

УДК 539.3

РАСЧЕТ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК  
В ГРУНТЕ

Новичков Ю.Н., Кахкцян В.М.

Յու.Ն. Նովիկով, Վ.Մ. Հաղբջյան  
Կոմպոզիցիոն նյութից զվանային բաղադրների հաշվարկը բնահողմ

Աշխատանքում դիտարկվում է բնահողմ տեղադրված զվանային բաղադրների հաշվարկի խնդիրներ: Ենթադրվում է, որ բաղադրը պատասխաված է կոմպոզիցիոն նյութից: Մտացվում են անիզոտրոպ բաղադրի հավասարակշռության հավասարումները ճշգրտված և դասական տեսությունների ինժան վրա: Ուրբի ճնշման դեպքում կատարվում են հաշվարկներ և վերլուծվում են բնահողի և ընդլայնված սահմանի հաշվառման առանձնահատկությունները բաղադրի վարքի վրա:

Yu.N. Novichkov, V.M. Kakhcjan  
Account of composite cylindrical shells in a ground

Рассматриваются вопросы расчета анизотропных цилиндрических оболочек в грунте. Получены уравнения равновесия на основе уточненной и классической теорий оболочек. Выполнены конкретные расчеты оболочек, изготовленных из композиционных материалов, и анализируются влияние грунта, учета поперечных сдвигов на поведение оболочки при вступлении давления.

1. Композиционные материалы, благодаря своим уникальным качествам, прошикли во все области народного хозяйства. Удивительно, что композиционные материалы практически не используются в подземных трубопроводах и подземных емкостях, типа различного рода хранилищ. Широко используются различные футерованные аппараты в химическом машиностроении для хранения агрессивных жидкостей. Кстати, грунтовая среда также агрессивна и приходится широко использовать антикоррозийную защиту как в магистральных трубопроводах, так и в емкостях для хранения продуктов. Существуют композиционные материалы, которые наряду с обеспечением надлежащей прочности, могут защитить конструкцию как от внешнего агрессивного воздействия, так и от агрессивности транспортируемого или хранимого продукта. Применение таких композиционных материалов для подобного рода конструкций является предпочтительным.

Теория деформирования и методы расчета конструкций из композиционных материалов, не взаимодействующих с грунтом, хорошо разработаны [1,2]. В то же время известны работы по расчету традиционных изотропных конструкций, взаимодействующих с грунтом [3,4,5]. В настоящей работе связываются эти два направления и рассматривается вопрос о деформировании и расчете на прочность цилиндрических оболочек (короткие оболочки – емкости для хранения, длинные – трубопроводы), изготовленных из анизотропного, в частном случае ортотропного материала.

При принятии гипотез уточненной теории [1] считается, что касательные напряжения  $\tau_{\beta\gamma}$  и  $\tau_{\alpha\gamma}$  по толщине оболочки меняются по заданному закону

$$\tau_{\beta\gamma} = f_2(\gamma)\psi(\alpha, \beta), \quad \tau_{\alpha\gamma} = f_1(\gamma)\phi(\alpha, \beta) \quad (1.1)$$

где в соответствии с законом изменения поперечных касательных напряжений в классической теории

$$f(\gamma) = f_1(\gamma) = f_2(\gamma) = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \gamma^2 \right) \quad (1.2)$$

а функции  $\varphi(\alpha, \beta)$ ,  $\psi(\alpha, \beta)$  подлежат определению. Здесь, приняв (1.1), фактически считается, что на оболочку не действует тангенциальная нагрузка.

При (1.1), поступая обычным образом и учитывая влияние внешней среды на основе гипотезы Вилклера об упругом основании, получается следующая разрешающая система пяти дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= 0, \quad L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = 0 \\ -\frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) + L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= Z \\ -L_{43}w + \frac{h^2}{10} (L_{44}\Phi_1 + L_{45}\Phi_2) &= \frac{h^3}{12} \varphi \\ -L_{53}w + \frac{h^2}{10} (L_{54}\Phi_1 + L_{55}\Phi_2) &= \frac{h^3}{12} \psi \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\Phi_1 = a_{35}\varphi + a_{45}\psi, \quad \Phi_2 = a_{44}\psi + a_{45}\varphi \quad (1.4)$$

Здесь введены следующие обозначения для дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \\ L_{22} &= C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \\ L_{12} = L_{21} &= C_{16} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \\ L_{13} = L_{31} &= \frac{1}{R} \left( C_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha} + C_{26} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \\ L_{23} = L_{32} &= \frac{1}{R} \left( C_{26} \frac{\partial}{\partial \alpha} + C_{22} \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \quad L_{33}^0 = \frac{1}{R^2} C_{22} + c \\ L_{43} &= D_{11} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + D_{26} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \\ L_{53} &= D_{16} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + 3D_{26} \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + D_{22} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \\ L_{44} &= D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \\ L_{55} &= D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \\ L_{45} = L_{54} &= D_{16} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Введя функцию усилий  $\Psi$  следующим образом:

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \beta^2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2}, \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha \partial \beta} \quad (1.6)$$

получим разрешающую систему четырех уравнений в смешанной форме

$$-\frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2} + c w = Z, \quad L_1 \Psi - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0$$

$$L_{43} w - \frac{h^2}{10} (L_{44} \Phi_1 + L_{45} \Phi_2) + \frac{h^3}{12} \varphi = 0 \quad (1.7)$$

$$L_{53} w - \frac{h^2}{10} (L_{45} \Phi_1 + L_{55} \Phi_2) + \frac{h^3}{12} \psi = 0$$

где наряду с (1.5) введен оператор

$$L_1 = A_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + (2A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} +$$

$$+ A_{11} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2A_{16} \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} - 2A_{26} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} \quad (1.8)$$

Уравнения классической теории в перемещениях получаются из (1.3), если четвертое уравнение проинтегрировать по  $\alpha$ , пятое проинтегрировать по  $\beta$  и результаты сложить с третьим уравнением, а затем устремить к нулю  $\varphi$  и  $\psi$ . В результате получается

$$L_{11} u + L_{12} v + L_{13} w = 0$$

$$L_{12} u + L_{22} v + L_{23} w = 0 \quad (1.9)$$

$$L_{13} u + L_{23} v + L_{33} w = Z$$

где все операторы, кроме  $L_{33}$ , совпадают с (1.5), а оператор  $L_{33}$  равен

$$L_{33} = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} +$$

$$+ 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \frac{1}{R^2} C_{22} + c \quad (1.10)$$

Приведем, наконец, разрешающие уравнения для классической технической теории

$$L_1 \Psi - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0, \quad \bar{L}_{33} w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2} = Z \quad (1.11)$$

где оператор  $L_1$  определен согласно (1.8), оператор  $L_{33}$  — согласно (1.10),

а

$$\bar{L}_{33} = L_{33} - \frac{1}{R^2} C_{22} \quad (1.12)$$

Одним из наиболее часто встречающихся случаев является случай ортотропной оболочки. Для этого случая величины

$$C_{16} = C_{26}, \quad D_{16} = D_{26} = 0, \quad a_{45} = 0$$

Значения операторов (1.5), (1.8) существенно упрощаются

$$L_{11} = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad L_{22} = C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$$

$$L_{12} = L_{21} = (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad L_{13} = L_{31} = \frac{1}{R} C_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha} \quad (1.13)$$

$$L_{23} = L_{32} = \frac{1}{R} C_{22} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad L_{43} = D_{11} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2}$$

$$L_{53} = (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + D_{22} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3}$$

$$L_{44} = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad L_{55} = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$$

$$L_{45} = L_{54} = (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}$$

$$L_{33} = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \frac{1}{R^2} C_{22} + c$$

В этом случае

$$\Phi_1 = a_{55} \varphi, \quad \Phi_2 = a_{44} \psi \quad (1.14)$$

Заметим, что и уравнения (1.11) также упрощаются, поскольку упрощается оператор  $L_1$  ( $A_{16} = A_{26} = 0$ )

$$L_1 = A_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + (A_{66} + 2A_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + A_{11} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \quad (1.15)$$

Переход к изотропному телу

$$E_1 = E_2 = E, \quad \nu_1 = \nu_2, \quad B_{11} = B_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad B_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, \quad B_{66} = G$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad A_{11} = A_{22} = \frac{1}{Eh}, \quad A_{12} = \frac{\nu}{Eh}, \quad A_{66} = \frac{1}{Gh(1 - \nu^2)}$$

приводит к известным уравнениям изотропных оболочек по классической и уточненной теориям.

Рассмотрим, наконец, случай осесимметричной деформации. В этом случае все переменные зависят только от координаты  $\alpha$ .

Как известно, разрешающие уравнения изотропных оболочек в этом случае разделяются. Выделяется случай кручения оболочки. В случае оболочки из композиционного анизотропного материала такого разделения в общем случае не происходит. Разделение происходит только тогда, когда для материала  $a_{45} = 0$ . В этом случае

$$\nu = 0, \quad \psi = 0 \quad (1.16)$$

Приведем значения операторов (1.5), (1.8), (1.10). Они имеют вид

$$L_{11} = C_{11} \frac{d^2}{d\alpha^2}, \quad L_{22} = C_{66} \frac{d^2}{d\alpha^2}, \quad L_{12} = L_{21} = L_{23} = L_{32} = L_{33} = 0$$

$$L_{43} = D_{11} \frac{d^3}{d\alpha^3}, \quad L_{13} = L_{31} = \frac{1}{R} C_{12} \frac{d}{d\alpha}, \quad L_{44} = D_{11} \frac{d^2}{d\alpha^2}$$

$$L_{55} = D_{66} \frac{d^2}{d\alpha^2}, \quad L_{33} = D_{11} \frac{d^4}{d\alpha^4} + \frac{1}{R^2} C_{22} + c \quad (1.17)$$

$$L_{45} = L_{53} = 0, \quad L_1 = A_{22} \frac{d^4}{d\alpha^4}$$

Уравнения в перемещениях, таким образом, примут вид (кручение исключается): для классической теории

$$C_{11} \frac{d^2 u}{d\alpha^2} + \frac{1}{R} C_{12} \frac{dw}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{1}{R} C_{12} \frac{du}{d\alpha} + D_{11} \frac{d^4 w}{d\alpha^4} + \frac{1}{R^2} C_{22} w + cw = Z \quad (1.18)$$

для уточненной теории

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{d^2 u}{d\alpha^2} + \frac{1}{R} C_{12} \frac{dw}{d\alpha} &= 0 \\ -\frac{h^3}{12} \frac{d\varphi}{d\alpha} + \frac{1}{R} C_{12} \frac{du}{d\alpha} + \frac{1}{R^2} C_{22} w + cw &= Z \\ -D_{11} \frac{d^3 w}{d\alpha^3} + \frac{h^2}{10} D_{11} a_{55} \frac{d^2 \varphi}{d\alpha^2} &= \frac{h^3}{12} \varphi \end{aligned} \quad (1.19)$$

Для технической теории имеем (кручение также исключается):  
для классической теории

$$A_{22} \frac{d^4 \Psi}{d\alpha^4} - \frac{1}{R} \frac{d^2 w}{d\alpha^2} = 0, \quad D_{11} \frac{d^4 w}{d\alpha^4} + cw + \frac{1}{R} \frac{d^2 \Psi}{d\alpha^2} = Z \quad (1.20)$$

для уточненной теории

$$\begin{aligned} A_{22} \frac{d^4 \Psi}{d\alpha^4} - \frac{1}{R} \frac{d^2 w}{d\alpha^2} &= 0 \\ -\frac{h^3}{12} \frac{d\varphi}{d\alpha} + \frac{1}{R} \frac{d^2 \Psi}{d\alpha^2} + cw &= Z \\ D_{11} \frac{d^3 w}{d\alpha^3} - \frac{h^2}{10} D_{11} a_{55} \frac{d^2 \varphi}{d\alpha^2} + \frac{h^3}{12} \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

2. Рассмотрим цилиндрический подземный бак, изготовленный из композиционного материала. Из внешних нагрузок учтем внутреннее давление  $p_0$ , давление грунта, которое в первом приближении можно считать линейным по глубине и равным

$$p_r = -\gamma_r \lambda (\alpha + H) \quad (2.1)$$

Здесь  $\gamma_r$  - удельный вес грунта.  $H$  - глубина заложения,  $\lambda$  - коэффициент давления грунта [3,4].

$$\lambda = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (2.2)$$

где  $\varphi_0$  - угол внутреннего трения грунта. Заметим, что внутреннее давление и давление грунта дают нагрузки противоположного знака, так что грунт является стабилизирующим фактором по отношению к давлению хранимого в баке (емкости) продукта.

Кроме того, учтем вес крышки и вышележащего над крышкой грунта, считая, что на уровне  $\alpha = 0$  действует сила  $p$ .

Напомним, что взаимодействие, как предполагается, осуществляется согласно модели Финклера с коэффициентом  $c$ , а в тангенциальном направлении взаимодействие отсутствует.

Будем считать, что имеет место осесимметричная деформация. Если использовать классическую теорию, то, исключая из (1.18) перемещение  $u$ , приходим к уравнению

$$\frac{d^4 w}{d\alpha^4} + 4m^4 w = \frac{Z}{D_{11}} \quad (2.3)$$

где

$$4m^4 = \frac{hE_2}{R^2 D_{11}} (1 + \bar{c}) = \frac{12\eta(1 - \nu_1 \nu_2)}{R^2 h^2} (1 + \bar{c}) \quad (2.4)$$

$$\bar{c} = \frac{R^2}{E_2 h} c \quad (2.5)$$

Из (2.4) видно, что наличие упругого основания как бы увеличивает кривизну оболочки.

Применение уточненной теории, после исключения из (1.19)  $u$ , приводит к уравнению

$$\frac{d^4 w}{d\alpha^4} - 2k^2 \frac{d^2 w}{d\alpha^2} + 4m^4 w = \frac{Z}{D_{11}} - k_0 \frac{d^2 Z}{d\alpha^2} \quad (2.6)$$

где кроме (2.4) введены обозначения

$$k^2 = 2k_0 m^4 D_{11}, \quad k_0 = \frac{1,2a_{ss}}{h} \quad (2.7)$$

Характеристические показатели для построения решения (2.3) имеют вид

$$\lambda_{1-4} = \pm m(1 \pm i) \quad (2.8)$$

Корни характеристического уравнения для уравнения (2.6) равны

$$\lambda_{1-4} = \pm a \pm bi \quad (2.9)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{2m^2 + k^2}{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{2m^2 - k^2}{2}} \quad (2.10)$$

При  $k = 0$ ,  $a = b = m$  имеем (2.8).

Общее решение (2.3) записывается в виде

$$w = C_1 e^{-m\alpha} \cos m\alpha + C_2 e^{-m\alpha} \sin m\alpha + C_3 e^{m\alpha} \cos m\alpha + C_4 e^{m\alpha} \sin m\alpha + w_* \quad (2.11)$$

где  $w_*$  - частное решение неоднородного уравнения (2.3).

Общее решение (2.6) имеет вид

$$w = B_1 e^{-a\alpha} \cos b\alpha + B_2 e^{-a\alpha} \sin b\alpha + B_3 e^{a\alpha} \cos b\alpha + B_4 e^{a\alpha} \sin b\alpha + w_{**} \quad (2.12)$$

где  $w_{**}$  - частное решение неоднородного уравнения (2.6).

Заметим, что при  $Z = \text{const}$  частные решения

$$w_* = w_{**} = Z/4m^4 D_{11} \text{ отвечают безмоментному решению.}$$

Сопоставление решений (2.11) и (2.12) показывает, что при применении уточненной теории краевые эффекты затухают несколько быстрее и имеют меньшую осцилляцию.

3. Пусть оболочка имеет радиус  $R = 3\text{м}$ . Рассмотрим два случая: тонкой оболочки  $h = 1\text{см}$  и оболочку толщиной  $h = 3; 10\text{см}$ .

Характеристики материала:  $E_1 = 1800\text{кН/см}^2$ ,  $E_2 = 4600\text{кН/см}$ , так что  $\eta = E_2/E_1 = 2,55$  (вообще будем варьировать параметр  $\eta$  в пределах от 0,1 до 100),  $\nu_{12} = \nu_2 = 0,2$ , тогда  $\nu_{21} = \nu_1 = 0,078$  [2] и  $\nu_1 \nu_2 = 0,0156$ . Для упругого основания примем данные, приведенные в [3] и будем рассматривать согласно (2.5)  $\bar{c} = 0$  (отсутствие грунта)

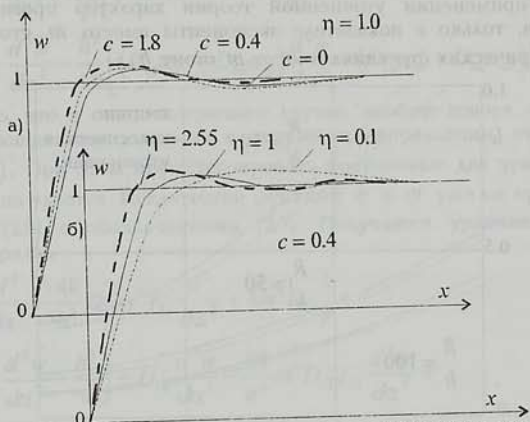
$$\bar{c} = 0,387 \text{ (засыпка с нормальным уплотнением вручную } \bar{c} = 2 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3} \text{)}$$

$$\bar{c} = 1,935 \text{ (плотные грунты, засыпка с механическим уплотнением)}$$

$$\bar{c} = 10 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3} \text{)}$$

На фиг. 1 показан характер изменения прогиба в зоне краевого эффекта и проиллюстрировано влияние жесткости основания  $c$  и параметра ортотропии  $\eta$  на эти зависимости. Краевой эффект быстрее

затухает и сильнее осциллирует при увеличении жесткости основания  $c$  и увеличении параметра  $\eta$ .



Фиг. 1 Влияние жесткости основания и ортотропии на прогиб

На этой фигуре  $\bar{w} = w/w_*$  и зависимости  $\bar{w}(\bar{x})$  построены для опертой оболочки, если при  $\alpha = 0$  выполняются условия

$$w = \frac{d^2 w}{d\alpha^2} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \quad (3.1)$$

Из (2.11) и (2.12) имеется:  
в случае применения классической теории

$$w = w_* [1 - e^{-m\alpha} \cos m\alpha] \quad (3.2)$$

и в случае применения уточненной теории

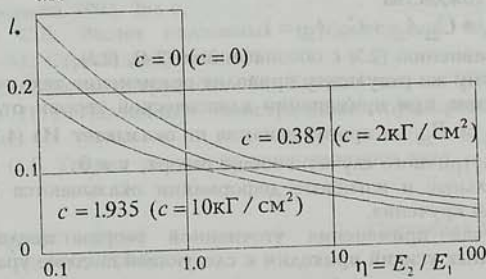
$$w = w_* \left[ 1 - e^{-a\alpha} \left( \cos b\alpha - \frac{a^2 - b^2}{2ab} \sin b\alpha \right) \right] \quad (3.3)$$

Длину зоны краевого эффекта можно оценить при 5% точности по формуле

$$\bar{l}_* = \frac{l_*}{R} = -\frac{1}{mR} \ln 0,05 \quad \text{для классической теории} \quad (3.4)$$

или

$$\bar{l}_* = \frac{l_*}{R} = -\frac{1}{aR} \ln 0,05 \quad \text{для уточненной теории} \quad (3.5)$$



Фиг. 2 Зависимость длины зоны краевого эффекта от ортотропии и жесткости основания

Зависимость длины зоны краевого эффекта для различных жесткостей упругого основания от параметра  $\eta$  показана на фиг. 2.

При применении уточненной теории характер прогиба (фиг. 1) сохраняется, только в показателе экспоненты вместо  $m$  стоит  $a$ , а в тригонометрических функциях вместо  $m$  стоит  $b$ .



Фиг. 3 Зависимость длины зоны краевого эффекта от относительной толщины оболочки и ортотропии

Сравнение длины зон краевых эффектов, полученных по классической теории, показано на фиг. 3. Видно, что различие между классической и уточненной теорией больше при уменьшении параметра  $\eta$  и увеличении относительной толщины  $h/R$ .

4. В заключении работы сделаем одно замечание. Выше при рассмотрении осесимметричной деформации предполагалось, что  $B_{16} = B_{26} = 0$  (следовательно,  $C_{16} = C_{26} = D_{16} = D_{26} = A_{16} = A_{26} = 0$ ). Откажемся от этого предположения. В случае осевой симметрии для классической теории придем к уравнениям в перемещениях

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{d^2 u}{d\alpha^2} + C_{16} \frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{1}{R} C_{12} \frac{dw}{d\alpha} &= 0 \\ C_{16} \frac{d^2 u}{d\alpha^2} + C_{66} \frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{1}{R} C_{26} \frac{dw}{d\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{R} C_{12} \frac{du}{d\alpha} + \frac{1}{R} C_{26} \frac{dv}{d\alpha} + D_{11} \frac{d^4 w}{d\alpha^4} + \frac{1}{R^2} C_{22} w + cw = Z$$

Интегрируя первые два уравнения один раз по  $\alpha$  и исключая  $u$  и  $v$  с учетом тождества

$$C_{12} A_{12} + C_{22} A_{22} + C_{26} A_{26} = 1 \quad (4.2)$$

придем к уравнению (2.3) с обозначением (2.4), (2.5).

К такому же результату приводит применение технической теории. Таким образом, при применении классической теории отличие от нуля величин  $B_{16}$  и  $B_{26}$  на прогиб влияния не оказывает. Из (4.1) следует, что для осесимметричного случая, вообще говоря,  $v \neq 0$ .

Продольные и изгибные деформации оказываются связанными с деформацией кручения.

В случае применения уточненной теории после исключения тангенциальных усилий приходим к следующей системе уравнений:

$$-\frac{h^3}{12} \frac{d\varphi}{d\alpha} = Z - 4m^4 D_{11} w \quad (4.3)$$



$$-\frac{h^3}{12}\varphi = D_{11}\frac{d^3w}{d\alpha^3} - \frac{h^2}{10}\left[(D_{11}a_{55} + D_{16}a_{45})\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + (D_{11}a_{45} + D_{16}a_{44})\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}\right]$$

$$-\frac{h^3}{12}\psi = D_{16}\frac{d^3w}{d\alpha^3} - \frac{h^2}{10}\left[(D_{16}a_{55} + D_{66}a_{45})\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + (D_{16}a_{45} + D_{66}a_{44})\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}\right] \quad (4.3)$$

откуда видно, что в осесимметричном случае, вообще говоря, функция, характеризующая угол поворота в окружном направлении, отлична от нуля ( $\psi \neq 0$ ). При этом проинтегрировать полученные два уравнения в общем виде не удастся. Исключение функций  $\varphi$  и  $\psi$  уже не приводит к уравнению (2.6) с обозначениями (2.7). Получается уравнение более высокого порядка

$$\left(D_{11}\frac{d^4}{d\alpha^4} - \frac{48}{h^3}D_{11}m^4f_{11}\frac{d^2}{d\alpha^2} + 4m^4D_{11}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{f_{22}}{f_{12}}\frac{d^2w}{d\alpha^2} - \frac{h^3}{w}\right) - D_{16}\frac{d^5w}{d\alpha^5} - \frac{48}{h^3}m^4D_{12}f_{21}\frac{d^3w}{d\alpha^3} = \quad (4.4)$$

$$= \left(\frac{f_{22}}{f_{12}}\frac{d^2}{d\alpha^2} - \frac{h^3}{12}\right)Z - f_{11}\frac{dZ}{d\alpha} + \frac{12}{h^3}\left(f_{21} - \frac{f_{11}f_{12}}{f_{12}}\right)\frac{d^3Z}{d\alpha^3}$$

где

$$f_{11} = \frac{h^2}{10}(D_{11}a_{55} + D_{16}a_{45}), \quad f_{21} = \frac{h^2}{10}(D_{16}a_{55} + D_{66}a_{45})$$

$$f_{12} = \frac{h^2}{10}(D_{11}a_{45} + D_{16}a_{44}), \quad f_{22} = \frac{h^2}{10}(D_{16}a_{45} + D_{66}a_{44})$$

Четыре корня характеристического уравнения для (4.4) совпадают с точностью до величины более высокого порядка малости с (2.9), приводящие к решениям уточненной теории для  $B_{16} = B_{26} = a_{45} = 0$ . Остальные корни дают решение, поправочные к этому случаю.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974. 448 с.
2. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. - М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
3. Виноградов С.В. Расчет подземных трубопроводов на внешние нагрузки. - М.: Стройиздат, 1980. 135 с.
4. Цыгович Н.А. Механика грунтов. - М.: Высшая школа, 1979. 272 с.
5. Бородавкин П.П. Подземные магистральные трубопроводы. - М.: Недра, 384 с.
6. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука, 1977. 415с.

Московский государственный  
университет природообустройства

Поступила в редакцию  
8.07.1996