

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

Амбарцумян С.А., Минасян М.М.

Ս.Ա. Համբարձումյան, Մ.Մ. Մինասյան
 Ատավանաժուցիկ ուղղանկյուն սալի ոչ գծային տատանումները

Աշխատանքում դիտարկվում է դեֆորմացիաների արագորյան նկատմամբ գլխուն ատավանաժուցիկ իզոտրոպ նյութից պատրաստված ուղղանկյուն սալի ազատ և հարկադրական տատանումները: Այստեղ նյութական հավասարումները հանդես են գալիս որպես հեղինակների կողմից առաջարկված և հետազոտված [1,2] միաչափ մոդելի հավասարման ընդհանրացումներ:

Մոդելի գլխավոր առանձնահատկությունն այն է, որ բեռնավորումը և բեռնարսվումը ենթարկվում են տարբեր օրենքների, որի հետևանքով դեֆորմացիաների և ըսրումների ինտենսիվությունների հարրոբյունում դինամիկական դիպրամները կրում են հիստերեզիսային բնույթ, այնպես, որ մարման և ոչ գծայնորյան մեխանիկները հանդես են գալիս միասույլ:

Կիրառելով Բուրնով-Չալոյրիկի և միջինացման մեթոդները, որոշված են ազատ տատանումների լայնույթի և հաճախորյան փոփոխման օրենքները և կատարված են սապիոնար հարկադրական տատանումների ռեզոնանսի բնույթարի կրերը: Բացահայտված են որակական տարբերություններ համեմատ ատավանաժուցիկ լրյան գծային մոդելների:

S.A. Ambartsumyan, M.M. Minasyan
 Nonlinear vibrations of viscoelastic plates

В работе рассматриваются свободные и вынужденные колебания прямоугольной пластинки, изготовленной из изотропного вязкоупругого материала, чувствительного к скорости деформирования. Материальные уравнения здесь представляют обобщение одномерной нелинейной модели, предложенной авторами в работах [2, 3].

Главной особенностью модели является то, что нагружение и разгрузка подчиняются разным законам, из-за чего в плоскости интенсивностей напряжений и деформаций диаграммы носят динамический гистерезисный характер. Таким образом, механизмы затухания и нелинейности объединены в одном выражении.

Применяя методы Бубнова-Галеркина и методы усреднения, найдены законы изменения амплитуды и частоты свободных колебаний и построены резонансные кривые для стационарных вынужденных колебаний. Выявлены качественные отличия от случаев, когда применяются модели линейной вязкоупругости.

Рассматривается задача поперечных колебаний пластинки, изготовленной из вязкоупругого материала. Уравнение для прогиба пластинки выводится в рамках классической теории изгиба пластинок [1]. Для материала пластинки применяется модель нелинейного вязкоупругого тела, являющаяся обобщением одномерной модели, предложенной и исследованной авторами [2,3].

1. Пластика толщиной h расположена в декартовой системе координат xOy так, что срединная плоскость совпадает с плоскостью xOy .

Уравнение поперечных движений пластинки прием в виде [1].

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + h \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + h \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 2h \frac{\partial}{\partial x \partial y} \left(\sigma_{xy} \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(t) \varphi(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

где M_x, M_y, H - изгибающие и крутящие моменты, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ - осевые напряжения, ρ - плотность, $w(x, y, t)$ - нормальное перемещение срединной плоскости.

В качестве модели трехмерного вязкоупругого тела предлагается следующее обобщение одномерной модели:

$$\sigma_{ij} = K\theta\delta_{ij} + 2G \left[1 + \psi \left(\frac{\dot{e}_j}{\alpha} \right) \right] \left(\varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3} \delta_{ij} \right) \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \theta = \varepsilon_{kk} \quad (1.3)$$

$$e_j = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) \right]^{1/2} \quad (1.4)$$

Обратим внимание на то, что здесь, в отличие от теории пластичности, фигурирует скорость интенсивности деформаций, а не интенсивность e_j скоростей деформаций. K, G, α - постоянные. Функция

$\psi \left(\frac{\dot{e}_j}{\alpha} \right)$ характеризует влияние скорости деформирования на напряженное состояние тела. При квазистатическом нагружении $\psi = 0$ и (1.2) переходит в соотношения изотропного упругого тела. Таким образом, функция ψ является мерой отклонения вязкоупругого тела от гукковского, вследствие влияния скорости деформирования.

Как и в одномерном случае [3], будем считать, что соотношения (1.2) верны только для процесса нагружения ($\dot{e}_j > 0$). Как показывают экспериментальные данные, для ряда полимерных материалов процесс разгрузки очень близок к упругому поведению. Основываясь на это, мы здесь для процесса разгрузки ($\dot{e}_j < 0$) примем $\psi = 0$.

На основании принятой модели можно заключить:

а) изменение объема прямо пропорционально среднему напряжению, т.е.

$$\sigma_{kk} = 3K\theta;$$

б) девиаторы напряжений (D_σ) и деформаций (D_ε) параллельны;

в) интенсивности напряжений σ_j и деформаций e_j связаны "одномерным" соотношением

$$\sigma_j = 2G \left[1 + \psi \left(\frac{\dot{e}_j}{\alpha} \right) \right] e_j \quad (1.5)$$

что позволяет процесс сложного деформирования представить "единой" кривой в плоскости (σ_j, e_j) для каждого закона деформирования.

Наконец отметим, что значения постоянных K, G, α и вид функции ψ выбираются из условия наилучшего соглашения с экспериментальными данными при элементарных испытаниях (растяжение, сдвиг).

2. Отправляясь от исходных предположений классической теории пластинок [1], из соотношений (1.2) получим

$$\sigma_{xx} = \frac{\tilde{E}}{1-\tilde{\nu}^2} (\varepsilon_{xx} + \tilde{\nu}\varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{\tilde{E}}{1-\tilde{\nu}^2} (\varepsilon_{yy} + \tilde{\nu}\varepsilon_{xx}), \quad \sigma_{xy} = \frac{\tilde{E}}{1+\tilde{\nu}} \varepsilon_{xy} \quad (2.1)$$

где

$$\tilde{E} = 2(1+\tilde{\nu})\tilde{\mu}, \quad \tilde{\nu} = \frac{\tilde{\lambda}}{2(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu})} \quad (2.2)$$

$$\tilde{\lambda} = K - \frac{2}{3}\tilde{\mu}, \quad \tilde{\mu} = G \left[1 + \psi \left(\frac{\dot{\varepsilon}_I}{\alpha} \right) \right]$$

Для деформаций имеем

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.3)$$

Как видно из этих представлений, напряжения выражаются через прогиб $w(x, y, t)$ весьма сложными образами и непосредственное их использование в (1.1) неприемлемо. Выход из этой ситуации связан с возможностью линеаризации этих соотношений по функции ψ , что в свою очередь связана с возможностью пренебрежения ψ^2 по отношению к единице.

При изгибных колебаниях аргумент $\frac{\dot{\varepsilon}_I}{\alpha}$ функции ψ имеет порядок

$\pi^2 \frac{\omega_0}{\alpha} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \frac{w_{\max}}{l}$, где ω_0 - частота свободных колебаний упругой пластинки, l - длина полуволн колебания в срединной плоскости.

Учитывая, что ω_0 имеет порядок $\pi^2 \frac{c_0}{\alpha} \left(\frac{h}{l} \right)$, где $c_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}$ - скорость

упругой "стержневой" волны, следует, что $\frac{\dot{\varepsilon}_I}{\alpha}$ имеет порядок

$$\pi^4 \frac{c_0}{\alpha l} \left(\frac{h}{l} \right)^3 \frac{w_{\max}}{l}$$

В работе [1] показано, что для полимеров, чувствительных к малым скоростям деформации, можно принять

$$\psi \left(\frac{\dot{\varepsilon}_I}{\alpha} \right) = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_I}{\alpha} \right)^{2k}, \quad (2k < 1) \quad (2.4)$$

причем, чем меньше k , тем чувствителен материал к малым $\dot{\varepsilon}_I$.

Для главных колебаний l - характерный размер пластинки. Для рассмотренных в [1,2] полимеров $\frac{\dot{\varepsilon}_I}{\alpha}$ имеет порядок 10^1 . При $l \sim 1$ м,

$\frac{h}{l} \sim 10^{-2}$, $\frac{w_{\max}}{h} = 10^{-2}$, аргумент $\frac{\dot{\varepsilon}_I}{\alpha}$ имеет порядок 10^{-1} . Если принять

$2k = 0.25$, то, согласно (2.4), $\psi \sim 0.1$ и отбрасывание ψ^2 внесет погрешность порядка 10^{-2} .

На основании вышесказанного, в соотношениях (2.1) и (2.2) будем удерживать лишь линейные по ψ поправки к "упругим" выражениям.

Тогда получим

$$\bar{v} = v_0 - \frac{1}{3}(1 - 2\nu_0)(1 + \nu_0)\psi \leq v_0 \quad (2.5)$$

$$\bar{E} = E_0 \left[1 + \frac{2}{3}(1 + \nu_0)\psi \right] \geq E_0$$

где E_0 , ν_0 - значения модуля упругости и коэффициента Пуассона для упругого тела (вязкоупругого тела при квазистатическом испытании).

Для напряжений из (2.1) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \left[\varepsilon_{xx} + \nu_0 \varepsilon_{yy} + (A_0 \varepsilon_{xx} + B_0 \varepsilon_{yy}) \psi \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \left[\varepsilon_{yy} + \nu_0 \varepsilon_{xx} + (A_0 \varepsilon_{yy} + B_0 \varepsilon_{xx}) \psi \right] \\ \sigma_{xy} &= \frac{E_0}{1 - \nu_0} (1 + \psi) \varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$A_0 = \frac{2(\nu_0^2 - \nu_0 + 1)}{3(1 - \nu_0)} > 0, \quad B_0 = \frac{4\nu_0 - \nu_0^2 - 1}{3(1 - \nu_0)} \quad (2.7)$$

Далее на основании (1.4), (2.3) и допущений классической теории пластинок о пренебрежении e_{xz}, e_{yz}, e_{zz} имеем

$$\psi = \left(\frac{3z^2}{2\alpha^2} \right)^k \left[\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2} + 3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]^{2k} \quad (2.8)$$

Будем считать, что прогиб пластинки можно представить в виде $w(t, x, y) = F(t)\Phi(x, y)$, где $F(t)$ - амплитудная функция, $\Phi(x, y)$ - соответствующая граничным условиям "балочная" функция. Тогда функцию $\psi(t, x, y)$ можно представить в виде

$$\psi(t, x, y, z) = \left(\frac{3z^2}{2\alpha^2} \right)^k \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^{2k} \psi_1(x, y) \quad (2.9)$$

где

$$\psi_1 = \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (2.10)$$

После принятых предположений и сделанных допущений для моментов имеем

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3\psi_1}{2k+3} \left(\frac{3h^2 F^2}{8\alpha^2} \right)^k \left(A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (2.11)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{3\psi_1}{2k+3} \left(\frac{3h^2 F^2}{8\alpha^2} \right)^k \left(A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \quad (2.12)$$

$$H = -D(1 - \nu_0) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{3\psi_1}{2k+3} \left(\frac{3h^2 F^2}{8\alpha^2} \right)^k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (2.13)$$

$$\text{где } D = \frac{E_0 h^3}{12(1 - \nu_0^2)}$$

3. Рассмотрим шарнирно-опертую по всему контуру прямоугольную пластинку $x \in [0; a]$, $y \in [0; b]$, $z \in [-0,5h; 0,5h]$. Будем считать, что имеется тангенциальное усилие T_0 по оси x постоянной интенсивности и по оси y возникающее из-за несмещения краев вдоль оси y . Кроме того, пусть имеется также нормальная внешняя нагрузка. Тогда, вместо (1.1) имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + T_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E_0 h}{2b(1 - \nu_0^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \int_0^h \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy + q(t) \rho(x, y) = 0 \quad (3.1)$$

Исследуются решения вида

$$w(x, y, t) = F(t) \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} \quad (3.2)$$

Учитывая (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) и произведя обычную процедуру метода Бубнова-Галеркина и введя безразмерные переменные

$$\tau = \omega_0 t, \quad f(\tau) = h^{-1} F(\tau) \quad (3.3)$$

для амплитудной функции $f(\tau)$ получим следующее нелинейное уравнение:

$$f'' + f(1 + \lambda_0) + k_0 f^3 + \gamma_0 (f'^2)^k f = Q(\tau) = 0 \quad (3.4)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^4 D}{\rho h} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^2, \quad \lambda_0 = \frac{\pi^2 n^2 T_0}{\rho a^2 \omega_0^2}$$

$$k_0 = \frac{9}{16} \left(\frac{n^2}{m^2} \frac{b^2}{a^2} + 1 \right)^{-2}$$

$$\gamma_0 = \frac{12 \left[\sqrt{\frac{3}{8}} \frac{\pi \omega_0}{\alpha} m n \left(\frac{h}{a} \right) \left(\frac{h}{b} \right) \right]^{2k}}{\pi^2 (2k + 3) (\lambda + 2 + \lambda^{-1})} \left\{ A_0 (\lambda + \lambda^{-1}) + 2B_0 \right\} J_1 + 2(1 - \nu_0) J_2 \}$$

$$J_1 = \int_0^\pi \int_0^\pi [(\lambda - 1 + \lambda^{-1}) \sin^2 \xi \sin^2 \eta + 3 \cos^2 \xi \cos^2 \eta]^k \sin^2 \xi \sin^2 \eta d\xi d\eta$$

$$J_2 = \int_0^\pi \int_0^\pi [(\lambda - 1 + \lambda^{-1}) \sin^2 \xi \sin^2 \eta + 3 \cos^2 \xi \cos^2 \eta]^k \cos^2 \xi \cos^2 \eta d\xi d\eta$$

$$\lambda = \left(\frac{n}{m} \frac{b}{a} \right)^2$$

Значения интегралов J_1 и J_2 зависят лишь от отношений $\nu_1 = n/m$, $\nu_2 = a/b$ и показателя k . Табл. 1 представляет некоторые значения J_1 и J_2 для различных ν_1, ν_2, k .

Отметим следующие свойства этих интегралов, позволяющие расширить границы таблицы:

$$J(v_1, v_2) = J(v_2, v_1) = J(v_1^{-1}, v_2^{-1}), \quad J(v_1, v_1) = J(1, 1) \quad (3.5)$$

Таблица 1

(v_1, v_2)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,1/3)	(2,1/2)	(3,1/3)
$k=0,5$	J_1	2,107	3,435	5,221	2,601	10,59	7,01
	J_2	3,168	3,332	3,605	3,224	4,62	3,92
$k=0,25$	J_1	2,271	2,894	3,559	2,523	5,05	4,12
	J_2	2,771	2,852	2,971	2,80	3,34	3,09
$k=0,125$	J_1	2,365	2,668	2,956	2,492	3,52	3,18
	J_2	2,609	2,649	2,705	2,623	2,86	2,76

Ниже на основании уравнения (3.4) рассмотрены свободные и вынужденные колебания пластинки. Ради простоты исключим из рассмотрения осевое усилие $T_0(\lambda = 0)$. Учет этого фактора более уместен в вопросах потери и бифуркации устойчивостей ($\lambda < 0$), а также в параметрических колебаниях, при $\dot{\lambda} = \lambda(\tau)$.

Для свободных колебаний из (3.1) имеем

$$f'' + f + \gamma_0 (f')^k f + k_0 f^3 = 0 \quad (3.6)$$

Из этого уравнения следует, что учет влияния скорости деформирования в рамках принятой модели, в отличие от линейных моделей вязкоупругости, приводит к увеличению частоты свободных колебаний. Это следует из неотрицательности γ_0 , благодаря чему увеличивается жесткость системы. Кроме того, принятая модель приводит к рассеянию механической энергии. Действительно, из (3.6) следует

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} f'^2 + \frac{1}{2} f^2 + \frac{k_0}{4} f^4 \right) = -\gamma_0 (f')^k f f' \quad (3.7)$$

При нагружении $f f' > 0$, $\gamma_0 > 0$, а при разгрузке $f f' < 0$, $\gamma_0 = 0$, и в итоге правая часть (3.7) неположительна.

Для количественных оценок затухания и частоты колебаний применим асимптотические методы разделения переменных [4].

Приняв

$$f(\tau) = A(\tau) \cos(\tau + \varphi(\tau)), \quad f'(\tau) = -A(\tau) \sin(\tau + \varphi(\tau)) \quad (3.8)$$

и применив метод осреднения по периоду колебаний для медленно меняющихся функций $A(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\tau} &= -\frac{\gamma_0 A^{2k+1}}{2\pi(k+1)} \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \gamma_0 \frac{\Gamma(k+1,5) A^{2k}}{2\sqrt{\pi}(2k+1)\Gamma(k+2)} + \frac{3}{8} k_0 A^3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция.

Решив систему (3.9), получим законы изменения амплитуды и частоты свободных колебаний

$$\begin{aligned} \frac{A}{A_0} &= (1 + \beta \omega_0 t)^{-\frac{1}{2k}}, \quad \beta = \frac{\gamma_0 k A_0^{2k}}{\pi(k+1)}, \quad A_0 = A(0) \\ \frac{\omega}{\omega_0} &= 1 + \frac{\gamma_0 \Gamma(k+1,5) A_0^{2k}}{2\sqrt{\pi}(2k+1)\Gamma(k+2)(1 + \beta \omega_0 t)} + \frac{3}{8} k_0 A_0^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

В качестве примера рассмотрим квадратную пластинку со стороны a с показателем $k = 1/8$ и коэффициентом Пуассона $\nu_0 = 0,3$. Для главных колебаний ($m = n = 1$) из (3.10) получим

$$\frac{A}{A_0} = (1 + \delta t)^{-4}, \quad \delta = 0,27\alpha \left(R_\alpha A_0 \left(\frac{h}{a} \right)^7 \right)^{0,25}, \quad R_\alpha = \frac{c_0}{\alpha a}$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + 0,24 \left(R_\alpha A_0 \left(\frac{h}{a} \right)^7 \right)^{0,25} (1 + \delta t)^{-1} + \frac{9}{64} A^2 \quad (3.11)$$

Табл. 2 представляет числовые значения величины w_{\max}/h для квадратной пластинки, изготовленной из винипласта ($\alpha = 50 \text{ с}, R = 25/a, k = 1/8$) [2]. Принято $A_0 = 0,1$, т.е. $w_{\max}(0) = 0,1h$. Данные относятся к главным колебаниям.

Таблица 2

a	t_0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	4
	h/a							
	0,05	0,023	0,008	0,003	0,002	0,001		
1м	0,02	0,071	0,052	0,038	0,03	0,023	0,008	0,001
	0,01	0,09	0,082	0,074	0,067	0,06	0,04	0,18
	0,05	0,005	0,001					
0,5м	0,02	0,046	0,024	0,014	0,008	0,005	0,001	
	0,01	0,078	0,06	0,05	0,04	0,03	0,014	0,004

Как видно из таблицы, пластинки больших размеров при постоянстве h/a быстрее рассеивают механическую энергию. Это значит также, что для данной пластинки более высокие моды очень быстро будут затухать. Из таблицы следует также, что при прочих постоянных размерах колебания толстых пластинок затухают интенсивнее по сравнению с тонкими. Что же касается частот колебаний, то они претерпевают малые изменения со временем и практически мало отличаются от частот упругих пластинок, правда, оставаясь больше их.

Теперь рассмотрим вынужденные колебания пластинки при нормальной нагрузке, гармонической во времени.

Согласно уравнению (3.1), здесь имеем уравнение

$$f'' + f + \gamma_0 (f')^k f + k_0 f^3 = Q_0 \cos p\tau \quad (3.12)$$

Напомним, что $\gamma_0 = 0$ при $ff' < 0$ (разгрузка).

Если ввести расстройку частоты $\xi = p - 1$, то уравнение (3.12) примет вид

$$f'' + p^2 f = -\gamma_0 (f')^k f + \xi f - k_0 f^3 + Q_0 \cos p\tau \quad (3.13)$$

Для вынужденных колебаний решение будем искать в виде

$$f = A(\tau) \cos(p\tau - \varphi(\tau)), \quad f' = -pA(\tau) \sin(p\tau - \varphi(\tau)) \quad (3.14)$$

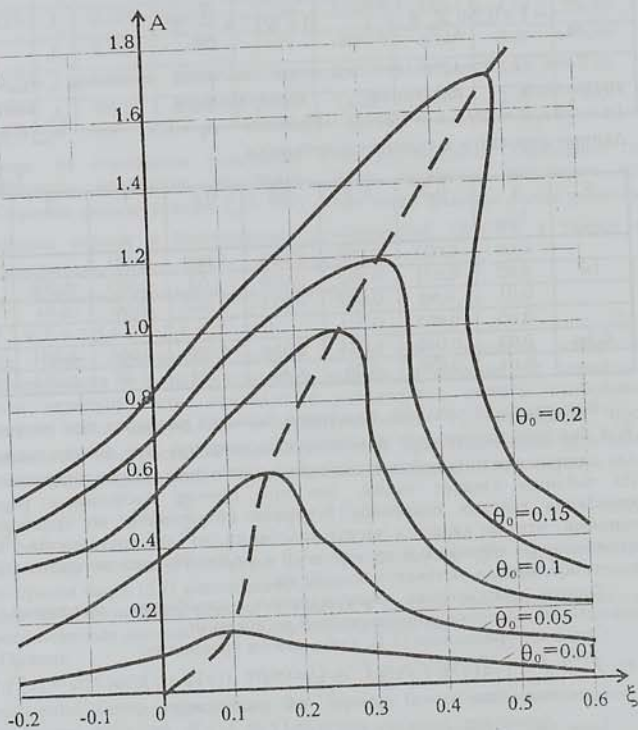
Применив метод разделения переменных и осреднив уравнения по периоду вынуждающей силы [4], для функций $A(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ получим уравнения

$$\frac{dA}{d\tau} = -\frac{\gamma_0 p^{2k+1} A^{2k+1}}{2\pi(k+1)} + \frac{Q_0 \sin \varphi}{2p}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{\gamma_0 p^{2k-1} A^{2k} \Gamma(k+0,5)}{4\sqrt{\pi} \Gamma(k+2)} + \frac{\xi}{2p} - \frac{3}{8p} k_0 A^2 - \frac{Q_0 \cos \varphi}{2Ap} \quad (3.15)$$

Представляют интерес стационарные колебания. Приравняв правые части (3.15) к нулю и исключив фазу φ , получим уравнение резонансных кривых, содержащее амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний:

$$\left[\frac{\gamma_0 p^{2k-1}}{2\pi(k+2)} \right]^2 + \left[\frac{\gamma_0 p^{2k-1} A^{2k+1} \Gamma(k+0,5)}{4\sqrt{\pi}\Gamma(k+2)} - \frac{\xi A}{2p} + \frac{3k_0 A^3}{8p} \right]^2 = \frac{Q_0^2}{4p^2} \quad (3.16)$$



Фиг. 1

Уравнение "скелетной" кривой имеет вид

$$\xi = \frac{\gamma_0 p^{2k} A^{2k} \Gamma(k+0,5)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(k+2)} + \frac{3}{4} k_0 A^2 \quad (3.17)$$

Нетрудно проверить, что эта кривая проходит через начало координат в плоскости (ξ, A) и касается в этой точке оси ξ при $2k < 1$. Этим она существенно отличается от кривой, построенной в рамках известных моделей линейной вязкоупругости.

Из (3.12) следует, что при малых A первое слагаемое превалирует над вторым, а при больших A - наоборот. Это означает, что в некоторой точке "скелетной" кривой происходит смена знака кривизны. Если резонансная кривая пересекает "скелетную" кривую ниже этой точки, то отсутствует явление бифуркации равновесия. При пересечении вышеуказанной точки появляются неустойчивые ветви и, как обычно, при плавном изменении

расстройки частоты, система вынужденно проскакивает зону неустойчивости.

Типичные кривые приведены на фиг. 1. Графики построены для квадратной пластинки из винипласта при $a = 1$ м, $h/a = 0,01$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. -М.: Наука, 1972.
2. Ambartsumyan S.A., Minassian M. M. On the model of bodies with their mechanical properties depending on the strain rate. -Int. J. Non-Linear Mech. 1986, v.21, №1.
3. Амбарцумян С.А., Минасян М.М. Об одной модели вязкоупругого тела. -МТТ, 1991, №4.
4. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Х.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. -М.: Наука, 1987.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
2.12.1996