

УДК 539.3

**О РЕШЕНИИ ДВУХ КЛАССОВ ЗАДАЧ КРУЧЕНИЯ  
 АНИЗОТРОПНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ**  
 Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж.

Վ.Ս. Սարգսյան, Վ.Ժ. Հայրապետյան  
 Անիզոտրոպ պրիզմատիկ ձողերի ուղորճան երկու դասերի խնդիրների լուծման մասին

Դիտարկվում է կորագծային բառանկյան տեսքի լայնական կտրվածքով ուղղագծային անիզոտրոպ պրիզմատիկ ձողերի (I) և կորագծային անիզոտրոպայնյով օժտված ուղղանկյուն կտրվածքով պրիզմատիկ ձողերի ուղորճան (II) խնդիրների դասերը: Մտցված է փոքր ֆիզիկական պարամետր, որը բնութագրում է ձողի նյութի անիզոտրոպությունը և համապատասխանաբար կորագծային-զլանական ու ուղղագծային դեկարտյան կոորդինատներում լարումների ֆունկցիայի համար լուծումը կառուցվում է ըստ այդ պարամետրի շարքով:

V.S. Sarkissyan, V.G. Hairapetyan  
 On the solution of two classes of problems of anisotropic prismatic beams torsion

Рассматривается класс задач кручения призматических прямолинейных анизотропных стержней с поперечным сечением в виде криволинейного четырехугольника (I) и кручения призматических стержней с прямоугольным сечением, обладающих криволинейно-цилиндрической анизотропией (II). Вводится малый физический параметр, характеризующий анизотропию материала стержня и построено решение по степеням этого параметра для функции напряжения соответственно в криволинейно-цилиндрических и прямолинейных декартовых координатах.

Исследованию задач о кручении анизотропных стержней посвящены труды С.Г. Лехницкого [1,2], Н.Х. Арутюняна, Б.Л. Абрамяна [3], В.С. Саркисяна [4] и другие.

В основном, в этих задачах рассмотрена анизотропия таких видов, в которых главные её направления совпадают с координатными линиями, где решаются задачи.

В работах [5] и [6] поставлен и предложен метод решения задачи кручения призматических стержней с сечением соответственно в виде части кругового и эллиптического полукольца.

В работе [7] рассматривается кручение призматического стержня, обладающего цилиндрической ортотропией прямоугольного сечения.

**Задача I.** Рассмотрим кручение призматического прямолинейно-ортотропного стержня с сечением в виде криволинейного четырехугольника.

Обобщенный закон Гука в прямоугольной координатной системе записывается так [1] и [2]:

$$e_{yz} = a_{44}\sigma_{yz}, \quad e_{xy} = a_{55}\sigma_{xz} \quad (1.1)$$

где компоненты тензора напряжений определяются по формулам

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.2)$$

Здесь  $\Psi(x, y)$  — функция напряжений, которая удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в рассматриваемой области  $\Omega$ :

$$a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + a_{55} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -2\vartheta \quad (1.3)$$

а на границе области ( $\Gamma$ ) —

$$\Psi|_{\Gamma} = 0 \quad (1.4)$$

где  $a_{44} > 0$ ,  $a_{55} > 0$  — упругие постоянные,  $\vartheta$  — относительный угол кручения.

Имея  $\Psi$ , жесткость стержня при кручении определяется так

$$c_t = 2 \iint_{\Omega} \Psi(x, y) dx dy \quad (1.5)$$

Предположим, что  $a_{44} > a_{55}$ . Тогда всегда будем иметь малый физический параметр

$$\delta = \frac{a_{44} - a_{55}}{a_{44} + a_{55}} \quad (0 \leq \delta < 1) \quad (1.6)$$

Для решения поставленной задачи удобно записать уравнение (1.3) в криволинейных координатах  $q_1, q_2, q_3$ . Пусть

$$x = x(q_1, q_2), \quad y = y(q_1, q_2), \quad z = q_3 \quad (1.7)$$

Тогда (1.3) можно представить так:

$$e \Pi[\Phi] + \delta S[\Phi] = A \quad (1.8)$$

где

$$\Psi(x, y) = \Psi[x(q_1, q_2), y(q_1, q_2)] \equiv \Phi(q_1, q_2)$$

$$\Pi[\Phi] \equiv \frac{1}{D} \left[ H_2^2 \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + H_1^2 \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + (D_1 + D_2) \frac{\partial}{\partial q_1} + (D_3 + D_4) \frac{\partial}{\partial q_2} \right] \quad (1.9)$$

$$S[\Phi] \equiv -\frac{1}{D} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial q_2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} - 2 \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} + D_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + D_4 \frac{\partial}{\partial q_2} \right] \quad (1.10)$$

$$A = -\frac{2\vartheta D}{a_{44} + a_{55}}, \quad e = \frac{a_{44}}{a_{44} + a_{55}} \quad (1.11)$$

$$D_1(q_1, q_2) = \frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_2} - \frac{\partial^2 y}{\partial q_2^2} \frac{\partial y}{\partial q_1} - \frac{1}{D} \frac{\partial y}{\partial q_2} \left[ \frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial D}{\partial q_1} - \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial D}{\partial q_2} \right]$$

$$D_2(q_1, q_2) = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} - \frac{\partial^2 x}{\partial q_2^2} \frac{\partial x}{\partial q_1} - \frac{1}{D} \frac{\partial x}{\partial q_2} \left[ \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial D}{\partial q_1} - \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial D}{\partial q_2} \right]$$

$$D_3(q_1, q_2) = \frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_1} - \frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2} \frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{1}{D} \frac{\partial y}{\partial q_1} \left[ \frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial D}{\partial q_1} - \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial D}{\partial q_2} \right]$$

$$D_4(q_1, q_2) = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_1} - \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{1}{D} \frac{\partial x}{\partial q_1} \left[ \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial D}{\partial q_1} - \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial D}{\partial q_2} \right] \quad (1.12)$$

$$D(q_1, q_2) = \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_2} - \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_1} \quad (1.13)$$

$$H_i^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.14)$$

Напряжение в (1.2) определяется по формулам

$$\sigma_{xz} = \frac{1}{D} \left( -\frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right), \quad \sigma_{yz} = -\frac{1}{D} \left( \frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} - \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) \quad (1.15)$$

а жесткость

$$c_i = 2 \iint_{\Omega} \Phi(q_1, q_2) H_1 H_2 dq_1 dq_2 \quad (1.16)$$

Таким образом, решение задачи сводится к решению дифференциального уравнения (1.8) с неразделяющимися переменными при нулевых граничных условиях.

Решение уравнения (1.8) представим в виде ряда по степеням физического параметра  $\delta$ :

$$\Phi(q_1, q_2) = \Phi_0(q_1, q_2) + \delta \Phi_1(q_1, q_2) + \delta^2 \Phi_2(q_1, q_2) + \dots \quad (1.17)$$

Тогда при помощи (1.17), (1.7) и (1.4) получим

$$eT[\Phi_j] = f_j(q_1, q_2) \quad (1.18)$$

$$\Phi_j|_{\Gamma} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.19)$$

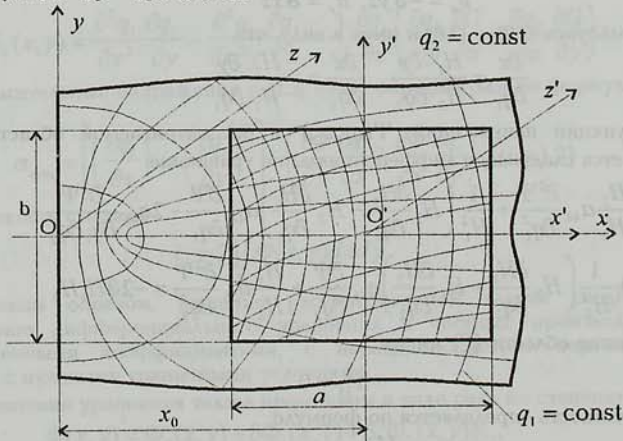
где

$$f_0 = A, \quad f_i(q_1, q_2) = -S[\Phi_{i-1}], \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.20)$$

Итак, задача о кручении призматического стержня криволинейного четырехугольного сечения сводится к решению системы рекуррентных дифференциальных уравнений в частных производных при нулевых граничных условиях, которая в конкретных криволинейных координатах допускает простые решения [5], [6] и [10].

**Задача II.** Пусть призматический стержень прямоугольного сечения со сторонами  $a, b$ , обладающий криволинейно-цилиндрической анизотропией, деформируется скручивающими моментами  $M$ , приложенными на концах. Предположим, что ось анизотропии параллельна образующей стержня — ось  $q_3$  криволинейной системы  $(q_1, q_2, q_3)$  и проходит вне его, а в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, параллельная к ней. Зависимость  $q_1, q_2, q_3$  от  $x, y, z$  в декартовых координатах дается в форме

$$q_1 = q_1(x, y), \quad q_2 = q_2(x, y), \quad q_3 = z \quad (2.1)$$



Фиг.1

Примем точку пересечения плоскости незакрепленного торца с осью анизотропии (полюс анизотропии) за начало координат. Совместим ось  $x$  с осью  $x'$ , где  $O'$  — центр тяжести,  $z'$  — геометрическая ось,  $x', y'$  —

главные оси инерции (фиг. 1). Тогда обобщенный закон Гука записывается так

$$e_{q_2q_3} = a_{44}\sigma_{q_2q_3} + a_{45}\sigma_{q_1q_3}, \quad e_{q_1q_3} = a_{45}\sigma_{q_2q_3} + a_{55}\sigma_{q_1q_3} \quad (2.2)$$

В (2.2) компоненты тензора напряжений выражаются через функцию напряжений  $\Psi(q_1, q_2)$  так [8]:

$$\sigma_{q_1q_3} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}, \quad \sigma_{q_2q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \quad (2.3)$$

Уравнения совместности деформации в криволинейно-цилиндрической системе координат в рассматриваемой задаче будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial q_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial q_2} \right) &= \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \right) \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial q_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial q_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial q_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial q_2} \right) &= \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \right) \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial q_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial q_2} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\varepsilon_{ik} = H_i H_k e_{q_i q_k} \quad (i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3) \quad (2.5)$$

а компоненты тензора деформации выражаются через перемещения по формулам

$$e_{q_1q_3} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial q_1} + \frac{\partial u_1}{\partial q_3}, \quad e_{q_2q_3} = \frac{\partial u_2}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial q_2} \quad (2.6)$$

Перемещения  $u_1$  и  $u_2$  в криволинейных координатах определяются по формулам [9]

$$u_1 = \frac{1}{H_1} \left( u_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + u_y \frac{\partial y}{\partial q_1} \right), \quad u_2 = \frac{1}{H_1} \left( u_y \frac{\partial x}{\partial q_1} - u_x \frac{\partial y}{\partial q_1} \right) \quad (2.7)$$

Как известно, в случае чистого кручения, перемещения в декартовых координатах определяются соотношениями

$$u_x = -\vartheta yz, \quad u_y = \vartheta xz \quad (2.8)$$

Пользуясь (2.2) – (2.8) и имея в виду, что

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial y}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial x}{\partial q_2} = -\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} \quad (2.9)$$

для функции напряжений  $\Psi(q_1, q_2)$  в рассматриваемой области  $\Omega$ , получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{H_2}{H_1} a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_1^2} + \frac{1}{H_1^2} \left( H_1 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - H_2 \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \right) a_{44} \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_1 \partial q_2} + \\ + \frac{1}{H_2^2} \left( H_2 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \right) a_{55} \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} + \frac{H_1}{H_2} a_{55} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_2^2} = -2\vartheta H_1 H_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

На границе области ( $\Gamma$ ) имеем

$$\Psi|_{\Gamma} = 0 \quad (2.11)$$

Жесткость определяется по формуле

$$c_i = 2 \iint_{\Omega} \Psi(q_1, q_2) H_1 H_2 dq_1 dq_2 \quad (2.12)$$

Для решения поставленной задачи удобно записать дифференциальное уравнение (2.10) в прямолинейных декартовых координатах, которое для функции

$$\Psi(q_1, q_2) = \Psi[q_1(x, y), q_2(x, y)] \equiv \Phi(x, y)$$

можно представить так:

$$e\Delta[\Phi] + \delta E[\Phi] = f_0 \quad (2.13)$$

где

$$\Delta[\ ] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.14)$$

$$E[\ ] \equiv \frac{1}{G} \left\{ \left( \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial q_2}{\partial x} + 2k_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial q_2}{\partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial q_2}{\partial y} - 2k_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial q_2}{\partial x} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2 \left[ \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial q_2}{\partial y} - k_1 \left( \frac{\partial q_2}{\partial y} \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial x} \frac{\partial q_1}{\partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right] + \right. \\ \left. + (G_1 - 2k_1 G_3) \frac{\partial}{\partial x} + (G_2 - 2k_1 G_4) \frac{\partial}{\partial y} \right\} \quad (2.15)$$

$$f_0 = -\frac{2\vartheta}{a_{44} + a_{55}}, \quad e = \frac{a_{44}}{a_{44} + a_{55}}, \quad k_1 = \frac{a_{45}}{a_{44} + a_{55}} \quad (2.16)$$

$$G(x, y) = \frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial q_2}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial x} \frac{\partial q_1}{\partial y} \quad (2.17)$$

$$G_1(x, y) = -\frac{\partial^2 q_2}{\partial x \partial y} \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{1}{G} \frac{\partial q_2}{\partial x} \left( \frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x} \right)$$

$$G_2(x, y) = -\frac{\partial^2 q_2}{\partial y^2} \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial x \partial y} \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{1}{G} \frac{\partial q_2}{\partial y} \left( \frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x} \right)$$

$$G_3(x, y) = \frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2} \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 q_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{1}{G} \frac{\partial q_1}{\partial y} \left( \frac{\partial q_2}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial q_2}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} \right)$$

$$G_4(x, y) = \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} \frac{\partial q_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 q_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{1}{G} \frac{\partial q_1}{\partial x} \left( \frac{\partial q_2}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial q_2}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} \right) \quad (2.18)$$

Касательные напряжения в (2.3) будут определяться по формуле

$$\sigma_{q_i} = \left[ \left( \frac{\partial q_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial q_i}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial q_i}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial q_i}{\partial y} \right), \quad (i = 1, 2) \quad (2.19)$$

а жесткость стержня

$$c_i = 2 \iint_{\Omega} \Phi(x, y) dx dy \quad (2.20)$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных с переменными коэффициентами, с неразделяющимися переменными (2.13), с нулевыми граничными условиями.

Решение уравнения также представим в виде ряда по степеням  $\delta$

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + \delta \Phi_1(x, y) + \delta^2 \Phi_2(x, y) + \dots \quad (2.21)$$

Тогда при помощи (2.21), (2.13) и (2.11) для определения неизвестных  $\Phi_j(x, y)$  получим

$$e\Delta[\Phi_j] = f_j(x, y) \quad (2.22)$$

$$\Phi_j|_{\Gamma} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.23)$$

где

$$f_i(x, y) = -E[\Phi_{i-1}], \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.24)$$

Следовательно, задача о кручении призматического стержня, обладающего криволинейно-цилиндрической анизотропией, сводится к решению рекуррентных дифференциальных уравнений в частных производных (2.22) уже с разделяющимися переменными при нулевых граничных условиях (2.23).

Теперь приступим к нахождению функции  $\Phi_0$ , когда  $a_{45} = 0$ , т.е. рассмотрим кручение призматического стержня, обладающего криволинейно-цилиндрической ортоотропией прямоугольного сечения. (Фиг.1). Для этой цели нужно решить следующее уравнение (см. в (2.22) – (2.23), когда  $j = 0$ )

$$e\Delta[\Phi_0] = f_0 \quad (2.25)$$

$$\Phi_0(x_0 \pm a/2, y) = 0 \quad (2.26)$$

$$\Phi_0(x, \pm b/2) = 0 \quad (2.27)$$

Решение этой краевой задачи будет

$$\Phi_0(x, y) = A_0 \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} [1 - B_{k0} \operatorname{ch} \lambda_k y] \sin \lambda_k (x - x_0 + a/2) \quad (2.28)$$

где

$$A_0 = \frac{8\theta a^2}{\pi^3 a_{44}}, \quad B_{k0} = \left( \operatorname{ch} \frac{\pi k}{2c} \right)^{-1}, \quad c = \frac{a}{b}, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{a} \quad (2.29)$$

Для нахождения следующего приближения, с учетом (2.28) из (2.22) и (2.24), нетрудно видеть, что нужно решить следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = \frac{A_0}{e} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k^3} R_k(x, y) \quad (2.30)$$

где

$$\begin{aligned} R_k(x, y) = & \frac{1}{G} \left\{ (B_{k0} \operatorname{sh} \lambda_k y) \left[ 2 \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial q_2}{\partial y} \lambda_k \cos \lambda_k (x - x_0 + a/2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + G_2 \sin \lambda_k (x - x_0 + a/2) \right] - B_{k0} \operatorname{ch} \lambda_k y \left[ \left( \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial q_2}{\partial y} \right) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \lambda_k \sin \lambda_k (x - x_0 + a/2) - G_1 \cos \lambda_k (x - x_0 + a/2) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial q_2}{\partial x} \lambda_k \sin \lambda_k (x - x_0 + a/2) + G_1 \cos \lambda_k (x - x_0 + a/2) \right\} \quad (2.31) \end{aligned}$$

Функцию  $f_1(x, y)$  разложим в ряд Фурье

$$f_1(x, y) = \sum_n^{\infty} a_{n1}(y) \sin \lambda_n (x - x_0 + a/2), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{a} \quad (2.32)$$

где

$$a_{n1}(y) = \frac{2A_0}{a} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k^3} \int_{x_0 - a/2}^{x_0 + a/2} R_k(x, y) \sin \lambda_n (x - x_0 + a/2) dx \quad (2.33)$$

Учитывая (2.33), решение дифференциального уравнения (2.30) с граничными условиями

$$\Phi_1(x_0 \pm a/2, y) = 0 \quad (2.34)$$

$$\Phi_1(x; \pm b/2) = 0 \quad (2.35)$$

можно представить так:

$$\Phi_1(x, y) = \sum_n^{\infty} [A_{n1} \operatorname{sh} \lambda_n y + B_{n1} \operatorname{ch} \lambda_n y + V_{n1}(y)] \sin \lambda_n (x - x_0 + a/2) \quad (2.36)$$

где

$$A_{n1} = - \left( 2 \operatorname{sh} \frac{\pi n}{2c} \right)^{-1} [V_{n1}(b/2) - V_{n1}(-b/2)] \quad (2.37)$$

$$B_{n1} = - \left( 2 \operatorname{ch} \frac{\pi n}{2c} \right)^{-1} [V_{n1}(b/2) + V_{n1}(-b/2)] \quad (2.38)$$

$$V_{n1}(y) = \frac{1}{\lambda_n} \left[ \operatorname{sh} \lambda_n y \int \operatorname{ch} \lambda_n y a_{n1}(y) dy - \operatorname{ch} \lambda_n y \int \operatorname{sh} \lambda_n y a_{n1}(y) dy \right] \quad (2.39)$$

Поступая аналогично, можно найти остальные члены ряда (2.21).  
Имея функцию напряжений  $\Phi$  по формулам (2.19) и (2.20), можно определить касательные напряжения и жесткость стержня с любой точностью, зависящей от  $\delta$ .

В конкретных задачах, когда материал призматических стержней обладает цилиндрической, эллиптической и биполярно-цилиндрической ортотропией, формула (2.31) соответственно будет

$$\begin{aligned} R_k(x, y) = & (B_{k0} \operatorname{sh} \lambda_k y) \left[ \frac{2xy}{x^2 + y^2} \lambda_k \cos \lambda_k (x - x_0 + a/2) + \right. \\ & \left. + \frac{y}{x^2 + y^2} \sin \lambda_k (x - x_0 + a/2) \right] + (B_{k0} \operatorname{ch} \lambda_k y) \times \\ & \times \left[ \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \lambda_k \sin \lambda_k (x - x_0 + a/2) - \frac{x}{x^2 + y^2} \cos \lambda_k (x - x_0 + a/2) \right] - \\ & - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \lambda_k \sin \lambda_k (x - x_0 + a/2) - \frac{x}{x^2 + y^2} \cos \lambda_k (x - x_0 + a/2) \quad (2.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_k(x, y) = & \left[ (x^2 + y^2 + c_1^2)^2 - 4c_1^2 x^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left[ 2xy \lambda_k B_{k0} \operatorname{sh} \lambda_k y \cos \lambda_k (x - x_0 + a/2) + \right. \\ & \left. + (x^2 - y^2 - c_1^2) (1 - 2B_{k0} \operatorname{ch} \lambda_k y) \lambda_k \sin \lambda_k (x - x_0 + a/2) - \right. \\ & \left. - x(1 - B_{k0} \operatorname{ch} \lambda_k y) \cos \lambda_k (x - x_0 + a/2) + y B_{k0} \operatorname{sh} \lambda_k y \sin \lambda_k (x - x_0 + a/2) \right] \quad (2.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_k(x, y) = & - \left[ (x^2 + y^2)^2 + a_1^2 (-2x^2 + 2y^2 + a_1^2) \right]^{-1} \left[ 4x^2 y^2 (1 - 2B_{k0} \operatorname{ch} \lambda_k y) \times \right. \\ & \times \sin \lambda_k (x - x_0 + a/2) + 4xy (-x^2 + y^2 + a_1^2) B_{k0} \operatorname{sh} \lambda_k y \cos \lambda_k (x - x_0 + a/2) + \\ & \left. + 2x(x^2 - 3y^2 - a_1^2) (1 - 2B_{k0} \operatorname{ch} \lambda_k y) \cos \lambda_k (x - x_0 + a/2) - \right. \\ & \left. - 2y(3x^2 - y^2 - a_1^2) B_{k0} \operatorname{sh} \lambda_k y \sin \lambda_k (x - x_0 + a/2) \right] \quad (2.42) \end{aligned}$$

где  $c_1$  и  $a_1$  — действительные постоянные.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней.- М.: Изд. Наука, 1971. 240с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.-М.: Изд. Наука, 1977. 414с.
3. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.А. Кручение упругих тел. -М.: Физматгиз, 1963. 686с.
4. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела.-Ереван: Изд. ЕГУ, 1976. 534с.
5. Саркисян В.С., Нур Х.М. Об одной задаче теории кручения стержней.-Уч. записки ЕГУ, №1, 1994, с. 51-57.
6. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж. Кручение анизотропного призматического стержня с поперечным сечением в виде эллиптического полукольца.-Уч. записки ЕГУ, №1, 1996.
7. Саркисян В.С., Нур Х.М. Кручение призматического, цилиндрически-ортотропного стержня с прямоугольным сечением.-Уч. записки ЕГУ, №2, 1994.
8. Лурье А.И. Пространственная задача теории упругости. -М.: Гостехиздат, 1955.
9. Нейбер Г. Концентрация напряжений. -М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.
10. Айрапетян В.Ж., Овсепян Д.А. О решении задач кручения призматических прямолинейных анизотропных стержней в биполярных координатах.-Тез. докладов IV Междун. семинара ИФПНТ, М., 1996, с. 106-107.

Ереванский  
государственный университет

Поступила в редакцию  
26.06.1996