ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №2, 1998 Механика

УДК 539.3

О ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Ананян А. К.

Ա.Կ. Անանյան
Սալի կայունության խնդրի մասին ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ

Դիտարկվում է իզոտրոպ ուղղանկյան սալի ստատիկ կայունության խնդիրը, բեռնավորված իր հարթությունում սեղմող ուժով: Սալի դիմային մակերևույթների վրա եզրային պայմանների ճշգրտումից հետո, ստացվել են սալի ստատիկ կայունության հավասարումները:

Լուծված է սալի ստատիկ կայունության խնդիրը երկու տարբեր եզրային պայմանների դեպքում:

Որոշված են կրիտիկական ուժերը և ճշված է տարբերությունը Ս.Ա. Համբարձումյանի տեսությամբ ստացված կրիտիկական ուժերից:

A.K. Ananian
On Stability Problem of a Plate Withe the Account of Transverse shears

Рассматривается задача статической устойчивости прямоугольной изотропной пластинки, загруженной в своей плоскости сжимающей силой. Путем уточнения условий на лицевых поверхностях [1] получены уравнения статической устойчивости пластинки.

Решена задача статической устойчивости пластинки с двумя вариантами граничных условий.

Определены критические силы и приведены оценки отличия их от критических сил, полученных по теории С. А. Амбарцумяна [2].

1. Рассмотрим задачу статической устойчивости прямоугольной изотропной пластинки постоянной толщины $2h$ с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν, загруженной в своей плоскости сжимающей силой σ_0. Начальное напряженное состояние следующее:

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_0 = \text{const}, \quad \sigma_{ij}^0 = 0 \qquad (\text{кроме } i = j = 1)$$

Пусть пластинка занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$.

Для решения этой задачи возьмем трехмерные уравнения упругости с учетом предварительного напряжения в простейшем виде [3,4]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} = 0 \quad (i = 1,2,3; \;\; j = 1,2,3) \tag{1.1}$$

В работе [1] получены нелинейные граничные условия на лицевых поверхностях пластинки. После линеаризации этих граничных условий с учетом начального напряжения получим

$$z = h: \;\; \sigma_{13} = \sigma_0 \frac{\partial u_3}{\partial x}, \sigma_{23} = 0, \sigma_{33} = 0$$
$$z = -h: \;\; \sigma_{13} = -\sigma_0 \frac{\partial u_3}{\partial x}, \sigma_{23} = 0, \sigma_{33} = 0 \tag{1.2}$$

Согласно теории С. А. Амбарцумяна, учитвающей поперечный сдвиг, из $\varepsilon_{33} = 0$ вытекает

$$u_3 = w(x, y)$$

В [2], согласно обозначениям этой статьи, принято

$$\sigma_{13} = 2G\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)\varphi(x, y)$$

что удовлетворяет условию равенства нулю напряжения при $z = \pm h$

Согласно (1.2) аналогичное выражение для σ_{13} будет

$$\sigma_{13} = \frac{z}{h}\sigma_0 \frac{\partial w}{\partial x} + 2G\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)\varphi(x,y)$$

откуда следует

$$\varepsilon_{13} = \frac{z}{2Gh}\sigma_0 \frac{\partial w}{\partial x} + \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)\varphi(x,y)$$

Выражения для σ_{23} и ε_{23} остаются такими же, как в [2]. В частности,

$$\varepsilon_{23} = \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)\psi(x,y)$$

Воспользуясь соотношениями между деформациями и перемещениями, получим

$$u_1 = u(x,y) - z\left(1 - \frac{\sigma_0}{2G}\frac{z}{h}\right)\frac{\partial w}{\partial x} + 2z\left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right)\varphi \tag{1.3}$$

$$u_2 = v(x,y) - z\frac{\partial w}{\partial y} + 2z\left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right)\psi \tag{1.4}$$

Перейдем к определению напряженного состояния. Подставляя значения деформации с учетом (1.3) и (1.4) в закон Гука, где пренебрегаем напряжением σ_{33}, для основных напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y} - z\left[\left(1 - \frac{\sigma_0}{2G}\frac{z}{h}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + 2z\left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \nu\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right\} \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x} - z\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\left(1 - \frac{\sigma_0}{2G}\frac{z}{h}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] + 2z\left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + \nu\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right\} \\
\sigma_{12} &= G\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z\left(2 - \frac{\sigma_0}{2G}\frac{z}{h}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + 2z\left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Получим уравнения равновесия пластинки в перемещениях. Поступая обычным образом, вместо напряжений введем в рассмотрение статически эквивалентные им внутренние, перерезывающие силы и моменты, выражения которых согласно (1.7) будут иметь вид:

$$\begin{gathered}
T_1 = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\sigma_0 h}{6G}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad T_2 = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\sigma_0 h}{6G}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\
S = 2Gh\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sigma_0 h}{6G}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right), \quad N_1 = \frac{8Gh}{3}\varphi, \qquad N_2 = \frac{8Gh}{3}\psi \\
M_1 = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{8}{5}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \nu\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right] \\
M_2 = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{8}{5}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + \nu\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right] \\
H = -(1-\nu)D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{4}{5}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Осредненные уравнения равновесия будут

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}+2h\sigma_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sigma_0\frac{\partial}{\partial x}\left(w+\frac{\sigma_0 h^2}{6G}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial y}+2h\sigma_0\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+2h\sigma_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-N_1-\frac{2\sigma_0 h^3}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{8}{5}\varphi\right)=0$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial x}-N_2-\frac{2\sigma_0 h^3}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{8}{5}\psi\right)=0$$

Подставляя внутренние, перерезывающие силы и моменты из (1.6) в (1.7),получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\sigma_0 h}{6G}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right)+$$

$$+2h\sigma_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sigma_0\frac{\partial}{\partial x}\left(w+\frac{\sigma_0 h^2}{6G}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0$$

$$\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\sigma_0 h}{6G}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)+2h\sigma_0\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{3\sigma_0}{4G}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{1.8}$$

$$\left(1+\frac{2\sigma_0 h^3}{3D}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-\frac{8}{5}\left(1+\underline{\underline{\frac{2\sigma_0 h^3}{3D}}}\right)\underline{\underline{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}}}-\frac{4}{5}(1-\nu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-$$

$$-\frac{4}{5}(1+\nu)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+\frac{8Gh}{3D}\varphi=0$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(1+\frac{2\sigma_0 h^3}{3D}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\frac{8}{5}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{4}{5}\left(1-\nu+\underline{\underline{\frac{4\sigma_0 h^3}{3D}}}\right)\underline{\underline{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}}-$$

$$-\frac{4}{5}(1+\nu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{8Gh}{3D}\psi=0$$

Система (1.8) отличается от обычно используемых уравнений с учетом поперечных сдвигов следующим:

1) Известно, что задача обобщенного плоского напряженного состояния и задача изгиба пластинки отделяются, а здесь задача изгиба отделяется от задачи обобщенного плоского состояния, но чтобы решить плоскую задачу, надо сперва решить задачу изгиба.

2) В уравнениях, полученных по теории С. А. Амбарцумяна, отсутствуют следующие дополнительные члены – подчеркнутые и произведения от σ_0 и производных функций $w(x,y)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ кроме соответствующего произведения в третьем уравнении. Указанный член из третьего уравнения является основным во всех теориях устойчивости пластин.

2. Рассмотрим задачу об устойчивости шарнирно опертой по всему контуру пластинки, загруженной в своей плоскости сжимающей силой, действующей лишь в одном направлении, в направлении оси OX.

Пусть интенсивность равномерно распределенной нагрузки равна P, то есть $\sigma_0=-P$. В этом случае три последних уравнения системы

(1.8) можно переписать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{3P}{4G}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\\
&-D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w+\frac{4(1-\nu)D}{5}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\underline{\frac{2Ph^3}{3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}}+\\
&+\frac{8Ph^3}{5(1-\nu)}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\underline{\underline{\frac{16Ph^3}{15}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}}}=\frac{8Gh}{3}\varphi\\
&-D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-\frac{4(1-\nu)D}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\underline{\frac{2Ph^3}{3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}}+\\
&+\frac{8Ph^3}{5(1-\nu)}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\underline{\underline{\frac{16Ph^3}{15}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}}=\frac{8Gh}{3}\psi
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $D=\dfrac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}$

Система (2.1) отличается от полученых уравнений по теории С. А. Амбарцумяна подчеркнутыми членами. И эти члены обусловлены уточнением условий на лицевых поверхностях пластинки.

Соответствующие граничные условия запишутся следующим образом:

$$
\begin{aligned}
x=0,a:&\quad w=0,\ M_1=0,\ \psi=0\\
y=0,a:&\quad w=0,\ M_2=0,\ \varphi=0
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

После введения новой вспомогательной функции $\Phi(x,y)$,которая связана с функциями $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ следующим образом:

$\Phi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, систему (2.1) можно переписать в виде:

$$
\begin{aligned}
&\Delta\Delta w-\frac{8h^3P}{5(1-\nu)D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta w+\frac{2Ph}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\underline{\frac{2Ph^3}{3D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta w}+\underline{\underline{\frac{4P^2h^3}{5GD}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}}}=0\\
&\Delta\Phi-\underline{\underline{\frac{2P(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}}}-\frac{5}{2h^2}\Phi=0
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Представим прогиб $w(x,y)$ выражением

$$
w(x,y)=f\sin\mu_m x\sin\lambda_n y
\tag{2.4}
$$

где $\mu_m=\dfrac{m\pi}{a}$, $\lambda_n=\dfrac{n\pi}{b}$, показывающие число полуволн m и n – натуральные числа, искривленной пластинки.

Подставляя (2.4) в первое уравнение (2.3), получим следующее квадратное уравнение относительно P:

$$
\frac{8h^3(1+\nu)}{5E}\mu_m^4P^2-2h\mu_m^2P\left[1+h^2\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)\right]+D\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)^2=0
\tag{2.5}
$$

где $\alpha=\dfrac{4}{5(1-\nu)}$

Решая уравнение (2.5), для критической силы получим следующее выражение:

$$P_{m,n} = P_{m,n}^0 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{h^2}{2}\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)\left(\mu_m^2 + \lambda_n^2\right) + \left[\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2} + \frac{h^2}{2}\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)\left(\mu_m^2 + \lambda_n^2\right)\right)^2 - \\ -\frac{h^4\alpha}{3}\left(\mu_m^2 + \lambda_n^2\right)^2 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-1} \tag{2.6}$$

где $P_{m,n}^0$ – критическая сила, найденная по классической теории

$$P_{m,n}^0 = \frac{D\left(\mu_m^2 + \lambda_n^2\right)^2}{2h\mu_m^2} \tag{2.7}$$

Из (2.6) видно, что отношение h^4/a^4 по сравнению с единицей – малая величина $\left(\frac{h^4}{a^4} << 1\right)$, и поэтому этим членом можно пренебречь, тогда получим

$$P_{m,n} = P_{m,n}^0 \left\{ 1 + h^2\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)\left(\mu_m^2 + \lambda_n^2\right) \right\}^{-1} \tag{2.8}$$

Решая эту задачу по теории С. А. Амбарцумяна, для критической силы получается

$$P_{m,n}^* = P_{m,n}^0 \left\{ 1 + h^2\alpha\left(\mu_m^2 + \lambda_n^2\right) \right\}^{-1} \tag{2.9}$$

Сравнивая эти два решения, можно подсчитать поправку в процентном отношении, второго члена, стоящего в скобках, когда $\nu = 0$ и $\nu = 1/2$. При $\nu = 0$ поправка второго члена приблизительно равна 40%, а при $\nu = 1/2$ поправка приблизительно составляет 20%.

3. Решим предыдущую задачу при других граничных условиях на краях $y = \text{const}$. Пусть на краях $x = \text{const}$ даны граничные условия шарнирного опирания, а на краях $y = \text{const}$ даны граничные условия скользящего контакта.

$$\begin{aligned} &x = 0, a: \quad w = 0, \ M_1 = 0, \ \psi = 0 \\ &y = 0, a: \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \ N_2 = 0, \ H = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Если в (2.6) пренебречь членом h^4/a^4, то отсюда следует, что в формулах (1.8), (2.1) и (2.3) можно пренебрегать членами, подчеркнутыми двумя линиями. Тогда система (2.3) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\Delta\Delta w - \frac{8h^3P}{5(1-\nu)D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta w + \frac{2Ph}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2Ph^3}{3D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta w = 0 \\ &\Delta\Phi - \frac{5}{2h^2}\Phi = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

А (3.1) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &x = 0, a: \ w = 0, \ \frac{4h^2}{5(1-\nu)}\left[1 - \frac{P(1-\nu^2)}{E}\left(1 + \frac{12}{5(1-\nu)}\right)\right]\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\ &+ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{16h^2}{25}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = 0, \ \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$y=0,b:\ \frac{\partial w}{\partial y}=0,\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{4}{5}(1-\nu)\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0,\ \Phi-\frac{4h^2}{5}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0$$

где обобщенная перерезывающая сила и крутящий момент выражены через искомые функции $w(x,y)$ и $\Phi(x,y)$.

Полагая функцию прогиба

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty} f_m(y)\sin\mu_m x \tag{3.4}$$

и функцию

$$\Phi(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\Phi_m(y)\cos\mu_m x \tag{3.5}$$

граничные условия, написанные с помощью функций $f_m(y)$ и $\Phi_m(y)$, на краях $y=\text{const}$, будут

$$y=0,b:\ f_m'(y)=0,\ f_m'''(y)=0,\ \Phi_m(y)=0 \tag{3.6}$$

Из (3.6) вытекает, что $f_m(y)$ можно представить в виде следующего ряда:

$$f_m(y)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos\lambda_n y \tag{3.7}$$

Тогда функцию прогиба из (3.7) и (3.4) можно представить в следующем виде:

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_n\sin\mu_m x\cos\lambda_n y \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в первое уравнение (3.2), найденная критическая сила будет равна

$$P_{m,n}=P_{m,n}^0\left\{1+h^2\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)\right\}^{-1} \tag{3.9}$$

Таким образом, формула (3.9) может дать все значения $P_{m,n}$, соответствующие всевозможным комбинациям значений m и n $(m=1,2,3\ldots,\ n=1,2,3\ldots)$. Как мы знаем, из всех значений $P_{m,n}$ мы должны выбрать наименьшее. После подсчетов получено, что $P_{m,n}$ становится наименьшим, когда $m=1,n=0$, то есть

$$P_{1,0}=\frac{D\pi^2}{2ha^2}\left\{1+\frac{\pi^2}{a^2}h^2\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)\right\}^{-1} \tag{3.10}$$

Как и в предыдущем случае, отличие от результата по теории С.А.Амбарцумяна заключается в наличии дополнительного слагаемого $(1/3)$ в выражении (3.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В., Саркисян С.В. Об одном уточнении уравнений нелинейных колебаний пластин. – ЕГУ, Уч. записки 1, 1992, с. 41-46.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1987. 360 с.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
4. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т. 1,2. – Киев: Наукова думка, 1986.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
1.07.1996