АЖ 412

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 539.3

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Агаловян Л.А., Саакян А.В., Саркисян А.Г.

Լ.Ա. Աղալովյան, Ա.Վ. Սահակյան, Ա.Հ. Սարգսյան

Փոփոխական առաձգական բնութագրիչներ ունեցող անիզոտրոպ շերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի մասին

Դիտարկված է փոփոխական առաձգական գործակիցներ ունեցող անիզոտրոպ շերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը, երբ նրա երեսային մակերևույթների վրա տրված են լարման տենզորի բաղադրիչները: Խնդիրը լուծված է ասիմպտոտիկ մեթոդով: Ստացված է միաչափի բերված փոփոխական գործակիցներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ: Որպես կիրառություն դիտարկված է սիլիկոնից պատրաստված օրթոտրոպ հեծանի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման խնդիրը տարբեր բեռնավորումների դեպքում: Ենթադրվում է, որ սիլիկոնի առաձգական սիմետրիայի գլխավոր ուղղությունները թեքված են կոորդինատական առանցքների նկատմամբ կամայական φ անկյունով: Որոշված են լարման և տեղափոխության դաշտերը, ստացված են գնահատականներ Բեռնուլիի վարկածի կիրառելիության վերաբերյալ: Կախված φ անկյան մեծությունից, կառուցված են տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների փոփոխությունները բնութագրող կորեր:

L.A. Aghalovian, A.V. Sahakian, A.H. Sarkissian

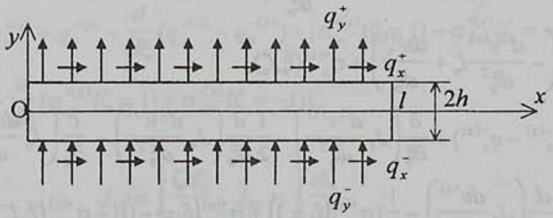
On Determination of the Stress-Strain State of an Anisotropic Strip with Variable Elastic Characteristics

Выведены рекуррентные формулы для определения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения анизотропной полосы с переменными коэффициентами упругости. Обсуждается возможность использования гипотезы плоских сечений Бернулли для расчета подобных балок-полос. Такие конструктивные элементы изготавливаются, в частности, искусственным выращиванием кристаллов и используются в современной микротехнике.

1. Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропной полосы с переменными коэффициентами упругости, занимающей область $\Omega = \{x, y: x \in [0, l], -h \le y \le h, h << l\}$, когда на лицевых поверхностях заданы компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{xy} = \pm\frac{l}{h} q_x^{\pm}(x), \qquad \sigma_y = \pm q_y^{\pm}(x) \qquad \text{при} \quad y = \pm h, \tag{1.1}$$

а на торцах $x = 0, l$ - пока еще произвольные граничные условия теории упругости (фиг.1).



Фиг.1.

Введем безразмерные координаты и компоненты вектора перемещения. В результате, основные уравнения теории упругости для поставленной задачи принимают вид

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial\zeta}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_y}{\partial\zeta}-\varepsilon^{-1}(\rho gh)=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_x+a_{12}\sigma_y+a_{16}\sigma_{xy},\quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta}=a_{12}\sigma_x+a_{22}\sigma_y+a_{26}\sigma_{xy}, \tag{1.2}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta}+\frac{\partial V}{\partial\xi}=a_{16}\sigma_x+a_{26}\sigma_y+a_{66}\sigma_{xy},$$

где $\xi=\dfrac{x}{l}$, $\zeta=\dfrac{y}{h}$, $U=\dfrac{u}{l}$, $V=\dfrac{v}{l}$, $\varepsilon=\dfrac{h}{l}$, $\rho=\rho(l\xi,h\zeta)$ – плотность, $a_{ij}=a_{ij}(\xi,\zeta)$ - коэффициенты упругости, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, u, v – компоненты вектора перемещения.

Задачу решаем асимптотическим методом интегрирования. Решение системы (1.2), как системы, сингулярно возмущенной малым параметром ε, состоит из внутреннего решения и решения типа погранслоя [1-6]. Решение внутренней задачи представим в виде

$$\sigma_x=\varepsilon^{-2+s}\sigma_x^{(s)},\quad \sigma_{xy}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{xy}^{(s)},\quad \sigma_y=\varepsilon^{s}\sigma_y^{(s)}, \tag{1.3}$$

$$U=\varepsilon^{-2+s}U^{(s)},\quad V=\varepsilon^{-3+s}V^{(s)},\qquad s=\overline{0,N}.$$

Подставляя (1.3) в уравнения (1.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, для компонентов напряжений и безразмерных перемещений получим следующую рекуррентную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial\sigma_x^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s)}}{\partial\zeta}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{xy}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_y^{(s)}}{\partial\zeta}-\rho^{(s)}g=0,$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_x^{(s)}+a_{12}\sigma_y^{(s-2)}+a_{16}\sigma_{xy}^{(s-1)}, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{12}\sigma_x^{(s-2)}+a_{22}\sigma_y^{(s-4)}+a_{26}\sigma_{xy}^{(s-3)},$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\xi}=a_{16}\sigma_x^{(s-1)}+a_{26}\sigma_y^{(s-3)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(s-2)},$$

где $\rho^{(0)}=h\rho(l\xi,h\zeta)$, $\rho^{(s)}=0,\ s\neq 0$, $Q^{(s)}=0,\ s<0$ (Q - любое из напряжений и безразмерных перемещений).

Интегрируя систему (1.4) по ζ и удовлетворяя граничным условиям (1.1), получим

$$V^{(s)}=v^{(s)}(\xi)+v^{*(s)}(\xi,\zeta),\quad U^{(s)}=-\frac{dv^{(s)}}{d\xi}\zeta+u^{(s)}(\xi)+u^{*(s)}(\xi,\zeta),$$

$$\sigma_x^{(s)}=\frac{1}{a_{11}}\left(-\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\zeta+\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)+\sigma_x^{*(s)}(\xi,\zeta),$$

$$\sigma_{xy}^{(s)}=\frac{1}{2}(q_x^{+(s)}-q_x^{-(s)})+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(J_1\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\left(J_4\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(J_0\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\left(J_5\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)-\frac{1}{2}[\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=-1)]+\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\zeta), \tag{1.5}$$

$$\sigma_y^{(s)} = \frac{1}{2}(q_y^{+(s)} - q_y^{-(s)}) - \frac{1}{2}\zeta\frac{d}{d\xi}(q_x^{+(s)} - q_x^{-(s)}) - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(J_2\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[(J_6 - \zeta J_4)\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(J_3\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[(J_7 - \zeta J_5)\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}[\sigma_y^{*(s)}(\zeta=1) + \sigma_y^{*(s)}(\zeta=-1)] - \frac{1}{2}\zeta\frac{d}{d\xi}[\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=1) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=-1)] + \sigma_y^{*(s)}(\xi,\zeta)$$

где

$$v^{*(s)} = \int_0^\zeta (a_{12}\sigma_x^{(s-2)} + a_{22}\sigma_y^{(s-4)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s-3)})d\zeta,$$

$$u^{*(s)} = \int_0^\zeta \left(a_{16}\sigma_x^{(s-1)} + a_{26}\sigma_y^{(s-3)} + a_{66}\sigma_{xy}^{(s-2)} - \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\xi}\right)d\zeta,$$

$$\sigma_x^{*(s)} = \frac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}\sigma_y^{(s-2)} - a_{16}\sigma_{xy}^{(s-1)} + \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\xi}\right), \tag{1.6}$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)} = -\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\int_0^\zeta \sigma_x^{*(s)}d\zeta\right), \quad \sigma_y^{*(s)} = -\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\int_0^\zeta \sigma_{xy}^{*(s)}d\zeta\right) + g\int_0^\zeta \rho^{(s)}d\zeta,$$

$$J_0 = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{a_{11}}, \quad J_1 = \int_0^\zeta \frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}, \quad J_2 = \int_0^\zeta d\zeta\int_0^\zeta \frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}, \quad J_3 = \int_0^\zeta d\zeta\int_0^\zeta \frac{d\zeta}{a_{11}},$$

$$J_4 = \int_0^1 \frac{\zeta d\zeta}{a_{11}} - \int_{-1}^0 \frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}, \quad J_5 = \int_0^1 \frac{d\zeta}{a_{11}} - \int_{-1}^0 \frac{d\zeta}{a_{11}},$$

$$J_6 = \int_0^1 d\zeta\int_0^\zeta \frac{\zeta d\zeta}{a_{11}} - \int_{-1}^0 d\zeta\int_0^\zeta \frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}, \quad J_7 = \int_0^1 d\zeta\int_0^\zeta \frac{d\zeta}{a_{11}} - \int_{-1}^0 d\zeta\int_0^\zeta \frac{d\zeta}{a_{11}}, \tag{1.7}$$

$$q_x^{\pm(0)} = q_x^\pm, \quad q_y^{\pm(0)} = q_y^\pm, \quad q_x^{\pm(s)} = q_y^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0.$$

Как видно из формул (1.5), все величины выражаются через функции $u^{(s)}$ (ξ) и $v^{(s)}$ (ξ). Используя условия (1.1), для определения функций $u^{(s)}$ и $v^{(s)}$ получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d}{d\xi}\left(J_{11}\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right) - \frac{d}{d\xi}\left(J_{01}\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right) = F_x^{(s)},$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(a_1\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right) + \frac{d^2}{d\xi^2}\left(a_2\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right) = F_y^{(s)}, \tag{1.8}$$

$$F_x^{(s)} = q_x^{+(s)} + q_x^{-(s)} - [\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=1) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=-1)],$$

$$F_y^{(s)} = q_y^{+(s)} + q_y^{-(s)} + \frac{d}{d\xi}(q_x^{+(s)} - q_x^{-(s)}) - [\sigma_y^{*(s)}(\zeta=1) - \sigma_y^{*(s)}(\zeta=-1)] -$$

$$-\frac{d}{d\xi}[\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=1) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=-1)],$$

где

$$J_{11} = \int_{-1}^1 \frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}, \quad J_{01} = \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{a_{11}},$$

$$a_1=\int_0^1\frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}-\int_{-1}^0\frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}-\int_{-1}^1 d\zeta\int_0^\zeta\frac{\zeta d\zeta}{a_{11}},\quad a_2=\int_{-1}^1 d\zeta\int_0^\zeta\frac{d\zeta}{a_{11}}-\int_0^1\frac{d\zeta}{a_{11}}+\int_{-1}^0\frac{d\zeta}{a_{11}}. \tag{1.9}$$

Определив из системы (1.8) функции $u^{(s)}$ и $v^{(s)}$, по формулам (1.3), (1.5)-(1.7) с предварительно заданной точностью найдем компоненты тензора напряжений и вектора перемещения.

Из полученного решения следует, что гипотезе плоских сечений Бернулли (классической теории балок) соответствует приближение $s=0$. Следовательно, для определения области применимости классической теории необходимо оценить величины, соответствующие приближению s=1. Заметим, что в случае ортотропной полосы гипотезе Бернулли соответствуют приближения $s=0{,}1$, и только начиная с приближения s=2, вносятся поправки к решению.

Из уравнений (1.8), (1.9) следует, что даже в случае принятия гипотезы плоских сечений Бернулли главная роль принадлежит коэффициенту a_{11}. Необходимо правильно определить этот коэффициент, так как в зависимости от его выбора возможны довольно большие погрешности. Аналитически невозможно точно определить a_{11}. Его можно определить обычным путем, например, из опыта растяжения-сжатия, так как $a_{11}=1/E_{11}$, где E_{11} - модуль Юнга для растяжения-сжатия вдоль оси Ox.

Исследуем систему (1.8) с целью установить, в каких случаях она разбивается на два отдельных уравнения.

1) Рассмотрим случай, когда $a_{ij}=\text{const}$. В этом случае из (1.9) получится

$$J_{11}=0,\ \ J_{01}=\frac{2}{a_{11}},\ \ a_1=\frac{2}{3}\frac{1}{a_{11}},\ \ a_2=0,$$

и (1.8) примет вид

$$-2\frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u^{(s)}}{d\xi^2}=F_x^{(s)},\qquad \frac{2}{3}\frac{1}{a_{11}}\frac{d^4v^{(s)}}{d\xi^4}=F_y^{(s)}. \tag{1.10}$$

Таким образом, система (1.8) в этом случае разбивается на два уравнения, первое из которых - уравнение растяжения-сжатия стержней [7], а второе - уравнение изгиба балок [8].

2) Пусть a_{11} - четная функция относительно координаты ζ: $a_{11}(\xi,-\zeta)=a_{11}(\xi,\zeta)$. В этом случае

$$J_{11}=0,\qquad J_{01}=2\int_0^1\frac{d\zeta}{a_{11}},\ a_1=2\int_0^1\frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}-2\int_0^1 d\zeta\int_0^\zeta\frac{\zeta d\zeta}{a_{11}},\quad a_2=0,$$

и система (1.8) примет вид

$$-\frac{d}{d\xi}\left(J_{01}\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)=F_x^{(s)},\qquad \frac{d^2}{d\xi^2}\left(a_1\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right)=F_y^{(s)}. \tag{1.11}$$

3) Пусть $a_{11}(\xi,\zeta)=a_{11\xi}(\xi)a_{11\zeta}(\zeta)$. В этом случае

$$J_{11}=\frac{1}{a_{11\xi}}J_{11\zeta},\quad J_{01}=\frac{1}{a_{11\xi}}J_{01\zeta},\qquad a_1=\frac{1}{a_{11\xi}}a_{1\zeta},\ \ a_2=\frac{1}{a_{11\xi}}a_{2\zeta},$$

где

$$J_{11\zeta}=\int_{-1}^1\frac{\zeta d\zeta}{a_{11\zeta}},\quad J_{01\zeta}=\int_{-1}^1\frac{d\zeta}{a_{11\zeta}},\quad a_{1\zeta}=\int_0^1\frac{\zeta d\zeta}{a_{11\zeta}}-\int_{-1}^0\frac{\zeta d\zeta}{a_{11\zeta}}-\int_{-1}^1 d\zeta\int_0^\zeta\frac{\zeta d\zeta}{a_{11\zeta}},$$

$$a_{2\zeta}=\int_{-1}^{1}d\zeta\int_{0}^{\zeta}\frac{d\zeta}{a_{11\zeta}}-\int_{0}^{1}\frac{d\zeta}{a_{11\zeta}}+\int_{-1}^{0}\frac{d\zeta}{a_{11\zeta}}$$

Система (1.8) принимает вид

$$J_{11\zeta}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{a_{11\xi}}\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right)-J_{01\zeta}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{a_{11\xi}}\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)=F_x^{(s)},$$

$$a_{1\zeta}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{a_{11\xi}}\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right)+a_{2\zeta}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{a_{11\xi}}\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)=F_y^{(s)}. \tag{1.12}$$

4) Пусть $a_{11}=a_{11}(\xi)$. Тогда имеем

$$J_{11}=0,\quad J_{01}=\frac{2}{a_{11}(\xi)},\quad a_1=\frac{2}{3}\frac{1}{a_{11}(\xi)},\quad a_2=0$$

и (1.8) принимает вид

$$-2\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{a_{11}(\xi)}\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)=F_x^{(s)},\qquad \frac{2}{3}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{a_{11}(\xi)}\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right)=F_y^{(s)}. \tag{1.13}$$

Таким образом, если коэффициент a_{11} не зависит от координаты ζ или относительно нее является четной функцией, то система (1.8) разбивается на два отдельных уравнения - растяжения-сжатия стержней и изгиба балок. Для приближения $s=0$, т.е. в пределах гипотезы плоских сечений, эти уравнения независимы. Начиная с $s=1$, уравнения системы (1.8) следует решать совместно, так как $F_x^{(1)}$ содержит слагаемые, обусловленные изгибом балок, а $F_y^{(1)}$ – члены, обусловленные растяжением-сжатием, которые являются известными величинами, определенными из предыдущего приближения.

2. В качестве приложения полученных общих результатов исследуем напряженно-деформированное состояние силиконовой балки при различных видах ее нагружения. Предположим, что главные направления упругой симметрии ортотропного силикона не совпадают с координатными осями и составляют с ними угол φ. Как известно, в этом случае такой материал проявляет все признаки анизотропности, т.е. в основных уравнениях фигурируют все коэффициенты упругости, характеризующие общую анизотропию.

Если через a_{ij}^0 обозначить упругие постоянные силикона, соответствующие случаю совпадения главных направлений упругой симметрии с координатными осями [9]:

$$[a_{ij}^0]=\begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{12}^0 & 0 & 0 & 0\\ a_{12}^0 & a_{11}^0 & a_{12}^0 & 0 & 0 & 0\\ a_{12}^0 & a_{12}^0 & a_{11}^0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44}^0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44}^0 \end{bmatrix}\qquad \begin{aligned} a_{11}^0&=0.76857\cdot10^{-11}\ \text{Па}^{-1}\\ a_{12}^0&=-0.21375\cdot10^{-11}\ \text{Па}^{-1}\\ a_{44}^0&=1.25786\cdot10^{-11}\ \text{Па}^{-1}\end{aligned} \tag{2.1}$$

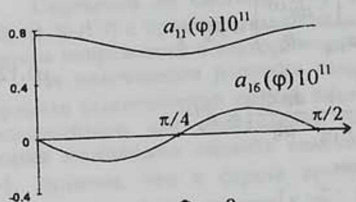
то в общем случае зависимости коэффициентов упругости силикона от угла φ будут иметь следующий вид [10,11]:

$$a_{11}(\varphi)=a_{22}(\varphi)=a_{11}^0+\frac{1}{4}(1-\cos4\varphi)b_1,\qquad a_{12}(\varphi)=a_{12}^0-\frac{1}{4}(1-\cos4\varphi)b_1,$$

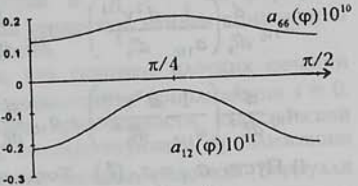
$$a_{16}(\varphi)=-a_{26}(\varphi)=\frac{1}{2}b_1\sin4\varphi,\qquad a_{66}(\varphi)=(1+\cos4\varphi)b_1+2b_2, \tag{2.2}$$

$$b_1=-a_{11}^0+a_{12}^0+\frac{1}{2}a_{44}^0,\qquad b_2=a_{11}^0-a_{12}^0,$$

графики которых приведены на фиг.2-3.



Фиг. 2



Фиг. 3

При $\varphi=\text{const}$ в системе (1.8) отделяются уравнение растяжения-сжатия и уравнение изгиба:

$$-2\frac{1}{a_{11}(\varphi)}\frac{d^2u^{(s)}}{d\xi^2}=F_x^{(s)},\qquad \frac{2}{3}\frac{1}{a_{11}(\varphi)}\frac{d^4v^{(s)}}{d\xi^4}=F_y^{(s)} \tag{2.3}$$

интегрируя которые, получим

$$u^{(s)}(\xi)=-\frac{1}{2}a_{11}(\varphi)\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi F_x^{(s)}d\xi+C_5^{(s)}\xi+C_6^{(s)},$$
$$v^{(s)}(\xi)=\frac{3}{2}a_{11}(\varphi)\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi F_y^{(s)}d\xi+C_1^{(s)}\xi^3+C_2^{(s)}\xi^2+C_3^{(s)}\xi+C_4^{(s)}, \tag{2.4}$$

и, согласно формулам (1.5), для компонентов напряжений и перемещений приближения s получим следующие выражения:

$$V^{(s)}=\frac{3}{2}a_{11}(\varphi)\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi F_y^{(s)}d\xi+C_1^{(s)}\xi^3+C_2^{(s)}\xi^2+C_3^{(s)}\xi+C_4^{(s)}+v^{*(s)}$$

$$U^{(s)}=-\frac{1}{2}a_{11}(\varphi)\left[3\zeta\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi F_y^{(s)}d\xi+\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi F_x^{(s)}d\xi\right]-$$
$$-3C_1^{(s)}\xi^2\zeta-2C_2^{(s)}\xi\zeta-C_3^{(s)}\zeta+C_5^{(s)}\xi+C_6^{(s)}+u^{*(s)}$$

$$\sigma_x^{(s)}=-\frac{1}{2}\left[3\zeta\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi F_y^{(s)}d\xi+\int_0^\xi F_x^{(s)}d\xi\right]+$$
$$+\frac{1}{a_{11}(\varphi)}[C_5^{(s)}-2\zeta(3C_1^{(s)}\xi+C_2^{(s)})]+\sigma_x^{*(s)}$$

$$\sigma_{xy}^{(s)}=\frac{1}{2}(q_x^{+(s)}-q_x^{-(s)})+\frac{3}{4}(\zeta^2-1)\int_0^\xi F_y^{(s)}d\xi+\frac{1}{2}\zeta F_x^{(s)}+$$
$$+\frac{1}{a_{11}(\varphi)}3(\zeta^2-1)C_1^{(s)}-\frac{1}{2}[\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=-1)]+\sigma_{xy}^{*(s)} \tag{2.5}$$

$$\sigma_y^{(s)}=\frac{1}{2}(q_y^{+(s)}-q_y^{-(s)})-\frac{1}{2}\zeta\frac{d}{d\xi}(q_x^{+(s)}-q_x^{-(s)})-\frac{1}{4}\zeta(\zeta^2-3)F_y^{(s)}-$$
$$-\frac{1}{4}(\zeta^2-1)\frac{dF_x^{(s)}}{d\xi}-\frac{1}{2}[\sigma_y^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_y^{*(s)}(\zeta=-1)]+$$

$$+\frac{1}{2}\zeta\frac{d}{d\xi}[\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=-1)]+\sigma_y^{*(s)}$$

где

$$v^{*(s)}=\int_0^\zeta[a_{12}(\varphi)\sigma_x^{(s-2)}+a_{11}(\varphi)\sigma_y^{(s-4)}-a_{16}(\varphi)\sigma_{xy}^{(s-3)}]d\zeta$$

$$u^{*(s)}=\int_0^\zeta\left[a_{16}(\varphi)(\sigma_x^{(s-1)}-\sigma_y^{(s-3)})+a_{66}(\varphi)\sigma_{xy}^{(s-2)}-\frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\xi}\right]d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(s)}=\frac{1}{a_{11}(\varphi)}\left[-a_{12}(\varphi)\sigma_y^{(s-2)}-a_{16}(\varphi)\sigma_{xy}^{(s-1)}+\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\xi}\right] \tag{2.6}$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)}=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\int_0^\zeta\sigma_x^{*(s)}d\zeta\right),\qquad \sigma_y^{*(s)}=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\int_0^\zeta\sigma_{xy}^{*(s)}d\zeta\right)$$

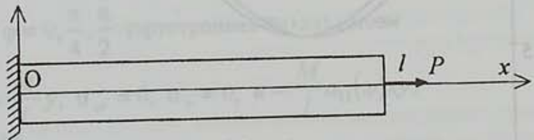
Величины $F_x^{(s)}$ и $F_y^{(s)}$ определяются по формулам (1.8).

В полученных выражениях $C_i^{(s)}$ - произвольные постоянные, которые определяются из условий в сечениях $\xi=0$ и $\xi=1$. Имея только решение внутренней задачи, этим условиям можно удовлетворить лишь в интегральной форме. Для получения более точных результатов вблизи торцов следует построить также решения погранслоя. Пограничный слой можно исследовать описанным в работах [1,3,5] путем.

В общем случае гипотезе Бернулли соответствует приближение $s=0$. При $\varphi=0,\pi/4,\pi/2$ имеем случай ортотропного материала $(a_{16}=a_{26}=0)$ и гипотезе Бернулли соответствуют приближения $s=0,1$, т.е. гипотеза Бернулли в этом случае имеет большую точность.

3. Рассмотрим некоторые частные задачи, преследуя цель выявить влияние изменения угла поворота главных направлений упругой симметрии силикона относительно координатных осей на напряженно-деформированное состояние балки.

а) Пусть силиконовая балка заделана одним концом и растягивается силой P (фиг.4).



Фиг. 4

Пользуясь выражениями (2.5), (2.6), найдем коэффициенты представления (1.3). Замечая, что приближения $s=0,1,2$ уже дают точное решение, для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения получим

$$\sigma_x=\frac{P}{2h},\ \sigma_{xy}=0,\ \sigma_{xy}=0$$

$$u=\frac{P}{2h}a_{11}(\varphi)x+\frac{P}{4h}a_{16}(\varphi)y,\qquad v=\frac{P}{4h}a_{16}(\varphi)x+\frac{P}{2h}a_{12}(\varphi)y \tag{3.1}$$

В случае, когда $\varphi=0,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}$, получается

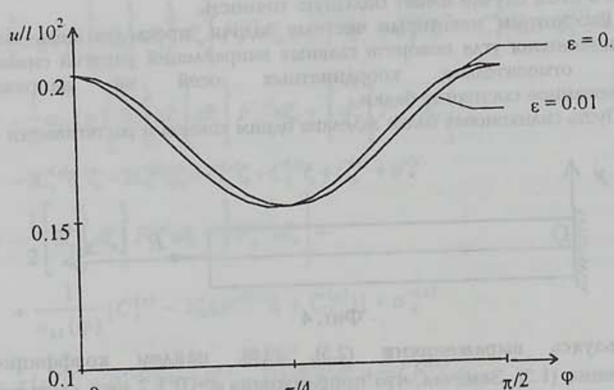
$$\sigma_x = \frac{P}{2h},\ \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_y = 0,\ u = \frac{P}{2h} a_{11}(\varphi) x,\ v = \frac{P}{2h} a_{12}(\varphi) y \qquad (3.2)$$

При применении гипотезы Бернулли имеем

$$\sigma_x = \frac{P}{2h},\ \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_y = 0,\ u = \frac{P}{2h} a_{11}(\varphi) x,\ v = 0, \qquad (3.3)$$

что соответствует слагаемым приближения s=0 в (3.1) и приближений s=0,1 в (3.2).

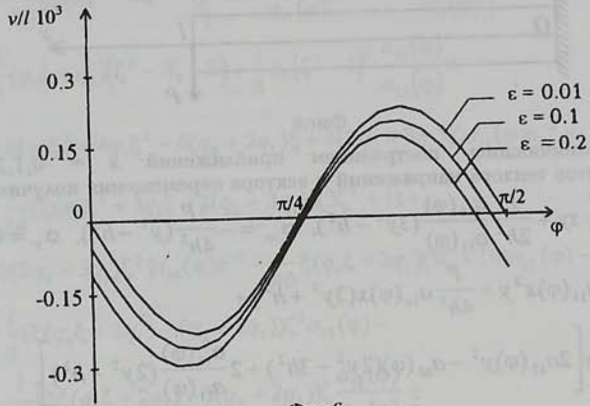
Влияние изменения угла наклона главных направлений упругой симметрии силикона относительно координатных осей на напряженно-деформированное состояние балки проследим по изменению горизонтального и вертикального перемещений некоторых точек сечения $x = l$ в зависимости от угла φ (на основании результатов (3.1)). В этой задаче горизонтальные перемещения точки $x = l, y = 0$, вычисленные по гипотезе Бернулли и без нее, совпадают. В других точках того же сечения, согласно (3.1), они различаются вследствие влияния коэффициента a_{16}, т.е. в отличие от решения по гипотезе Бернулли, сечение не остается перпендикулярным оси. Вычисления показывают, что независимо от отношения h/l, горизонтальное перемещение точки $x = l, y = 0$ балки принимает наибольшее значение при $\varphi = 0, \pi/2$, а наименьшее - при $\varphi = \pi/4$, и разница между этими значениями составляет примерно 30%. Для других точек сечения $x = l$ некоторое влияние на эти значения оказывает и изменение значения $\varepsilon = h/l$. Например, разница между максимальным и минимальным значениями горизонтального перемещения точки $x = l,\ y = h$ балки при изменении значения ε от 0.01 до 0.2 увеличивается на 1% (фиг.5).



Фиг. 5

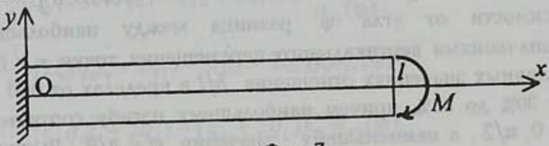
На фиг.5 представлены безразмерные горизонтальные перемещения $U = u/l$ точки (l, h), вычисленные по формуле (3.1) для случаев ε=0.01 и ε =0.2, где для удобства вычислений взято $Pa_{11}^{0}/(2h) = 0.2 \cdot 10^{-2}$.

Что касается вертикального перемещения, то, в то время, как при применении гипотезы Бернулли оно отсутствует, здесь в зависимости от угла φ оно может принимать отрицательные и положительные значения (фиг.6), что обусловлено соотношением коэффициентов a_{12} и a_{16}.



Фиг.6

б) Пусть балка одним концом заделана, а на другом конце загружена изгибающим моментом M (фиг.7).



Фиг. 7

Для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения получается

$$\sigma_x = \frac{M}{I},\ \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_y = 0\ ,\ u = \frac{M}{I}\left[a_{11}(\varphi)xy + \frac{a_{16}(\varphi)}{2}y^2\right] \tag{3.4}$$

$$v = \frac{M}{2I}[a_{12}(\varphi)y^2 - a_{11}(\varphi)x^2] \qquad (I = \frac{2}{3}h^3)$$

При $\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ (ортотропная балка) имеем

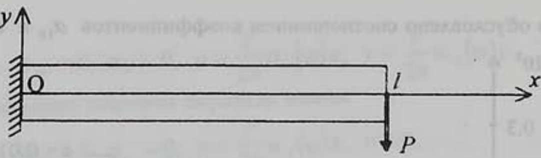
$$\sigma_x = \frac{M}{I}y,\ \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_y = 0,\ u = \frac{M}{I}a_{11}(\varphi)xy,$$
$$v = \frac{M}{2I}[a_{12}(\varphi)y^2 - a_{11}(\varphi)x^2] \tag{3.5}$$

По гипотезе Бернулли получается

$$\sigma_x = \frac{M}{I}y,\ \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_y = 0,\ u = \frac{M}{I}a_{11}(\varphi)xy,\ v = -\frac{M}{2I}a_{11}(\varphi)x^2. \tag{3.6}$$

Наблюдая за точкой $x = l$, $y = 0$ по (3.4), замечаем, что горизонтальное перемещение отсутствует, а закон изменения вертикального перемещения при $Mla_{11}^0/(2I) = 0.002$ совпадает с законом изменения горизонтального перемещения со знаком "минус" той же точки в предыдущей задаче. Наблюдая за другими точками сечения $x = l$ балки, приходим к выводу, что сечение не остается плоским.

в) Пусть консольная балка изгибается под действием силы, изображенной на фиг.8.



Фиг.8

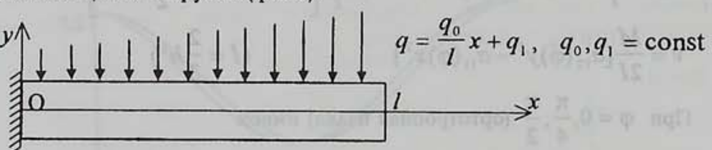
Ограничившись построением приближений $s = 0,1,2$, для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения получим

$$\sigma_x = \frac{3P}{2h^3}xy + \frac{P}{2h^3}\frac{a_{16}(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}(3y^2 - h^2),\ \ \sigma_{xy} = -\frac{3P}{4h^3}(y^2 - h^2),\ \ \sigma_y = 0,$$

$$u = \frac{3P}{4h^3}a_{11}(\varphi)x^2y + \frac{P}{4h^3}a_{16}(\varphi)x(3y^2 + h^2) +$$
$$+ \frac{P}{8h^3}y\left[2a_{12}(\varphi)y^2 - a_{66}(\varphi)(2y^2 - 3h^2) + 2\frac{a_{16}^2(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}(2y^2 - h^2)\right], \tag{3.7}$$
$$v = -\frac{P}{4h^3}a_{11}(\varphi)x^3 + \frac{P}{8h^3}x\left[6a_{12}(\varphi)y^2 + \left(3a_{66}(\varphi) - 2\frac{a_{16}^2(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}\right)h^2\right].$$

В зависимости от угла φ разница между наибольшим и наименьшим значениями вертикального перемещения точки $x = l$, $y = 0$ балки при различных значениях отношения h/l в пределах от 0.01 до 0.2 колеблется от 30% до 45%, причем наибольшему изгибу соответствуют значения $\varphi = 0, \pi/2$, а наименьшему - значение $\varphi = \pi/4$. Вычисления также показывают, что при $\varepsilon < 0.2$ различие значений вертикального перемещения рассматриваемой точки, вычисленных по гипотезе Бернулли и без нее, не превышает 20%.

г) Пусть консольная балка изгибается под действием линейно изменяющейся нагрузки (фиг.9).



Фиг. 9

Ограничившись построением приближений s=0,1,2, для напряжений и перемещений будем иметь

$$\sigma_x = \frac{1}{4}\left[q_0\xi^3 + 3q_1\xi^2 - 3(q_0 + 2q_1)\xi + 2q_0 + 3q_1\right]\zeta\varepsilon^{-2} + \frac{1}{4}\left(q_0\xi^2 + 2q_1\xi - q_0 - 2q_1\right)\times$$
$$\times\left(3\zeta^2 - 1\right)\frac{a_{16}(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}\varepsilon^{-1} - \frac{1}{20}\left(q_0\xi + q_1\right)\zeta\left(5\zeta^2 - 3\right)\left[\frac{2a_{12}(\varphi) + a_{66}(\varphi)}{a_{11}(\varphi)} - 4\frac{a_{16}^2(\varphi)}{a_{11}^2(\varphi)}\right],$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{3}{8}\left(q_0\xi^2 + 2q_1\xi - q_0 - 2q_1\right)\left(\zeta^2 - 1\right)\varepsilon^{-1} -$$
$$-\frac{1}{2}\left(q_0\xi + q_1\right)\zeta\left(\zeta^2 - 1\right)\frac{a_{16}(\varphi)}{a_{11}(\varphi)} +$$

$$+\frac{1}{80}q_0\left(5\zeta^4-6\zeta^2+1\right)\left[\frac{2a_{12}(\varphi)+a_{66}(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}-4\frac{a_{16}^2(\varphi)}{a_{11}^2(\varphi)}\right]\varepsilon$$

$$\sigma_y=\frac{1}{4}(q_0\xi+q_1)\left(\zeta^3-3\zeta-2\right)+\frac{1}{8}q_0\left(\zeta^2-1\right)^2\frac{a_{16}(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}\varepsilon$$

$$u=\frac{l}{16}\xi[q_0\xi^3+4q_1\xi^2-6(q_0+2q_1)\xi+4(2q_0+3q_1)]\zeta a_{11}(\varphi)\varepsilon^{-2}+$$

$$+\frac{l}{24}[\xi(q_0\xi^2+3q_1\xi-3(q_0+2q_1))(3\zeta^2+1)+$$

$$+3(2q_0+3q_1)\zeta^2]a_{16}(\varphi)\varepsilon^{-1}-\frac{l}{40}\xi(q_0\xi+2q_1)(9\zeta+10)a_{12}(\varphi)-$$

$$-\frac{l}{8}(\xi(q_0\xi+2q_1)-(q_0+2q_1))\zeta^3a_{12}(\varphi)-$$

$$-\frac{l}{40}[2\xi(q_0\xi+2q_1)-5(q_0+2q_1)]\zeta\frac{a_{16}^2(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}+$$

$$+\frac{l}{4}(\xi(q_0\xi+2q_1)-(q_0+2q_1))\zeta^3\frac{a_{16}^2(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}+$$

$$+\frac{3l}{80}[2\xi(q_0\xi+2q_1)-5(q_0+2q_1)]\zeta a_{66}(\varphi)-$$

$$-\frac{l}{8}(\xi(q_0\xi+2q_1)-(q_0+2q_1))\zeta^3a_{66}(\varphi), \tag{3.8}$$

$$v=-\frac{l}{80}\xi^2\left[q_0\xi^3+5q_1\xi^2-10(q_0+2q_1)\xi+10(2q_0+3q_1)\right]a_{11}(\varphi)\varepsilon^{-3}+$$

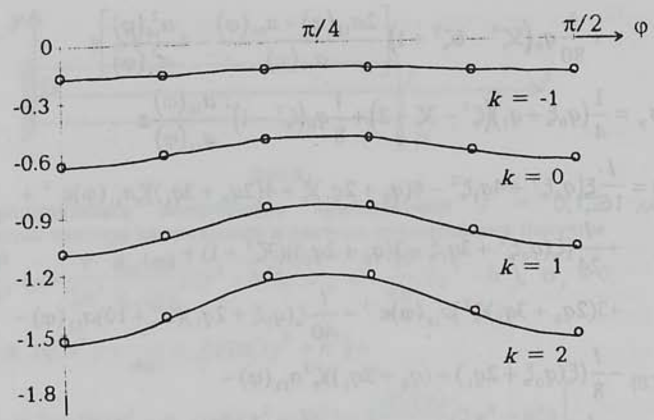
$$+\left\{\left[3\xi^2(q_0\xi+3q_1)+5\left[q_0\xi^3+3q_1\xi^2-3(q_0+2q_1)\xi+2q_0+3q_1\right]\right]\frac{l}{40}\zeta^2a_{12}(\varphi)-\right.$$

$$\left.-\frac{l}{240}\xi\left[8\xi(q_0\xi+3q_1)-15(q_0+2q_1)\right]\left[2\frac{a_{16}^2(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}-3a_{66}(\varphi)\right]\right\}\varepsilon^{-1}$$

Зависимость от угла φ вертикального перемещения ($v/l\cdot10^2$) точки $x=l$, $y=0$ балки изображена на фиг.10, где взято $q_1a_{11}^0=0.33\cdot10^{-4}$, $k=q_0/q_1$, $\varepsilon=0.1$.

В этой задаче при $\varepsilon<0.2$ различие значений вертикального перемещения точки $(l,0)$, вычисленных по гипотезе Бернулли и без нее, не превышает 8%.

Наблюдение за различными точками одного и того же сечения приводит к выводу, что в первой из рассмотренных задач сечение, оставаясь плоским, поворачивается (т.е. не остается перпендикулярным оси), а в остальных - оно не остается плоским. Вследствие этого использование гипотезы плоских сечений в зависимости от области применения может привести к серьезным качественным ошибкам даже в случае небольшого количественного различия решений, полученных по гипотезе Бернулли и без нее.



Фиг. 10. Через о обозначены соответствующие значения, вычисленные по гипотезе Бернулли

Как показывают вычисления, при допущении применения гипотезы Бернулли очень важно правильно определить коэффициент a_{11}. В зависимости от точности его определения погрешность может достигнуть 30%.

4. Из выполненных вычислений можно сделать следующие заключения:

а) для получения точных результатов очень важен правильный выбор коэффициента $a_{11}(\varphi)$, так как в зависимости от угла φ различие значений искомых величин может достигнуть 30%;

б) если силиконовая балка нагружена только по торцам, то о ее напряженно-деформированном состоянии достаточно близкое к реальному представление можно получить из решения аналогичной задачи для изотропной балки с модулем Юнга $E_{*} = \dfrac{1}{a_{11}(\varphi)}$;

в) удовлетворение лишь решением, соответствующим гипотезе Бернулли, влечет к качественным ошибкам, которые могут играть определяющую роль в измерительных и других точных приборах. В подобных случаях необходимо воспользоваться полученными асимптотическими решениями, в частности, решениями типа (3.1), (3.4), (3.7), (3.8), которые учитывают качественные факторы, обусловленные реальными свойствами материала.

Авторы весьма признательны профессору А.Тер-Кюрегяну (США, ун-т Беркли), привлекшего их внимание к этой проблеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. 272с.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. 464с.
3. Агаловян Л.А. О характере взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы. – Изв. АН Армении, Механика, 1977, т.30, №5, с.48-62.
4. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. – ПММ, 1962, т.26, №4, с.668-686.
5. Хачатрян Ш.М. К определению напряженно-деформированного состояния анизотропной полосы. – Изв. АН Армении, Механика, 1976, т.29, №6, с.19-32.
6. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. 535с.
7. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1975, т. I. 832 с.
8. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965, т. I. 363с.
9. Pampuch R. Constitution and Properties of Ceramic Materials. – Materials Science Monographs, 58, Elsevier Science Pub. Co., Inc., New York, 1991.
10. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. – М.: Физматгиз, 1961. 384с.
11. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. 415с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
14.11.1996