

УДК 621.81

МЕТОД РАСЧЕТА ВИБРОПРОЧНОСТИ ВАЛОВ

Г.А. Аретемян

Հ.Ա. Արետեմյան

Լիսեռների վիբրոամրոյրյան հաշվարկի մեթոդ

Առաջարկված է լիսեռների հեծարանների առաջնային դիմադի մոդի մեքենաների ստրուկտուրային մակերևույթների վրա ազդող վիբրացիոն բեռների ազդեցության դեպքում, ստացված են անհրաժեշտ հաշվարկային կախվածություններ լիսեռների վիբրոամրոյրյան գնահատման համար:

H.L. Artemyan

Method of calculation of vibration firm of shaft

Предложена динамическая модель колебания опор валов при воздействии на внешнюю поверхность машин вибрационной нагрузки, получены необходимые расчетные соотношения для оценки вибропрочности валов.

1. Постановка задачи. Вибропрочность — это свойство машины противостоять действию вибрационных нагрузок и выполнять свое функциональное назначение с сохранением выходных параметров после воздействия этих нагрузок. Вал машины считается вибропрочным, если под действием вибрационной нагрузки максимальные напряжения в любом его сечении не превосходят предел упругости материала вала.

Известные экспериментальные методы оценки вибрационной прочности машин предусматривают их установку на вибростендах (в нерабочем состоянии машины) и реализацию длительного воздействия вибрационных нагрузок. Очевидно, что динамическая модель расчета вибропрочности машин, достоверность которой может быть оценена только экспериментально, должна учитывать эту специфику проведения испытаний на вибропрочность. Сложность задачи в том, что выбранная модель должна позволить определять параметры нагрузок, непосредственно воспринимаемых отдельными элементами машины (в том числе и вала), когда на внешнюю поверхность машины действует вполне определенная вибрационная нагрузка. Эта особенность искомой расчетной модели не позволяет однозначно применять известные методы расчета динамической прочности валов [1, 2, 3], в которых величины действующих на вал нагрузок предполагаются известными.

2. Выбор динамической модели. Как правило, опоры валов выполняются в виде конструктивных соединений различных деталей (станины, подшипники, упругие опоры и т.д.). Выбор эквивалентной схемы колебания вала при воздействии на внешнюю поверхность машины вибрационной нагрузки нами осуществляется исходя из соображений, что массивные детали опор вала обладают только инерционным свойством, а контактные поверхности их соединения — определенной упругостью и вязкостью. Предполагается также, что каждая масса может совершить только колебательное движение по линии действия внешнего возбуждения (т.е. обладает одной степенью свободы). Построенная на таких предположениях модель колебаний опор вала приведена на фиг. 1, где введены обозначения:

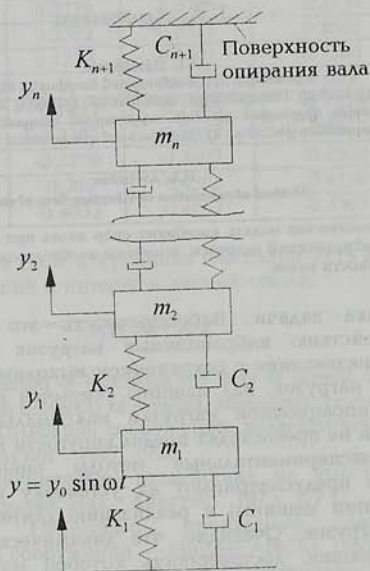
m_i — массы крупных деталей опор вала $i = 1, 2, \dots, n$.

K_i и C_i - коэффициенты жесткости и демпфирования контактных соединений массивных элементов опор вала, $i = 2, 3, \dots, (n+1)$,

K_1 и C_1 - соответственно коэффициенты жесткости и демпфирования элементов крепления машины,

$y = y_0 \sin \omega t$ - амплитуда вибросмещения действующей на внешнюю поверхность машины вибрационной нагрузки,

ω - угловая частота внешней вибрационной нагрузки.



Фиг.1 Модель колебания опор вала

3. Динамика опор вала. В соответствии с фиг. 1 колебания опор опишутся дифференциальными уравнениями:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1 (K_1 + K_2) - y_2 K_2 + \dot{y}_1 (C_1 + C_2) - C_2 \dot{y}_2 = K_1 y_0 \sin \omega t + C_1 y_0 \omega \cos \omega t$$

$$m_i \ddot{y}_i + y_i (K_i + K_{i+1}) - K_i y_{i-1} - K_{i+1} y_{i+1} + \dot{y}_i (C_i + C_{i+1}) - C_i \dot{y}_{i-1} - C_{i+1} \dot{y}_{i+1} = 0$$

$$i = 2, 3, \dots, (n-1)$$

$$m_n \ddot{y}_n + y_n (K_n + K_{n+1}) - K_n y_{n-1} + \dot{y}_n (C_n + C_{n+1}) - C_n \dot{y}_{n-1} = 0 \quad (1)$$

Частное решение системы (1), описывающее процесс вынужденных колебаний, ищем в виде

$$y_j = A_{2j-1} \sin \omega t + A_{2j} \cos \omega t, \quad \text{где } j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, получим систему уравнений, из которой определяются неизвестные постоянные A_{2j-1} и A_{2j} .

$$(-m_1 \omega^2 + K_2 + K_1) A_1 - (C_2 + C_1) \omega A_2 - K_2 A_3 + C_2 \omega A_4 = K_1 y_0$$

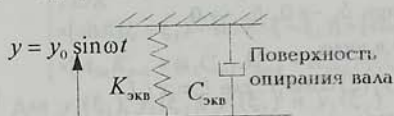
$$(C_2 + C_1) \omega A_1 + (-m_1 \omega^2 + K_2 + K_1) A_2 - C_2 \omega A_3 + K_2 A_4 = C_1 y_0 \omega$$

$$(-m_i \omega^2 + K_i + K_{i+1}) A_{2i-1} - K_i A_{2i-3} - K_{i+1} A_{2i+1} - (C_i + C_{i+1}) \omega A_{2i} + C_i \omega A_{2i-2} + C_{i+1} \omega A_{2i+2} = 0$$

$$\begin{aligned}
 &(-m_i \omega^2 + K_i + K_{i+1})A_{2i} - K_i A_{2i-2} - K_{i+1} A_{2i+2} + (C_i + C_{i+1})\omega A_{2i-1} - C_i \omega A_{2i+1} - C_{i+1} \omega A_{2i-1} = 0 \\
 &(-m_n \omega^2 + K_n + K_{n+1})A_{2n-1} - K_n A_{2n-3} - (C_n + C_{n+1})\omega A_{2n} + C_n \omega A_{2n-2} = 0 \\
 &(-m_n \omega^2 + K_n + K_{n+1})A_{2n} - K_n A_{2n-2} + (C_n + C_{n+1})\omega A_{2n-1} - C_n \omega A_{2n-3} = 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

Сила, действующая на поверхность опирания вала будет:

$$F_1 = K_{n+1}y_n + C_{n+1}\dot{y}_n = \sin \omega t (A_{2n-1}K_{n+1} - \omega A_{2n}C_{n+1}) + \cos \omega t (A_{2n}K_{n+1} + \omega A_{2n-1}C_{n+1}) \quad (4)$$



Фиг. 2 Эквивалентная система колебаний опор вала

С целью упрощения дальнейших математических выкладок и построения конечных решений при рассмотрении задачи колебания вала, представленную на фиг. 1 систему заменим эквивалентной системой

(фиг. 2). Тогда действующая на вал сила будет:

$$F_2 = K_{экр}y_0 \sin \omega t + \omega C_{экр}y_0 \cos \omega t \quad (5)$$

Условие необходимого равенства сил F_1 и F_2 приводит к системе для определения $K_{он}$ и $C_{он}$:

$$K_{экр}y_0 = A_{2n-1}K_{n+1} - \omega C_{n+1}A_{2n}$$

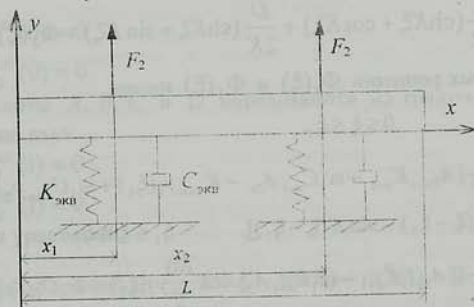
$$C_{экр}y_0\omega = A_{2n}K_{n+1} + \omega C_{n+1}A_{2n-1}$$

откуда

$$K_{экр} = \frac{A_{2n-1}K_{n+1} - \omega C_{n+1}A_{2n}}{y_0}$$

$$C_{экр} = \frac{A_{2n}K_{n+1} + \omega C_{n+1}A_{2n-1}}{y_0\omega} \quad (6)$$

4. Вибропрочность вала. Изгибные колебания вала описываются по схеме колебания балки постоянного сечения под действием сосредоточенных в двух точках сил (фиг. 3).



Фиг. 3 Схема колебания вала

Уравнение колебания вала с учетом только упругих и инерционных сил будет:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho F}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{EI} Q(x, t) \quad (7)$$

где I - момент инерции вала m^4 ; E - модуль упругости материала вала H/m^2 ; F - площадь поперечного сечения вала m^2 ; ρ - масса единицы объема $кг/m^3$; t - время, с.

$$Q(x, t) = \begin{cases} 0 - \text{во всех сечениях вала, кроме сечений } x=x_1 \text{ и } x=x_2 \\ F_2 - K_{\text{экр}} y(x, t) - C_{\text{экр}} \dot{y}(x, t), x \in [x_1, x_1 + \delta_1] \cup [x_2, x_2 + \delta_2] \end{cases}$$

Сосредоточенные силы $Q(x, t)$ рассматриваются как предельные положения сил, распределенных в интервалах $[x_1, x_1 + \delta_1]$ и $[x_2, x_2 + \delta_2]$ с интенсивностями q_1 и q_2 на единицу длины, при условии, что [3]

$$q_1 \delta_1 \rightarrow Q, \quad q_2 \delta_2 \rightarrow Q \quad \text{при } \delta_1 \rightarrow 0, \quad \delta_2 \rightarrow 0$$

Решение уравнения (7) ищем в виде:

$$y(\xi, t) = y_1(\xi) \sin \omega_1 t + y_2(\xi) \cos \omega_1 t, \quad \text{где } \xi = x/L \quad (8)$$

Тогда сила определится по формуле

$$Q(x, t) = [A_{2n-1} K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1} A_{2n} - K_{\text{он}} y_1(\xi) + \omega_1 C_{\text{он}} y_2(\xi)] \sin \omega_1 t + \\ + [A_{2n-1} K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1} A_{2n} - K_{\text{он}} y_2(\xi) - \omega_1 y_1(\xi)] \cos \omega_1 t \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в уравнение (7), получим два уравнения для определения $y_1(\xi)$ и $y_2(\xi)$:

$$y_1^{IV}(\xi) - K^4 y_1(\xi) = \frac{L^4}{EI} [A_{2n-1} K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1} A_{2n} - K_{\text{экр}} y_1(\xi) + \omega_1 C_{\text{экр}} y_2(\xi)]$$

$$y_2^{IV}(\xi) - K^4 y_2(\xi) = \frac{L^4}{EI} [A_{2n} K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1} A_{2n-1} - K_{\text{экр}} y_2(\xi) - \omega_1 C_{\text{экр}} y_1(\xi)] \quad (10)$$

$$\text{где } K^4 = \frac{\rho F \omega_1^2 L^4}{EI}$$

Решение системы (10) ищем в виде

$$y_1(\xi) = \frac{A}{2} (\text{ch} K \xi + \cos K \xi) + \frac{B}{2K} (\text{sh} K \xi + \sin K \xi) + \Phi_1(\xi) \\ y_2(\xi) = \frac{C}{2} (\text{ch} K \xi + \cos K \xi) + \frac{D}{2K} (\text{sh} K \xi + \sin K \xi) + \Phi_2(\xi) \quad (11)$$

Для частных решений $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\xi)$ имеем

$$\Phi_1(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq \xi_1 \\ \frac{L^3}{2EIK^3} [A_{2n-1} K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1} A_{2n} - K_{\text{экр}} y_1(\xi_1) + \omega_1 C_{\text{экр}} y_2(\xi_1)] \times \\ \times [\text{sh} K(\xi - \xi_1) - \sin K(\xi - \xi_1)], & \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \\ \frac{L^3}{2EIK^3} \{ [A_{2n-1} K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1} A_{2n} - K_{\text{экр}} y_1(\xi_1) + \omega_1 C_{\text{экр}} y_2(\xi_1)] \times \\ \times [\text{sh} K(\xi - \xi_1) - \sin K(\xi - \xi_1)] + [\text{sh} K(\xi - \xi_2) - \sin K(\xi - \xi_2)] \times \\ \times [A_{2n-1} K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1} A_{2n} - K_{\text{экр}} y_1(\xi_2) + \omega_1 C_{\text{экр}} y_2(\xi_2)] \}, & \xi_2 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (12)$$

где $\xi_1 = x_1 / L$; $\xi_2 = x_2 / L$

$$\Phi_2(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq \xi_1 \\ \frac{L^3}{2EIK^3} [A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1}A_{2n-1} - K_{\text{эKB}}y_2(\xi_1) - \omega_1 C_{\text{эKB}}y_1(\xi_1)] \times \\ \times [\text{sh}K(\xi - \xi_1) - \sin K(\xi - \xi_1)], & \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \\ \frac{L^3}{2EIK^3} \{ [A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1}A_{2n-1} - K_{\text{эKB}}y_2(\xi_1) - \omega_1 C_{\text{эKB}}y_1(\xi_1)] \times \\ \times [\text{sh}K(\xi - \xi_1) - \sin K(\xi - \xi_1)] + [\text{sh}K(\xi - \xi_2) - \sin K(\xi - \xi_2)] \times \\ \times [A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1}A_{2n-1} - K_{\text{эKB}}y_2(\xi_2) - \omega_1 C_{\text{эKB}}y_1(\xi_2)] \}, & \xi_2 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (13)$$

Для $y_1(\xi_1)$, $y_1(\xi_2)$, $y_2(\xi_1)$ и $y_2(\xi_2)$ имеем:

$$\begin{aligned} y_1(\xi_1) &= \frac{A}{2} (\text{ch}K\xi_1 + \cos K\xi_1) + \frac{B}{2K} (\text{sh}K\xi_1 - \sin K\xi_1) \\ y_1(\xi_2) &= \frac{A}{2} (\text{ch}K\xi_2 + \cos K\xi_2) + \frac{B}{2K} (\text{sh}K\xi_2 - \sin K\xi_2) + \\ &+ \frac{L^3}{2K^3 EI} [A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{\text{эKB}}y_1(\xi_1) + C_{\text{эKB}}y_2(\xi_1)] \times \\ &\times [\text{sh}K(\xi_2 - \xi_1) - \sin K(\xi_2 - \xi_1)] \\ y_2(\xi_1) &= \frac{C}{2} (\text{ch}K\xi_1 + \cos K\xi_1) + \frac{D}{2K} (\text{sh}K\xi_1 - \sin K\xi_1) \\ y_2(\xi_2) &= \frac{C}{2} (\text{ch}K\xi_2 + \cos K\xi_2) + \frac{D}{2K} (\text{sh}K\xi_2 - \sin K\xi_2) + \\ &+ \frac{L^3}{2K^3 EI} [A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{\text{эKB}}y_2(\xi_1) - \omega_1 C_{\text{эKB}}y_1(\xi_1)] \times \\ &\times [\text{sh}K(\xi_2 - \xi_1) - \sin K(\xi_2 - \xi_1)] \end{aligned} \quad (14)$$

Граничные условия на левом конце вала удовлетворятся тождественно:

$$y_1''(0) = y_1'''(0) = 0$$

$$y_2''(0) = y_2'''(0) = 0$$

Коэффициенты A , B , C и D определяются из граничных условий на правом конце вала:

$$y_1''(1) = y_1'''(1) = 0 \quad (15)$$

$$y_2''(1) = y_2'''(1) = 0$$

т.е. из системы уравнений

$$\frac{AK^2}{2} (\text{ch}K - \cos K) + \frac{BK}{2} (\text{sh}K - \sin K) + \Phi_1''(1) = 0$$

$$\frac{AK^3}{2} (\text{sh}K + \sin K) + \frac{BK^2}{2} (\text{ch}K - \cos K) + \Phi_1'''(1) = 0$$

$$\frac{CK^2}{2} (\text{ch}K - \cos K) + \frac{DK}{2} (\text{sh}K - \sin K) + \Phi_2''(1) = 0$$

$$\frac{CK^3}{2} (\text{sh}K + \sin K) + \frac{DK^2}{2} (\text{ch}K - \cos K) + \Phi_2'''(1) = 0 \quad (16)$$

где

$$\Phi_1''(1) = \frac{L^3}{2EIK} \{ [A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{\text{э.кв}}y_1(\xi_1) + \omega_1 C_{\text{э.кв}}y_2(\xi_1)] \times \\ \times [\text{sh}K(1-\xi_1) + \sin K(1-\xi_1)] + [\text{sh}K(1-\xi_2) + \sin K(1-\xi_2)] \times \\ \times [A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{\text{э.кв}}y_1(\xi_2) + \omega_1 C_{\text{э.кв}}y_2(\xi_2)] \} \\ \Phi_1'''(1) = \frac{L^3}{2EI} \{ [A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{\text{э.кв}}y_1(\xi_1) - \omega_1 C_{\text{э.кв}}y_2(\xi_1)] \times \\ \times [\text{ch}K(1-\xi_1) + \cos K(1-\xi_1)] + [\text{ch}K(1-\xi_2) - \cos K(1-\xi_2)] \times \\ \times [A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{\text{э.кв}}y_1(\xi_2) + \omega_1 C_{\text{э.кв}}y_2(\xi_2)] \} \\ \Phi_2''(1) = \frac{L^3}{2EIK} [A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1}A_{2n-1} - K_{\text{э.кв}}y_2(\xi_1) - \omega_1 C_{\text{э.кв}}y_1(\xi_1)] \times \\ \times [\text{sh}K(1-\xi_1) + \sin K(1-\xi_1)] \\ \Phi_2'''(1) = \frac{L^3}{2EI} \{ [A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1}A_{2n-1} - K_{\text{э.кв}}y_2(\xi_1) - \omega_1 C_{\text{э.кв}}y_1(\xi_1)] \times \\ \times [\text{ch}K(1-\xi_1) + \cos K(1-\xi_1)] + [\text{ch}K(1-\xi_2) + \cos K(1-\xi_2)] \times \\ \times [A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1}A_{2n-1} - K_{\text{э.кв}}y_2(\xi_2) - \omega_1 C_{\text{э.кв}}y_1(\xi_2)] \} \quad (17)$$

Максимальные напряжения в любом сечении вала определяются формулой

$$\sigma_{\max} = \frac{El}{W} \sqrt{[y_1''(\xi)]^2 + [y_2''(\xi)]^2} \quad (18)$$

где W - момент сопротивления сечения вала m^4 .

Сечение $\xi = \xi_0$ с наибольшим напряжением определяется из условия

$$y_1'''(\xi) + y_2'''(\xi) = 0 \quad (19)$$

Условие прочности будет

$$\sigma(\xi_0) < \frac{\sigma_y}{K_0} \quad (20)$$

где σ_y - предел пропорциональности материала вала, N/m^2 ; K_0 - коэффициент запаса прочности, который выбирается с учетом неточностей расчетного определения максимальных напряжений, неоднородностей материала вала, износа и старения опорных конструкций вала, технологических концентраторов напряжений: $K = 1,4 \div 3,0$.

Проверка предложенного метода расчета вибропрочности вала была осуществлена на электрических машинах типа АИ50В2. Для испытания на вибропрочность машины жестко установились на платформе вибростенда типа JMV (Япония) с широким диапазоном вариации частот и амплитуд вибрационных нагрузок. Испытания были проведены на трех машинах последовательно, при фиксированной нагрузке с частотой 100Гц и амплитудой ускорения 2000Н. Опора вала машины АИ50В2 из себя представляет трехмассовую систему (масса подшипника m_1 , подшипникового щита m_2 и корпуса m_3), соединенных между собой упруговязкими элементами, имитирующих прессовую посадку соединения вала с внутренним кольцом подшипника (K_2 и C_2), скользящие посадки наружного кольца подшипника с подшипниковым гнездом щита (K_3 и C_3), подшипникового щита и корпуса машины (K_4

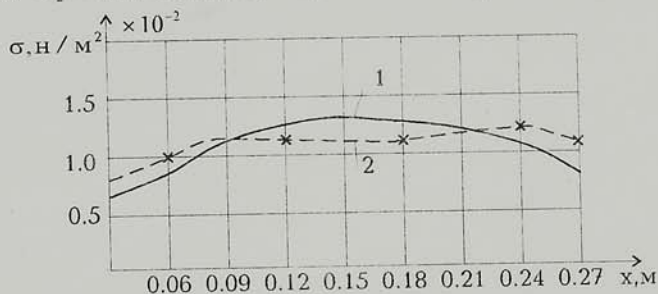
и C_4). На валу каждой испытуемой машины были наклеены проволочные тензодатчики для замера деформаций точек поверхности различных сечений вала. Измерения деформаций проводились прибором СИД-1. Испытания осуществлялись в нерабочем состоянии испытуемых машин.

Исходные данные для расчетной оценки напряженного состояния вала:

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2; I = 2 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4; F = 0,154 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2; m_1 = 0,028 \text{ кг}; m_2 = 0,125 \text{ кг};$$

$$m_3 = 2,75 \text{ кг}; K_1 = 0; K_2 = 0,432 \cdot 10^9 \text{ Н/м}; K_3 = 0,69 \cdot 10^9 \text{ Н/м}; K_4 = 0,13 \cdot 10^9 \text{ Н/м}$$

$$C_1 = 0; C_2 = 1,2 \text{ Н} \cdot \text{с еж/м}; C_3 = 0,156 \text{ Н} \cdot \text{с еж/м}; C_4 = 0,26 \text{ Н} \cdot \text{с еж/м}$$



Фиг. 4 Распределение максимального напряжения в сечении вала
1 — теоретическое, 2 — экспериментальное.

Сравнительные результаты экспериментов и теоретических расчетов, представленные на фиг. 4, свидетельствуют о достаточно высокой точности разработанного метода расчета вибропрочности вала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И.М. Теория колебаний.-М.: Наука, 1965.
2. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. -М.: Изд. АН СССР, 1969.
3. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем.-М.: Машиностроение, 1970

Военный институт МО РА

Поступила в редакцию
17.04.1996

