

УДК 539.3

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ  
 ЗАДАЧ ДВУХСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН  
 ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**

**Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Хачатрян Г.Г.**

Լ.Ա. Աղալովյան, Ռ.Ս. Գևորգյան, Գ.Գ. Խաչատրյան

Փոփոխական հաստության երկշերտ անիզոտրոպ սալերի խառը եզրային խնդիրների ասիմպտոտիկ լուծումը

Սիմպոտոտիկ եղանակով լուծված են փոփոխական հաստության երկշերտ անիզոտրոպ սալերի խառը եզրային խնդիրներ, երբ երեսնային մակերևույթներից մեկի վրա սրված են կինեմատիկական պայմաններ, իսկ հակադիր երեսնային մակերևույթի վրա սրված են առանգատկանության տեսության ինդիքների առաջին, երկրորդ և խառը եզրային պայմաններ: Արտածված են սկզբնական բաժանման լարմաների և տեղափոխումների դաշտերի կոմպոնենտների համար: Արտածված բաժանման կիրառությունը լուսարձակում է գործնական նշանակության մեկ խնդրի լուծման հետազոտությունը:

L.A. Aghalovian, R.S. Gevorgian, G.G. Khachatryan

**On Asymptotic Solution of Mixed Boundary Problems of Bilayered Anisotropic Plates with Variable Thickness**

В работе асимптотическим методом решаются краевые задачи для двухслойных анизотропных пластин переменной толщины, когда на одной из лицевых поверхностей заданы компоненты вектора перемещения, а на противоположной — условия первой, второй или смешанной краевых задач теории упругости. Выведены рекуррентные формулы для определены напряжений и перемещений. В качестве приложения приведено решение одной прикладной задачи с векторным его анализом.

1. Имеем анизотропную двухслойную пластину переменной толщины, которая в триортогональной системе координат  $\alpha, \beta, \gamma$  занимает область  $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma: -\varphi_2(\alpha, \beta) \leq \gamma \leq \varphi_1(\alpha, \beta); \alpha, \beta \in \Sigma_0, h \ll a\}$ , где  $\alpha, \beta$  — совпадающие с главными направлениями анизотропии криволинейные координатные линии в плоскости  $\Sigma_0$ , проходящей внутри пластины и не пересекающейся с достаточно гладкими лицевыми поверхностями  $\gamma = \varphi_1(\alpha, \beta) > 0$ ,  $\gamma = -\varphi_2(\alpha, \beta) < 0$ ;  $\gamma$  — прямолинейная координатная ось, проведенная в точке  $\alpha, \beta$  перпендикулярно к этой плоскости,  $h = \max\{\sup(\varphi_1 - \varphi_0), \sup(\varphi_0 + \varphi_2)\}$ ,  $a$  — характерный тангенциальный размер пластины. Поверхность раздела слоев задана гладкой функцией  $\gamma = \varphi_0(\alpha, \beta)$ , которая удовлетворяет условию (фиг. 1)

$$-\varphi_2(\alpha, \beta) < \varphi_0(\alpha, \beta) < \varphi_1(\alpha, \beta) \quad (1.1)$$

Требуется определить напряженно-деформированное состояние пластины, если на лицевой поверхности  $\gamma = -\varphi_2(\alpha, \beta)$  заданы компоненты вектора перемещения

$$u_j(-\varphi_2) = u_j^-(\alpha, \beta) \quad j = \alpha, \beta, \gamma \quad (1.2)$$

а на противоположной лицевой поверхности  $\gamma = \varphi_1(\alpha, \beta)$  задана одна из следующих комбинаций граничных условий теории упругости:

$$a) \sigma_{j\alpha}(\varphi_1) \cos(n, \alpha) + \sigma_{j\beta}(\varphi_1) \cos(n, \beta) + \sigma_{j\gamma}(\varphi_1) \cos(n, \gamma) = F_j \quad (1.3)$$

$$j = \alpha, \beta, \gamma$$

$$\text{б) } u_j(\varphi_1) = u_j^+(\alpha, \beta) \quad j = \alpha, \beta, \gamma \quad (1.4)$$

$$\text{в) } \sigma_{j\alpha}(\varphi_1) \cos(n, \alpha) + \sigma_{j\beta}(\varphi_1) \cos(n, \beta) + \sigma_{j\gamma}(\varphi_1) \cos(n, \gamma) = F_j \quad (1.5)$$

$$j = \alpha, \beta, \quad u_\gamma(\varphi_1) = u_\gamma^+(\alpha, \beta)$$

$$\text{г) } u_j(\varphi_1) = u_j^+(\alpha, \beta) \quad j = \alpha, \beta \quad (1.6)$$

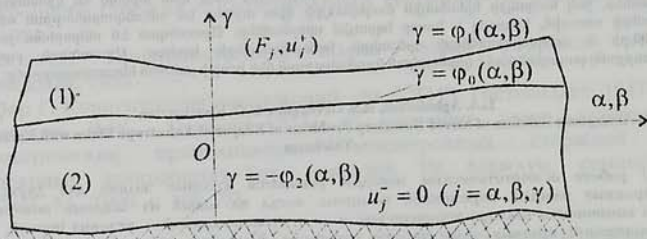
$$\sigma_{\alpha\gamma}(\varphi_1) \cos(n, \alpha) + \sigma_{\beta\gamma}(\varphi_1) \cos(n, \beta) + \sigma_{\gamma\gamma}(\varphi_1) \cos(n, \gamma) = F_\gamma$$

где  $F_j(\alpha, \beta)$ ,  $u_j^+(\alpha, \beta)$   $j = \alpha, \beta, \gamma$  — заданные достаточно гладкие функции.

$$\cos(n, \alpha) = -\frac{1}{\lambda A} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \quad (\alpha, \beta; A, B)$$

$$\cos(n, \gamma) = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta}\right)^2}$$

$A, B$  — коэффициенты Ламе первой квадратичной формы.



Фиг. 1

Считается, что на пластину действуют также объемные силы с компонентами  $P_j^{(i)}(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $j = \alpha, \beta, \gamma$  и температурное поле, которое учитывается по модели Дюгамеля-Неймана. Здесь и в дальнейшем всем величинам, относящимся к слою  $\varphi_0(\alpha, \beta) \leq \gamma \leq \varphi_1(\alpha, \beta)$ , приписывается индекс  $i = 1$ , а величинам слоя  $-\varphi_2(\alpha, \beta) \leq \gamma \leq \varphi_0(\alpha, \beta)$  — индекс  $i = 2$ .

На боковой поверхности  $\delta\Omega$  пластины могут быть заданы произвольные граничные условия теории упругости. В указанных задачах условия на боковой поверхности существенно не влияют на внутреннее напряженно-деформированное состояние, ими обусловлен пограничный слой.

На поверхности раздела слоев  $\gamma = \varphi_0(\alpha, \beta)$  напряжения и перемещения должны удовлетворять условиям полного контакта слоев:

$$\left(\sigma_{j\alpha}^{(1)}(\gamma = \varphi_0) - \sigma_{j\alpha}^{(2)}(\gamma = \varphi_0)\right)\Psi_{\alpha\alpha} + \left(\sigma_{j\beta}^{(1)}(\gamma = \varphi_0) - \sigma_{j\beta}^{(2)}(\gamma = \varphi_0)\right)\Psi_{\alpha\beta} + \sigma_{j\gamma}^{(1)}(\gamma = \varphi_0) - \sigma_{j\gamma}^{(2)}(\gamma = \varphi_0) = 0, \quad u_j^{(1)}(\gamma = \varphi_0) = u_j^{(2)}(\gamma = \varphi_0), \quad j = \alpha, \beta, \gamma \quad (1.7)$$

$$\Psi_{\alpha\alpha} = -\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_0(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}, \quad \Psi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_0(\alpha, \beta)}{\partial \beta}$$

Для решения поставленной краевой задачи в уравнениях равновесия с учетом объемных сил и уравнениях состояния анизотропного тела с учетом температурных деформаций каждого слоя [1] перейдем к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$\xi = \alpha/a, \quad \eta = \beta/a, \quad \zeta = \gamma/h = \varepsilon^{-1} \gamma/a, \quad \varepsilon = h/a \quad (1.8)$$

$$u_{\alpha}^{(i)} = au^{(i)}, \quad u_{\beta}^{(i)} = a v^{(i)}, \quad u_{\gamma}^{(i)} = a w^{(i)} \quad i = 1, 2$$

В результате получим следующую сингулярно-возмущенную малым параметром  $\varepsilon$  систему уравнений пространственной задачи теории упругости:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{1}{B} \frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{(i)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)}}{\partial \zeta} + a(\sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} - \sigma_{\beta\beta}^{(i)}) k_{\beta} + \\ + 2ak_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} + aP_{\alpha}^{(i)} = 0 \quad (\alpha, \beta; \xi, \eta) \\ \frac{1}{A} \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{1}{B} \frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{(i)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{\eta\eta}^{(i)}}{\partial \zeta} + a(k_{\beta} \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)} + k_{\alpha} \sigma_{\beta\gamma}^{(i)}) + aP_{\gamma}^{(i)} = 0 \\ \frac{1}{A} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \xi} + ak_{\alpha} v^{(i)} = a_{11}^{(i)} \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} + a_{12}^{(i)} \sigma_{\beta\beta}^{(i)} + a_{13}^{(i)} \sigma_{\eta\eta}^{(i)} + a_{14}^{(i)} \sigma_{\beta\gamma}^{(i)} + \\ + a_{15}^{(i)} \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)} + a_{16}^{(i)} \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} + \alpha_{11}^{(i)} \theta^{(i)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

( $\alpha, \beta; \xi, \eta; u, v; 1, 2; A, B$ )

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \zeta} = a_{13}^{(i)} \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} + a_{23}^{(i)} \sigma_{\beta\beta}^{(i)} + a_{33}^{(i)} \sigma_{\eta\eta}^{(i)} + \dots + a_{36}^{(i)} \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} + \alpha_{33}^{(i)} \theta^{(i)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \eta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \xi} - a(k_{\alpha} u^{(i)} + k_{\beta} v^{(i)}) = \\ = a_{16}^{(i)} \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} + a_{26}^{(i)} \sigma_{\beta\beta}^{(i)} + \dots + a_{66}^{(i)} \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} + \alpha_{12}^{(i)} \theta^{(i)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \zeta} = a_{15}^{(i)} \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} + a_{25}^{(i)} \sigma_{\beta\beta}^{(i)} + \dots + a_{56}^{(i)} \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} + \alpha_{13}^{(i)} \theta^{(i)}$$

$$(\alpha, \beta; \xi, \eta; u, v; A, B; 5, 4; 13, 23)$$

где  $a_{jk}$  — коэффициенты упругой податливости анизотропного тела,

$\alpha_{jk}$  — коэффициенты теплового расширения,  $\theta^{(i)} = T^{(i)} - T_0^{(i)}$  — приращение температуры пластины.

В (1.9) не введена изменяемость по координатам, поскольку решение поставленных краевых задач получаются в виде окончательных расчетных формул, откуда будет следовать, что на общую оценку остаточного члена вместе с изменяемостью функций, входящих в граничные условия, влияют также физико-механические постоянные слоев и их комбинации.

Решение системы (1.9) складывается из решений внутренней задачи и пограничного слоя. Решение внутренней задачи ищем в виде асимптотического разложения [2-5]

$$Q_j^{(i)} = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{\chi_j + s} Q_j^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (1.10)$$

где  $Q_j^{(i)}$  — любая из искомым величин,  $\chi_{\sigma} = -1$  для напряжений и  $\chi_u = 0$  для перемещений. При этом, для того, чтобы вклад объемных сил и температурного поля был соизмерим со вкладом поверхностных сил, необходимо, чтобы они имели асимптотические представления вида

$$P_j^{(i)} = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{-2+s} a^{-1} P_j^{(i,s)}, \quad \theta^{(i)} = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{-1+s} \theta^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (1.11)$$

откуда следует, что объемные силы должны иметь достаточно большую интенсивность. Видимо, по этой причине во многих расчетах пластин и оболочек пренебрегают этими силами.

Подставив (1.10), (1.11) в (1.9), методом Пуанкаре получим систему разрешающих уравнений относительно  $Q_j^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta)$ . Решив эту систему, для искоемых величин каждого слоя получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma l}^{(i,s)} &= \sigma_{\gamma 0}^{(i,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{\gamma l}^{(i,s)*}(\xi, \eta, \zeta) \quad j = \alpha, \beta, \gamma \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{(i,s)} &= A_{13}^{(i)} \sigma_{\gamma 0}^{(i,s)} + A_{14}^{(i)} \sigma_{\beta\gamma 0}^{(i,s)} + A_{15}^{(i)} \sigma_{\alpha\gamma 0}^{(i,s)} + \sigma_{\alpha\alpha}^{(i,s)*}(\xi, \eta, \zeta) \\ &(\alpha\alpha, \beta\beta, \alpha\beta; A_{1l}, A_{2l}, A_{6l}, l = 3, 4, 5) \\ u^{(i,s)} &= \zeta \left( A_{53}^{(i)} \sigma_{\gamma 0}^{(i,s)} + A_{54}^{(i)} \sigma_{\beta\gamma 0}^{(i,s)} + A_{55}^{(i)} \sigma_{\alpha\gamma 0}^{(i,s)} \right) + u_0^{(i,s)}(\xi, \eta) + u_*^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ &(u, v, w; A_{5l}, A_{4l}, A_{3l}, l = 3, 4, 5) \\ A_{kl} &= -a_{1l} B_{k1} - a_{2l} B_{k2} - a_{6l} B_{k6} \\ A_{pl} &= a_{p1} A_{1l} + a_{p2} A_{2l} + a_{p6} A_{6l} + a_{pl} \\ A_{pl} &\neq A_{lp}, \quad p, l = 3, 4, 5 \\ B_{mn} &= (a_{mk} a_{kn} - a_{mn} a_{kk}) / \Delta, \quad B_{mn} = B_{nm} \\ B_{kk} &= (a_{mm} a_{nn} - a_{mn}^2) / \Delta, \quad m \neq n \neq k \neq m \quad m, n, k = 1, 2, 6 \\ \Delta &= a_{11} a_{22} a_{66} + 2a_{12} a_{16} a_{26} - a_{11} a_{26}^2 - a_{22} a_{16}^2 - a_{66} a_{12}^2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

В (1.12) величины со звездочками имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\gamma}^{(i,s)*} &= - \int_0^\zeta \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{B} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + a k_\beta (\sigma_{\alpha\alpha}^{(i,s-1)} - \sigma_{\beta\beta}^{(i,s-1)}) + \right. \\ &\quad \left. + 2a k_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(i,s-1)} + P_\alpha^{(i,s)} \right] d\zeta, \quad (\alpha, \beta, \xi, \eta, A, B) \\ \sigma_{\gamma l}^{(i,s)*} &= - \int_0^\zeta \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{B} \frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + a (k_\beta \sigma_{\alpha\gamma}^{(i,s-1)} + k_\alpha \sigma_{\beta\gamma}^{(i,s-1)}) + P_\gamma^{(i,s)} \right] d\zeta \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{(i,s)*} &= B_{11}^{(i)} R_1^{(i,s)} + B_{12}^{(i)} R_2^{(i,s)} + B_{16}^{(i)} R_3^{(i,s)} \\ &(\alpha\alpha, \beta\beta, \alpha\beta; B_{1k}, B_{2k}, B_{6k}) \\ u_*^{(i,s)} &= \int_0^\zeta \left[ a_{15}^{(i)} \sigma_{\alpha\alpha}^{(i,s)} + a_{25}^{(i)} \sigma_{\beta\beta}^{(i,s)} + a_{35}^{(i)} \sigma_{\gamma\gamma}^{(i,s)} + a_{45}^{(i)} \sigma_{\beta\gamma}^{(i,s)} + a_{55}^{(i)} \sigma_{\alpha\gamma}^{(i,s)} + \right. \\ &\quad \left. + a_{56}^{(i)} \sigma_{\alpha\beta}^{(i,s)} - \frac{1}{A} \frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + \alpha_{13}^{(i)} \theta^{(i,s)} \right] d\zeta \\ &(u, v, \xi, \eta; A, B; a_{5m}, a_{4m}; \alpha_{13}, \alpha_{23}) \\ w_*^{(i,s)} &= \int_0^\zeta \left[ a_{13}^{(i)} \sigma_{\alpha\alpha}^{(i,s)} + a_{23}^{(i)} \sigma_{\beta\beta}^{(i,s)} + a_{33}^{(i)} \sigma_{\gamma\gamma}^{(i,s)} + a_{34}^{(i)} \sigma_{\beta\gamma}^{(i,s)} + \right. \\ &\quad \left. + a_{35}^{(i)} \sigma_{\alpha\gamma}^{(i,s)} + a_{36}^{(i)} \sigma_{\beta\gamma}^{(i,s)} + \alpha_{33}^{(i)} \theta^{(i,s)} \right] d\zeta \quad (1.13) \\ R_1^{(i,s)} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + a k_\alpha v^{(i,s-1)} - a_{13}^{(i)} \sigma_{\gamma\gamma}^{(i,s)} - a_{14}^{(i)} \sigma_{\beta\gamma}^{(i,s)} - a_{15}^{(i)} \sigma_{\alpha\gamma}^{(i,s)} - \alpha_{11}^{(i)} \theta^{(i,s)} \\ &(1, 2; u, v, \xi, \eta; A, B; k_\alpha, k_\beta) \end{aligned}$$

$$R_3^{(i,s)} = \frac{1}{B} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \xi} - a(k_\alpha u^{(i,s-1)} + k_\beta v^{(i,s-1)}) -$$

$$- a_{36}^{(i)} \sigma_{\gamma\gamma^*}^{(i,s)} - a_{46}^{(i)} \sigma_{\beta\gamma^*}^{(i,s)} - a_{56}^{(i)} \sigma_{\alpha\gamma^*}^{(i,s)} - \alpha_{12}^{(i)} \theta^{(i,s)}$$

Общий интеграл (1.12), (1.13) содержит шесть пар неизвестных функций интегрирования  $\sigma_{\alpha\gamma^0}^{(i,s)}$ ,  $\sigma_{\beta\gamma^0}^{(i,s)}$ ,  $\sigma_{\gamma\gamma^0}^{(i,s)}$ ,  $u_0^{(i,s)}$ ,  $v_0^{(i,s)}$ ,  $w_0^{(i,s)}$  ( $i = 1, 2$ ), которые подлежат определению из граничных условий и условий контакта слоев.

Удовлетворив условиям контакта слоев (1.7) и граничным условиям (1.2), получим

$$u_0^{(i,s)} = - \left( A_{53}^{(1)} \sigma_{\gamma\gamma^0}^{(1,s)} + A_{54}^{(1)} \sigma_{\beta\gamma^0}^{(1,s)} + A_{55}^{(1)} \sigma_{\alpha\gamma^0}^{(1,s)} \right) \varphi_0 / h +$$

$$+ \left( A_{53}^{(2)} \sigma_{\gamma\gamma^0}^{(2,s)} + A_{54}^{(2)} \sigma_{\beta\gamma^0}^{(2,s)} + A_{55}^{(2)} \sigma_{\alpha\gamma^0}^{(2,s)} \right) (\varphi_0 + \varphi_2) / h +$$

$$+ u_\alpha^{(2,s)} (\varphi_0 / h) - u_\alpha^{(1,s)} (\varphi_0 / h) - u_\alpha^{(2,s)} (-\varphi_2 / h) + u_\alpha^{-(s)}$$

$$(u, v, w; A_{5j}, A_{4j}, A_{3j}; \alpha, \beta, \gamma)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma^0}^{(2,s)} = \left\{ \left[ \Psi_{0\alpha} (C_{14}^{(2)} C_{23}^{(2)} - C_{13}^{(1)} C_{24}^{(2)}) + \Psi_{0\beta} (C_{13}^{(1)} C_{25}^{(2)} - C_{15}^{(2)} C_{23}^{(1)}) + \right. \right.$$

$$\left. + (C_{15}^{(2)} C_{24}^{(2)} - C_{14}^{(2)} C_{25}^{(2)}) \right] \sigma_{\gamma\gamma^0}^{(1,s)} + \left[ \Psi_{0\alpha} (C_{14}^{(2)} C_{24}^{(1)} - C_{14}^{(1)} C_{24}^{(2)}) + \right.$$

$$\left. + \Psi_{0\beta} [C_{15}^{(2)} (C_{24}^{(2)} - C_{24}^{(1)}) + C_{25}^{(2)} (C_{14}^{(1)} - C_{14}^{(2)})] \right] \sigma_{\beta\gamma^0}^{(1,s)} +$$

$$\left. + \left( \Psi_{0\alpha} [C_{24}^{(2)} (C_{15}^{(2)} - C_{15}^{(1)}) + C_{14}^{(2)} (C_{25}^{(1)} - C_{25}^{(2)})] + \Psi_{0\beta} (C_{15}^{(1)} C_{25}^{(2)} - C_{15}^{(2)} C_{25}^{(1)}) \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sigma_{\alpha\gamma^0}^{(1,s)} + (C_{25}^{(2)} \Psi_{0\beta} - C_{24}^{(2)} \Psi_{0\alpha}) m_1^{(s)} + (C_{14}^{(1)} \Psi_{0\alpha} - C_{15}^{(2)} \Psi_{0\beta}) m_2^{(s)} + \right.$$

$$\left. + (C_{15}^{(2)} C_{24}^{(2)} - C_{14}^{(2)} C_{25}^{(2)}) m_3^{(s)} \right\} \Delta_0^{-1}$$

$$\sigma_{\beta\gamma^0}^{(2,s)} = \left\{ \left[ \Psi_{0\alpha} (C_{13}^{(1)} C_{23}^{(2)} - C_{13}^{(2)} C_{23}^{(1)}) + C_{15}^{(2)} (C_{23}^{(1)} - C_{23}^{(2)}) + C_{25}^{(2)} (C_{13}^{(2)} - C_{13}^{(1)}) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \sigma_{\gamma\gamma^0}^{(1,s)} + \left[ \Psi_{0\alpha} (C_{14}^{(1)} C_{23}^{(2)} - C_{13}^{(2)} C_{24}^{(1)}) + \Psi_{0\beta} (C_{13}^{(2)} C_{25}^{(2)} - C_{15}^{(2)} C_{23}^{(2)}) + \right. \right.$$

$$\left. + (C_{15}^{(2)} C_{24}^{(1)} - C_{14}^{(1)} C_{25}^{(2)}) \right] \sigma_{\beta\gamma^0}^{(1,s)} + \left[ \Psi_{0\alpha} (C_{23}^{(2)} (C_{15}^{(1)} - C_{15}^{(2)}) + C_{13}^{(2)} (C_{25}^{(2)} - C_{25}^{(1)})) + \right.$$

$$\left. + (C_{15}^{(2)} C_{25}^{(1)} - C_{15}^{(1)} C_{25}^{(2)}) \right] \sigma_{\alpha\gamma^0}^{(1,s)} + (C_{25}^{(2)} \Psi_{0\alpha} - C_{25}^{(1)} \Psi_{0\beta}) m_1^{(s)} + (C_{15}^{(2)} - C_{13}^{(2)} \Psi_{0\alpha}) m_2^{(s)} +$$

$$\left. + (C_{13}^{(2)} C_{25}^{(2)} - C_{15}^{(2)} C_{23}^{(2)}) m_3^{(s)} \right\} \Delta_0^{-1}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma^0}^{(2,s)} = \left\{ \left[ \Psi_{0\beta} (C_{13}^{(2)} C_{23}^{(1)} - C_{13}^{(1)} C_{23}^{(2)}) + C_{14}^{(2)} (C_{25}^{(2)} - C_{23}^{(1)}) + C_{24}^{(2)} (C_{13}^{(1)} - C_{13}^{(2)}) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \sigma_{\gamma\gamma^0}^{(1,s)} + \left[ \Psi_{0\beta} (C_{13}^{(2)} (C_{24}^{(1)} - C_{24}^{(2)}) + C_{23}^{(2)} (C_{14}^{(2)} - C_{14}^{(1)})) + (C_{14}^{(1)} C_{24}^{(2)} - C_{14}^{(2)} C_{24}^{(1)}) \right] \sigma_{\beta\gamma^0}^{(1,s)} + \right.$$

$$\left. + \left[ \Psi_{0\beta} (C_{13}^{(2)} C_{25}^{(1)} - C_{15}^{(1)} C_{23}^{(2)}) + \Psi_{0\alpha} (C_{14}^{(2)} C_{23}^{(2)} - C_{13}^{(2)} C_{24}^{(2)}) + \right. \right.$$

$$\left. + (C_{15}^{(1)} C_{24}^{(2)} - C_{25}^{(1)} C_{14}^{(2)}) \right] \sigma_{\alpha\gamma^0}^{(1,s)} + m_1^{(s)} (C_{24}^{(2)} - C_{23}^{(2)} \Psi_{0\beta}) + m_2^{(s)} (C_{13}^{(2)} \Psi_{0\beta} - C_{14}^{(2)}) +$$

$$\left. + m_3^{(s)} (C_{14}^{(2)} C_{23}^{(2)} - C_{13}^{(2)} C_{24}^{(2)}) \right\} \Delta_0^{-1}$$

$$u_\alpha^{(0)} = u_\alpha^- / a, \quad u_\alpha^{(s)} = 0 \quad s \neq 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$C_{1k}^{(i)} = \frac{1}{2} (k-3)(k-4) + A_{1k}^{(i)} \Psi_{0\alpha} + A_{6k}^{(i)} \Psi_{0\beta}$$

$$C_{2k}^{(i)} = (5-k)(k-3) + A_{6k}^{(i)} \Psi_{0\alpha} + A_{2k}^{(i)} \Psi_{0\beta} \quad k = 3, 4, 5; \quad i = 1, 2$$

$$\Psi_{n\alpha} = -\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha}, \quad \Psi_{n\beta} = -\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \beta} \quad n = 0, 1$$

$$m_j^{(s)} = \Psi_{0\alpha} \left[ \sigma_{\alpha j}^{(1,s)}(\xi, \eta, \varphi_0/h) - \sigma_{\alpha j}^{(2,s)}(\xi, \eta, \varphi_0/h) \right] + \Psi_{0\beta} \left[ \sigma_{\beta j}^{(1,s)}(\xi, \eta, \varphi_0/h) - \sigma_{\beta j}^{(2,s)}(\xi, \eta, \varphi_0/h) \right] + \left[ \sigma_{\gamma j}^{(1,s)}(\xi, \eta, \varphi_0/h) - \sigma_{\gamma j}^{(2,s)}(\xi, \eta, \varphi_0/h) \right] \\ (m_{1j}^{(s)}, m_{2j}^{(s)}, m_{3j}^{(s)}; \quad j = \alpha, \beta, \gamma)$$

$$\Delta_0 = \Psi_{0\alpha} (C_{14}^{(2)} C_{23}^{(2)} - C_{13}^{(2)} C_{24}^{(2)}) + \Psi_{0\beta} (C_{13}^{(2)} C_{25}^{(2)} - C_{15}^{(2)} C_{23}^{(2)}) + C_{15}^{(2)} C_{24}^{(2)} - C_{14}^{(2)} C_{25}^{(2)}$$

Формулами (1.14) девять функций интегрирования выражены через три  $\sigma_{j\gamma}^{(1,s)}$ ,  $j = \alpha, \beta, \gamma$ , которые, в свою очередь, определяются из граничных условий, заданных на лицевой поверхности  $\gamma = \varphi_1(\alpha, \beta)$  пластины.

Если на поверхности  $\gamma = \varphi_1(\alpha, \beta)$  заданы условия первой краевой задачи теории упругости (1.3), то этими функциями интегрирования будут

$$\sigma_{j\gamma}^{(1,s)} = \left[ (C_{24}^* - C_{23}^* \Psi_{1\beta}) m_{\alpha}^{(s)} + (C_{13}^* \Psi_{1\beta} - C_{14}^*) m_{\beta}^{(s)} + (C_{14}^* C_{23}^* - C_{13}^* C_{24}^*) m_{\gamma}^{(s)} \right] \Delta_{11}^{-1} \\ \sigma_{\beta\gamma}^{(1,s)} = \left[ (C_{23}^* \Psi_{1\alpha} - C_{25}^*) m_{\alpha}^{(s)} + (C_{15}^* - C_{13}^* \Psi_{1\alpha}) m_{\beta}^{(s)} + (C_{13}^* C_{25}^* - C_{15}^* C_{23}^*) m_{\gamma}^{(s)} \right] \Delta_{11}^{-1} \\ \sigma_{\gamma\gamma}^{(1,s)} = \left[ (C_{25}^* \Psi_{1\beta} - C_{24}^* \Psi_{1\alpha}) m_{\alpha}^{(s)} + (C_{14}^* \Psi_{1\alpha} - C_{15}^* \Psi_{1\beta}) m_{\beta}^{(s)} + \right. \\ \left. + (C_{15}^* C_{24}^* - C_{14}^* C_{25}^*) m_{\gamma}^{(s)} \right] \Delta_{11}^{-1} \quad (1.15)$$

$$\Delta_{11} = C_{15}^* C_{24}^* - C_{14}^* C_{25}^* + \Psi_{1\alpha} (C_{14}^* C_{23}^* - C_{13}^* C_{24}^*) + \Psi_{1\beta} (C_{13}^* C_{25}^* - C_{15}^* C_{23}^*)$$

$$C_{1k}^* = A_{1k}^{(1)} \Psi_{1\alpha} + A_{6k}^{(1)} \Psi_{1\beta} + \frac{1}{2} (k-3)(k-4)$$

$$C_{2k}^* = A_{2k}^{(1)} \Psi_{1\beta} + A_{6k}^{(1)} \Psi_{1\alpha} + (5-k)(k-3) \quad k = 3, 4, 5$$

$$m_j^{(s)} = F_j^{(s)} - \Psi_{1\alpha} \sigma_{j\alpha}^{(1,s)} \left( \frac{\varphi_1}{h} \right) - \Psi_{1\beta} \sigma_{j\beta}^{(1,s)} \left( \frac{\varphi_1}{h} \right) - \sigma_{j\gamma}^{(1,s)} \left( \frac{\varphi_1}{h} \right)$$

$$j = \alpha, \beta, \gamma; \quad F_j^{(0)} = F_j \lambda \quad F_j^{(s)} = 0 \quad s \neq 0$$

и решение краевой задачи (1.2), (1.3) определится по формулам (1.10)-(1.15).

Если на поверхности  $\gamma = \varphi_1(\alpha, \beta)$  заданы кинематические условия (1.4), то

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1,s)} = D_{35} V_{\alpha}^{(s)} + D_{34} V_{\beta}^{(s)} + D_{33} V_{\gamma}^{(s)}$$

$$(\gamma\gamma, \beta\gamma, \alpha\gamma; 3l, 4l, 5l)$$

$$D_{il} = (A_{ik}^{(1)} A_{il}^{(1)} - A_{ki}^{(1)} A_{kl}^{(1)}) \Delta_{12}^{-1} \quad i \neq l \neq k \neq i$$

$$D_{kk} = (A_{il}^{(1)} A_{il}^{(1)} - A_{ii}^{(1)} A_{ll}^{(1)}) \Delta_{12}^{-1} \quad i, l, k = 3, 4, 5 \quad (1.16)$$

$$\Delta_{12} = A_{44}^{(1)} A_{53}^{(1)} A_{35}^{(1)} + A_{33}^{(1)} A_{45}^{(1)} A_{54}^{(1)} + A_{55}^{(1)} A_{34}^{(1)} A_{43}^{(1)} - \\ - A_{33}^{(1)} A_{44}^{(1)} A_{55}^{(1)} - A_{34}^{(1)} A_{45}^{(1)} A_{53}^{(1)} - A_{43}^{(1)} A_{54}^{(1)} A_{35}^{(1)}$$

$$V_{\alpha}^{(s)} = [u_{\alpha}^{+(s)} - u_{\alpha}^{-(s)} + u_{\alpha}^{(2,s)} (-\varphi_2/h) - u_{\alpha}^{(1,s)} (\varphi_1/h)] h / (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma; u_*, v_*, w_*) \quad u_\alpha^{+(0)} = u_\alpha^+ / a, \quad u_\alpha^{+(s)} = 0 \quad s \neq 0$$

Решение, соответствующее условиям (1.2), (1.4), определится по формулам (1.10)-(1.14), (1.16).

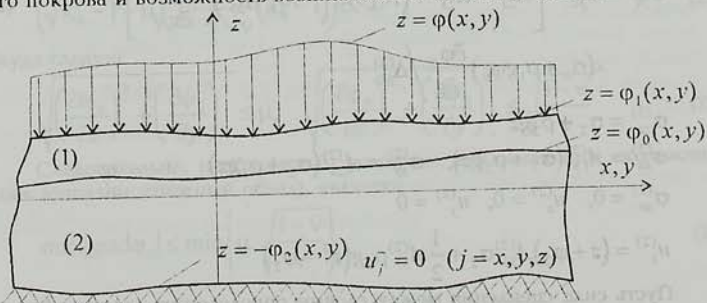
Для смешанных граничных условий (1.5), (1.6) функции интегрирования  $\sigma_{j0}^{(s)}$ ,  $j = \alpha, \beta, \gamma$  определяются аналогичным образом.

Рекуррентные формулы (1.10)-(1.16) позволяют вычислить компоненты тензора напряжений и вектора перемещения с любой заранее заданной асимптотической точностью во всех точках двухслойной пластины переменной толщины за исключением небольшой зоны вблизи боковой поверхности, где доминирующее положение внутренней задачи исчезает и наравне с ним проявляется эффект пограничного слоя [6-8]. Поэтому вблизи боковой поверхности к приведенному решению приплюсовывается согласованное с ним решение задачи пограничного слоя. Ширина (глубина) этой зоны обусловлена скоростью затухания пограничного эффекта и, как обычно, не превышает 1,0-1,5 толщины пластины.

Асимптотическая точность вычислений обусловлена не только числом приближений, но также значениями физико-механических постоянных материалов слоев  $\alpha_k^{(i)}$ ,  $k, l = 1, 2, \dots, 6$  и изменяемостью функций  $\varphi_0(\alpha, \beta)$ ,  $\varphi_1(\alpha, \beta)$ ,  $\varphi_2(\alpha, \beta)$ ,  $u_j^+(\alpha, \beta)$ ,  $\sigma_{j0}^+(\alpha, \beta)$ ,  $j = \alpha, \beta, \gamma$ . Ввиду такого разнообразия, оценка точности в приведенной выше общей постановке краевых задач практически не представляется возможной. А в каждом конкретном случае оценка остаточного члена не представляет большого труда. Укажем также, что если слои имеют постоянные толщины:  $\varphi_k(\alpha, \beta) \equiv \text{const}$ ,  $k = 0, 1, 2$ , а заданные на лицевых поверхностях пластины функции  $u_j^+(\alpha, \beta)$ ,  $\sigma_{j0}^+$ ,  $j = \alpha, \beta, \gamma$  являются полиномами степени  $n$ , то после  $(n+1)$ -го шага итерация обрывается и получаются математически точные решения поставленных краевых задач для анизотропного слоистого бесконечного слоя.

2. В качестве иллюстрации и приложения полученных результатов рассмотрим одну частную задачу.

Пусть двухслойная полоса переменной толщины и поверхностью раздела слоев  $z = \varphi_0(x, y)$  нагружена вертикальной нагрузкой переменной интенсивности. Требуется определить напряженно-деформированное состояние каждого слоя и установить условия нарушения полного контакта между слоями. Задача, в частности, моделирует воздействие снежного покрова и возможность возникновения оползней (фиг. 2).



Фиг. 2

Пусть  $\rho_1, \rho_2$  - плотности слоев, а  $\rho$  - интенсивность (плотность) внешней нагрузки. Граничными условиями задачи являются:

$$F_z = -\rho g H(x, y), \quad H = \varphi(x, y) - \varphi_1(x, y), \quad F_x = 0, \quad F_y = 0 \quad \text{при } z = \varphi_1(x, y)$$

$$u_j(z = -\varphi_2) = 0 \quad j = x, y, z \quad (2.1)$$

Используя формулы (1.14), (1.15) и ограничившись с точностью  $O(\varepsilon)$ , получим решение:

а) величины первого слоя  $\varphi_0 \leq z \leq \varphi_1$

$$\sigma_{xz}^{(1)} = -A_{13}^{(1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \lambda_1 \rho g H(x, y) / \Delta_{11}^{(1)}$$

$$\sigma_{yz}^{(1)} = -A_{23}^{(1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \lambda_1 \rho g H(x, y) / \Delta_{11}^{(1)}$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_1 + \rho_1 g z$$

$$\sigma_{xx}^{(1)} = (\rho_1 g z + \sigma_1) A_{13}^{(1)}, \quad \sigma_{yy}^{(1)} = (\rho_1 g z + \sigma_1) A_{23}^{(1)} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)} = 0, \quad u_x^{(1)} = 0, \quad u_y^{(1)} = 0$$

$$u_z^{(1)} = \frac{1}{2} (z - \varphi_0) A_{33}^{(1)} (\rho_1 g (z + \varphi_0) + 2\sigma_1) +$$

$$+ \frac{1}{2} (\varphi_0 + \varphi_2) A_{33}^{(2)} (\rho_2 g (\varphi_0 - \varphi_2) + 2\sigma_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{\Delta_{00}^{(1)}}{\Delta_{00}^{(2)}} (\sigma_1 + \rho_1 g \varphi_0) - \rho_2 g \varphi_0$$

$$\sigma_1 = -\rho_1 g \varphi_1 - \rho g H \lambda_1 / \Delta_{11}^{(1)}$$

$$\Delta_{kl}^{(i)} = 1 - A_{13}^{(i)} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} - A_{23}^{(i)} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_l}{\partial y}, \quad k, l = 0, 1, 2$$

б) величины второго слоя  $-\varphi_2 \leq z \leq \varphi_0$

$$\sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{xz}^{(1)} - \left[ A_{13}^{(1)} - A_{13}^{(2)} - (A_{13}^{(1)} A_{23}^{(2)} - A_{13}^{(2)} A_{23}^{(1)}) \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 \right] \times$$

$$\times (\sigma_1 + \rho_1 g \varphi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} / \Delta_{00}^{(2)}$$

$$\sigma_{yz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{(1)} - \left[ A_{23}^{(1)} - A_{23}^{(2)} + (A_{13}^{(1)} A_{23}^{(2)} - A_{13}^{(2)} A_{23}^{(1)}) \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 \right] \times \quad (2.3)$$

$$\times (\sigma_1 + \rho_1 g \varphi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} / \Delta_{00}^{(2)}$$

$$\sigma_{zz}^{(2)} = \sigma_2 + \rho_2 g z$$

$$\sigma_{xx}^{(2)} = A_{13}^{(2)} (\sigma_2 + \rho_2 g z), \quad \sigma_{yy}^{(2)} = A_{23}^{(2)} (\sigma_2 + \rho_2 g z)$$

$$\sigma_{xy}^{(2)} = 0, \quad u_x^{(2)} = 0, \quad u_y^{(2)} = 0$$

$$u_z^{(2)} = (z + \varphi_2) A_{33}^{(2)} \sigma_2 + \frac{1}{2} A_{33}^{(2)} \rho_2 g (z^2 - \varphi_2^2)$$

Пусть сила сцепления между слоями определяется законом Кулона [9] с коэффициентом сцепления  $\mu$ , тогда условием, исключающим скольжение слоев (оползши), будет



$$|\tau| \leq \mu |\sigma| \quad (2.4)$$

где  $\sigma$  - нормальное напряжение в данной точке поверхности раздела слоев  $z = \varphi_0(x, y)$ , а  $\tau$  - касательное напряжение по направлению наибольшего уклона поверхности в этой точке (оно совпадает с линией пересечения касательной плоскости с вертикальной плоскостью, в которой лежит  $\sigma$ ).

Они определяются по формулам

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{1}{\lambda_0^2 \sqrt{\lambda_0^2 - 1}} \left( \rho_1 g (\varphi_0 - \varphi_1) - \rho g H \lambda_1 / \Delta_{11}^{(1)} \right) \left( \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 (A_{13}^{(1)} - 1) + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 \right. \\ & \times (A_{23}^{(1)} - 1) \left. \right) - \frac{\rho g H \lambda_1}{\lambda_0^2 \sqrt{\lambda_0^2 - 1} \Delta_{11}^{(1)}} (\lambda_0^2 - 2) \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} A_{13}^{(1)} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} A_{23}^{(1)} \right) \\ \sigma = & \frac{1}{\lambda_0} \left( \rho_1 g (\varphi_0 - \varphi_1) - \rho g H \lambda_1 / \Delta_{11}^{(1)} \right) \left( \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 A_{13}^{(1)} + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 A_{23}^{(1)} + 1 \right) + \\ & + \frac{2 \rho g H \lambda_1}{\lambda_0^2 \Delta_{11}^{(1)}} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} A_{13}^{(1)} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} A_{23}^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\lambda_i = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)^2} \quad i = 0, 1$$

Как следует из (2.5), с точностью первого шага итерации  $O(\varepsilon)$ , опасность скольжения слоев (оползней) не зависит от нижней границы  $z = -\varphi_2(x, y)$  и коэффициентов упругости второго слоя. Кроме коэффициента сцепления, она зависит также от внешнего воздействия, плотности грунта первого слоя, его коэффициентов упругости (Пуассона) и формы граничных поверхностей.

Если лицевая поверхность параллельна поверхности раздела слоев  $z = \varphi_0(x, y)$ , и первый слой изотропный, т. е.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad A_{13}^{(1)} = A_{23}^{(1)} = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (2.6)$$

то пренебрегая объемными силами первого слоя, формально приняв  $\rho_1 = 0$ , из (2.4), (2.5) получим

$$\left( \sqrt{\lambda_0^2 - 1} - \mu \right) \left( 1 - \frac{\nu}{1 - \nu} (\lambda_0^2 - 1) \right) \leq 0 \quad (2.7)$$

откуда следует

$$\sqrt{\left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2} \leq \mu, \quad \sqrt{\left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2} \leq \sqrt{\frac{1 - \nu}{\nu}} \quad (2.8)$$

Следовательно, необходимым условием, исключающим скольжение слоев (оползни, спешный обвал), является

$$\max |\text{grad} \varphi_0| \leq \min \left\{ \mu, \sqrt{\frac{1 - \nu}{\nu}} \right\} \quad (2.9)$$

Поскольку  $\sqrt{\frac{1-\nu}{\nu}} \geq 1$ , при небольших коэффициентах сцепления ( $\mu < 1$ ) упругие свойства слоев не влияют на их скольжение. При  $\sqrt{\frac{1-\nu}{\nu}} < \mu$  важную роль играет коэффициент Пуассона.

Для плоской задачи, считая  $z = kx + b$ , (2.9) принимает вид

$$k \leq \min \left\{ \mu, \sqrt{\frac{1-\nu}{\nu}} \right\} \quad (2.10)$$

В классической механике, как известно, условием равновесия частицы грунта, находящейся на откосе, является

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu \quad (2.11)$$

где  $\alpha$  – угол естественного откоса,  $\mu$  – коэффициент сцепления частиц грунта. Условия (2.9), (2.10) являются обобщением этого условия и учитывают также влияние упругих свойств.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М., ГИФМЛ, 1961, 384с.
2. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела. Механика, Ереван, Изд-во ЕГУ, 1982. Вып.2, с.7-12.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией. Тр. IV Всесоюзн. Симпоз. по механике конструкций из композиционных материалов, Новосибирск: Наука, 1984. с.105-110.
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок. ПММ, 1986, т.50, вып. 2, с.271-278.
5. Агаловян Л.А., Хачатрян Г.Г. Об асимптотическом методе решения краевых задач теории упругости для неклассических областей. Докл. АН Арм. ССР, т.88, №5, 1989, с.198-201.
6. Агаловян Л.А. О пограничном слое пластинок. Докл. АН Арм. ССР, 1972, т.55, №3, с.149-155.
7. Геворкян Р.С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластинок. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1984, т.37, №6, с.3-15.
8. Агаловян Л.А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач. Межвуз. сб. Механика, Ереван: Изд-во Ереван ун-та, 1984, вып.3, с.51-58.
9. Флорин В.А. Основы механики грунтов. Т.1 А. – М.: ГИЛАСОМ, 1959, 375с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
26.06.1996