta)Bh^3}+\overline{C}_3x^2+\overline{C}_4x+\overline{C}_5$$

Таким образом, имеем десять постоянных интегрирования, для определения которых кроме указанных шести граничных условий (4.17) необходимо добавить также условия на контакте двух участков:

$$\text{при } x=\frac{a}{2} \quad M_{xx}=\overline{M}_{xx},\ w=\overline{w},\ w'=\overline{w}',\ \omega_y\big|_{z=0}=\overline{\omega}_y\big|_{z=0} \tag{4.25}$$

Удовлетворяя всем граничным условиям, для постоянных интегрирования получаем

$$C_1=C_2=-\frac{3P}{2h^3\mu\alpha}\frac{\alpha+6(\mu+\alpha)\delta}{(1+12\delta)\operatorname{ch}\frac{\lambda a}{2}}, \qquad C_3=C_5=0$$

$$C_4=\frac{Pa^2}{16D(1+12\delta)}\left[1-\frac{4B}{5\mu\alpha}\left(\frac{\alpha}{\mu-\alpha}-5\delta\right)\frac{\alpha+6(\mu+\alpha)\delta}{(1+12\delta)}\frac{h^2}{a^2}\right] \tag{4.26}$$

$$\overline{C}_1=-C_1e^{-\lambda a},\quad \overline{C}_2=-C_1e^{\lambda a},\quad \overline{C}_3=-\frac{Pa}{4D(1+12\delta)}$$

$$\overline{C}_4=\frac{Pa^2}{4D(1+12\delta)}-C_4,\quad \overline{C}_5=aC_4-\frac{Pa^3}{12D(1+12\delta)}$$

На основании этого можно определить все интересующие величины задачи. Здесь мы ограничимся приведением наибольшего значения прогиба, имеющего место при $x=a/2$

$$w_{\max}=\frac{Pa^3}{48D(1+12\delta)}\left[1-\frac{6B}{5\mu\alpha}\left(\frac{\alpha}{\mu-\alpha}-5\delta\right)\frac{\alpha+6(\mu+\alpha)\delta}{1+12\delta}\left(1-\frac{2\operatorname{th}\frac{\lambda a}{2}}{\lambda a}\right)\frac{h^2}{a^2}\right] \tag{4.27}$$

5. Введем понятие

$$L^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{2B(1-\nu)} \left(\delta = 2(1-\nu)\frac{L^2}{h^2} \right)$$

квадрат характерного размера материала [6] и проанализируем влияния постоянного α и характерного размера L на прогиб квадратной пластинки $(l = b = a)$.

Вычисления выполнены согласно третьей формуле (4.5).

Пусть $\frac{h}{a} = \frac{1}{10}$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 0.02B$. Приводятся вычисления относительного прогиба центра пластинки, равного $w_0 \frac{4\pi^4 D}{qa^4}$, в случаях, когда $L = 0.05$см, а $h = 0.02$см и 0.05см.

В итоге, для относительных прогибов получаем 0.568 и 0.328 соответственно. Отсюда можно заключить, что при уменьшении абсолютной толщины пластинки увеличивается эффект учета моментных напряжений. Этот же эффект наблюдается и при меньших значениях характерного размера материала L. В частности, полагая $L = 0.01$см (то есть в 5 раз меньше предыдущего случая) при абсолютных значениях $h = 0.2$см, 0.1см, 0.05см (относительную толщину пластинки оставляем неизменным, то есть $h/a = 0.1$ для относительного прогиба центра пластинки получаем 1.014, 0.908 и 0.664 соответственно.

Важно отметить также следующий факт, что при существенном изменении значения α прогиб центра пластинки изменяется незначительно (конечно, окрестность $\alpha = 0$ исключается). Пусть, например, $h = 0.05$см, $a = 0.5$см, $L = 0.01$см, а для α имеем $0.02B$ и $0.04B$ (т.е. увеличиваем α в два раза). В этих случаях для относительного прогиба центра пластинки получаем 0.670 и 0.686 соответственно.

Аналогичные результаты получаются и при анализе прогибов других решенных выше задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E. et F. Theorie des corps deformables. - Paris : Hermann, 1909.
2. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости// Прикладная математика и механика. - 1964, т. 28, вып. 3.
3. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1987.
5. Амбарцумян С.А. Теория поперечного изгиба пластин по несимметричной теории упругости// Механика композиционных материалов. - 1996, т. 32, №1.
6. Савин Г.Н. Основы плоской задачи моментной теории упругости. - Киев: Изд. Киевского ун-та, 1965.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 16.12.1996