ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №3, 1998 Механика

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЕФОРМИРУЕМОГО МНОГОГРАННИКА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СЖАТОЙ ПЛАСТИНКИ, УСИЛЕННОЙ ПО КРАЯМ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ, ПРИ ЗАДАННОМ ЗНАЧЕНИИ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Погосян А.Г.

Ա.Գ. Պողոսյան

Դեֆորմացվող բազմանիստի մեթոդի կիրառումը, եզրերով կոշտության կողերով ուժեղացված, սեղմված ուղղանկյուն սալի օպտիմալ նախագծման խնդրում, սեփական տատանումների առաջին հաճախականության տրված արժեքի դեպքում

Աշխատանքում առաջարկվում է դեֆորմացվող բազմանիստի մեթոդի կիրառմամբ, ոչ գծային ծրագրավորման ալգորիթմ, բարակապատ կառուցվածքների օպտիմիզացիայի համար:

Ինչպես հայտնի է, դեֆորմացվող բազմանիստի մեթոդը կիրառվում է, առանց սահմանափակումների օպտիմիզացիայի խնդիրները լուծելիս:

Աշխատանքում առաջարկվող ալգորիթմը թույլ է տալիս դեֆորմացվող բազմանիստի մեթոդը կիրառել, հավասարության և անհավասարության տեսքով սահմանափակումների առկայության դեպքում:

Ալգորիթմի կիրառումը լուսաբանվում է եզրերով կոշտության կողերով ուժեղացված ուղղանկյուն սալի օպտիմալ նախագծման խնդրում, սեփական տատանումների առաջին հաճախականության տրված արժեքի դեպքում:

A.G. Pogosian

The Application of the Deforming Polyhedron Method in Case of the Given Value of the First frequency of Own Vibration in the Problem of Optimal Design of a Pressed rectangular Plate Strengthened at Sides by Rigid Edges

В работе предлагается алгоритм решения задачи нелинейного программирования при оптимизации тонкостенных конструкций с использованием метода деформируемого многогранника (МДМ).

Как известно, МДМ разработан для решения задач оптимизации без наличия ограничений [1]. Предлагаемый в работе алгоритм позволяет обобщать МДМ на случай наличия ограничений как в виде равенств, так и неравенств. Применение данного алгоритма иллюстрируется на примере решения задачи оптимального проектирования сжатой пластинки, усиленной по краям ребрами жесткости при заданном значении первой частоты собственных колебаний.

1. Задача нелинейного программирования в общей постановке формулируется следующим образом:

Найти

$$\min_x f(\bar{x}), \qquad \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при ограничениях

$$h_i(\bar{x}) = 0, \qquad i = 1,2,\ldots m$$

$$g_i(\bar{x}) \geq 0, \qquad i = m+1, m+2, \ldots q \tag{1}$$

Для использования МДМ к решению задачи (1) следует свести ее к задаче без наличия ограничений.

Исключение ограничений в виде равенств возможно, если решить их относительно m переменных и подставить в целевую функцию $f(\bar{x})$ и ограничения в виде неравенств. При этом нет необходимости получения аналитического выражения целевой функции путем непосредственной подстановки переменных из ограничений в виде равенств.

Во многих случаях это оказывается невозможным. Достаточно включить в программу вычислений численное решение систем уравнений $h_i(\bar{x}) = 0$ на каждом этапе поиска и подстановку переменных в целевую функцию и ограничения в виде неравенств. В этом случае задача сводится к следующей:

Найти

$$\min_x f(\bar{x}), \qquad \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \quad p = n - m$$

при ограничениях

$$g_i(\bar{x}) \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, q - m \tag{2}$$

Для исключения ограничений в виде неравенств вводится дополнительная функция

$$F(\bar{x}) = f(\bar{x}) \prod_{i=1}^{q-m} U_i$$

где

$$U_i = \{0 \text{ при } g_i(x) < 0; \; 1 \text{ при } g_i(x) \geq 0\}$$

Таким образом, функция $F(x)$ вне допускаемой области обращается в нуль и задача записывается в виде

Найти

$$\min_{\bar{x}} F(\bar{x}), \qquad \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \tag{3}$$

При использовании МДМ для минимизации функции $F(\bar{x})$ ограничения в виде неравенств будут удовлетворены, если при построении симплекса и его деформировании на каждом этапе потребовать, чтобы функция $F(\bar{x})$ была отлична от нуля, т.е. чтобы все вершины многогранника были допустимыми.

В случае, когда целевая функция является многоэкстремальной, оптимизация может закончиться в точке локального экстремума. В связи с этим предлагается сочетание МДМ с прямым поиском, которое заключается в сеточном разбиении области переменных и принятии внутренних допустимых узловых точек сетки в качестве стартовых для поиска методом деформируемого многогранника.

Из полученных экстремальных значений целевой функции минимальное будет принято в качестве глобального экстремума.

Такой подход приводит к увеличению числа операций при оптимизации, так как процедура минимизации будет повторяться по числу узловых точек сетки. Однако, это увеличивает вероятность достижения глобального экстремума.

Разбиение области переменных производится взаимно-перпендикулярными прямыми с равномерным шагом

$$\Delta_i = (l_i - l_i^0)/N_i$$

по каждому из переменных x_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Здесь l_i и l_i^0 - пределы изменения переменной x_i, N_i - число шагов в направлении x_i.

Таким образом, получается конечное множество внутренних узловых точек

$$\Omega = \left\{ \bar{x}_j^{(1)}(x_{1j}^{(1)}, x_{2j}^{(1)}, \ldots, x_{ij}^{(1)}, \ldots, x_{pj}^{(1)}), \quad j = 1, 2, \ldots, \prod_{i=1}^{p}(N_i - 1) \right\}$$

которые находятся на пересечениях прямых

$$x_i = l_i^0 + m\Delta_i, \quad m = 1,2,\ldots,N_i - 1, \quad i = 1,2,\ldots,p.$$

Те точки $\bar{x}_j^{(1)}$ множества Ω, которые являются допустимыми, т.е. удовлетворяют условию $F(\bar{x}) \neq 0$, принимаются в качестве стартовых при поиске по МДМ.

Все $p+1$ вершины симплекса, построенные известным способом [1], из начальной точки $\bar{x}_j^{(1)}$ проверяются на допустимость и, если какая-либо из них $\bar{x}_j^{(k)}$ является недопустимой, строится новая вершина многогранника путем переноса точки $\bar{x}_j^{(k)}$ на надлежащее расстояние вдоль прямой

$$\bar{x}_j = \bar{x}_j^{(k)} + \theta\left(\bar{x}_j^{(c)} - \bar{x}_j^{(k)}\right),$$

проходящей через центр тяжести $\bar{x}_j^{(c)}$ остальных вершин симплекса.

Соответствующим выбором коэффициента $\theta \in (0,1)$ новая вершина многогранника сдвигается к центру тяжести до тех пор, пока не станет допустимой. Далее производится процедура деформирования многогранника методом Нелдера-Мида [1] с включением на каждом этапе недопустимых вершин в допустимую область.

Таким образом, при деформировании многогранника проводятся последовательно две операции: включение вершин многогранника в допустимую область и исключение точек, где целевая функция достигает максимального значения. В результате поиска из множества стартовых точек, могут быть получены несколько экстремальных значений целевой функции. Минимальное из этих значений может быть принято в качестве решения поставленной задачи.

2. В качестве приложения предлагаемого алгоритма решается задача проектирования оптимальной прямоугольной сжатой пластинки, усиленной по краям ребрами жесткости, при заданном значении первой частоты собственных колебаний.

Рассматривается прямоугольная изотропная пластинка размерами $a \times b \times h$, отнесенная к системе координат $0xyz$, усиленная по двум свободным кромкам $x = \pm a/2$ ребрами жесткости размерами $\alpha h_1 \times h_1 \times b$, шарнирно опертая по другим, загруженным равномерно-распределенными сжимающими силами F краям $y = 0$ и $y = b$.

Ставится задача определения оптимальных геометрических параметров α, h_1, h_2, обеспечивающих при заданных габаритных размерах $\xi = (a + 2\alpha h_1)/b$, значениях силы F и частоты загруженных колебаний Ω, минимальный вес конструкции.

Уравнение собственных колебаний сжатой пластинки имеет вид [2]

$$D\Delta^2 w + \frac{F}{A} h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

где $D = Eh_2^3/12(1-\nu^2)$ - цилиндрическая жесткость пластинки, $A = 2\alpha h_1^2 + ah_2$ - площадь поперечного ($y = \text{const}$) сечения, ρ - плотность материала, $w(x,y,z)$ - функция прогибов, t - время.

Граничные условия запишутся в виде:

- шарнирного опирания

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{при} \quad y = 0, \ y = b \tag{5}$$

- симметрии (в случае симметричной формы колебаний)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0 \tag{6}$$

- антисимметрии (в случае антисимметричной формы колебаний)

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0 \tag{7}$$

- упругого опирания на ребро жесткости [3]:

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{F}{A}A_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho A_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)$$

$$C\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^3} = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \ \text{при} \ x = a/2 \tag{8}$$

Здесь C – жесткость прямоугольного ребра на кручение, определяемая по формуле [4].

$$C = \frac{E}{2(1+\nu)}\beta h_1^4, \qquad \beta = \alpha^3\left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5}\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}\operatorname{th}\frac{\pi n}{2\alpha}\right]$$

$EJ = E\alpha h_1^4/12$ – жесткость ребра на изгиб, $A = \alpha h_1^2$ – площадь поперечного сечения ребра.

Решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (5)-(7), принимается в виде:

- для симметричной формы колебаний

$$w = \left(C_1 \operatorname{ch}\mu_1\lambda_m x + C_2\cos\mu_2\lambda_m x\right)\sin\Omega t\sin\lambda_m y \tag{9}$$

- для антисимметричной формы колебаний

$$w = \left(C_1 \operatorname{sh}\mu_1\lambda_m x + C_2\sin\mu_2\lambda_m x\right)\sin\Omega t\sin\lambda_m y \tag{10}$$

где

$$\mu_1 = \sqrt{k_m + 1}, \quad \mu_2 = \sqrt{k_m - 1}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{b}$$

$$k_m^2 = \frac{h_2}{D\lambda_m^2}\left(\frac{F}{2\alpha h_1^2 + a h_2} + \frac{\rho}{\lambda_m^2}\Omega^2\right) \tag{11}$$

Удовлетворение граничных условий (8) приводит к однородной системе уравнений относительно коэффициентов C_1 и C_2.

Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к уравнению:

- для симметричной формы колебаний

$$H_1(x) = \mu_1\left[\left(\mu_1^2 + \nu\right)^2 - f_1 f_2\right]\operatorname{sh}\mu_1\frac{\lambda_m a}{2}\cos\mu_2\frac{\lambda_m a}{2} +$$

$$+\mu_2\left[\left(\mu_1^2 - \nu\right)^2 - f_1 f_2\right]\operatorname{ch}\mu_1\frac{\lambda_m a}{2}\sin\mu_2\frac{\lambda_m a}{2} + \mu_1\mu_2 f_1\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)\times \tag{12}$$

$$\times\operatorname{sh}\mu_1\frac{\lambda_m a}{2}\sin\mu_2\frac{\lambda_m a}{2} - f_2\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)\operatorname{ch}\mu_1\frac{\lambda_m a}{2}\cos\mu_2\frac{\lambda_m a}{2} = 0$$

где

$$f_1 = 6\beta m\pi(1-\nu)h_1^4/h_2^3 b$$

$$f_2 = \frac{m\pi\alpha h_1^2}{h_2 b}\left((1-\nu^2)h_1^2/h_2^2 - k_m^2\right)$$

- для антисимметричной формы уравнение получается из (12) заменой

$$\mathrm{sh}\mu_1\lambda_m\frac{a}{2} \text{ на } \mathrm{ch}\mu_1\lambda_m\frac{a}{2}, \ \sin\mu_2\lambda_m\frac{a}{2} \text{ на } \cos\mu_2\lambda_m\frac{a}{2}$$

$$\mathrm{ch}\mu_1\lambda_m\frac{a}{2} \text{ на } \mathrm{sh}\mu_1\lambda_m\frac{a}{2}, \ \cos\mu_2\lambda_m\frac{a}{2} \text{ на } \sin\mu_2\lambda_m\frac{a}{2}$$

Определение оптимальных параметров α, h_1, h_2, обеспечивающих минимальное значение веса конструкции, сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти

$$\min_x f(\bar{x}), \qquad \bar{x} = (\alpha, h_1, h_2) \tag{13}$$

где

$$f(\bar{x}) = \min_m A(\bar{x}) = \min_m(2\alpha h_1^2 + ah_2)$$

при ограничениях:

$$H_1(\bar{x}) = 0$$

$$H_2(\bar{x}) = (a + 2\alpha h_1)/b - \xi = 0$$

$$g_3(\bar{x}) = \alpha - 0.2 \geq 0$$

$$g_4(\bar{x}) = 5 - \alpha \geq 0$$

$$g_5(\bar{x}) = h_1 - h_2 \geq 0$$

$$g_6(\bar{x}) = 0.2b - h_1 \geq 0$$

$$g(\bar{x}) = h_2 - \delta \geq 0 \tag{14}$$

Ограничения (14) обусловлены пределами применимости классической теории балок и пластин. Для δ принимается $\delta = 0.01b$ при $a \geq b$, $\delta = 0.01a$ при $a < b$.

Вышеизложенным методом произведена численная реализация задачи при $\xi = (a + 2\alpha h_1)/b = 1$ для различных значений $\overline{\Omega} = \Omega b\sqrt{\rho/E} = 0.025;\ 0.05;\ 0.075;\ 0.1$ и $\overline{F}\cdot 10^4 = F/Eb^2 \cdot 10^4 = 0;\ 0.25;\ 0.5;\ 0.75;\ 1.0$. Полученные значения оптимальных параметров конструкции $\bar{h}_1 = h_1/b$, $\bar{h}_2 = h_2/b$ и соответствующих наименьших площадей (весов) $\overline{A} = A/b^2$ конструкции приведены в табл.1.

Там же, для сравнения, приведены соответствующие значения площадей поперечного сечения гладкой пластинки $\overline{A}_0$.

Как следует из табл. 1, оптимальное оребрирование пластинки при заданных значениях $\overline{\Omega}$ и $\overline{F}$ приводит к уменьшению веса конструкции почти в 2.5 раза.

Таблица 1

$\overline{\Omega}$	$\overline{F}\cdot 10^4$	α	$\overline{h}_1$	$\overline{h}_2$	$\overline{A}$	$\overline{A}_0$
0.025	0	0.2	0.0141	0.0018	0.00837	0.00192
	0.25	0.2	0.051	0.0119	0.03102	0.01276
	0.50	0.2	0.0629	0.0149	0.03873	0.01611
	0.75	0.2	0.0691	0.0171	0.04416	0.01860
	1.00	0.2	0.0757	0.0187	0.04851	0.02047
0.05	0	0.2	0.0259	0.0034	0.01675	0.00363
	0.25	0.2	0.0550	0.0120	0.03333	0.01303
	0.50	0.2	0.0644	0.0151	0.04056	0.01643
	0.75	0.2	0.0719	0.0171	0.04577	0.01877
	1.00	0.2	0.0769	0.0189	0.04997	0.02076
0.075	0	0.2	0.0373	0.0045	0.02513	0.00505
	0.25	0.2	0.0599	0.0123	0.03711	0.01353
	0.50	0.2	0.0686	0.0153	0.04360	0.01686
	0.75	0.2	0.0757	0.0173	0.04844	0.01914
	1.00	0.2	0.0804	0.0191	0.05239	0.02108
0.10	0	0.2	0.0468	0.0063	0.03351	0.00712
	0.25	0.2	0.0674	0.0124	0.04218	0.01396
	0.50	0.2	0.0736	0.0157	0.04777	0.01742
	0.75	0.2	0.0802	0.0176	0.05212	0.01964
	1.00	0.2	0.0846	0.0193	0.05576	0.02159

ЛИТЕРАТУРА

1. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. - М.: Мир, 1975. 532с.
2. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956. 600с.
3. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. - М.-Л.: Гостехиздат, 1946. 532с.
4. Лурье А.И. Теория упругости. - М.: Наука, 1979. 939с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
7.10.1996