ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 539.3

СИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЕРТИКАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Тоноян В.С., Мелкумян Н.С.

Վ.Ս. Տոնոյան, Ն.Ս. Մելքումյան

Ուղղահայաց ճեղքերով պյեզոկերամիկ կիսահարթության համար էլեկտրաառաձգականության սիմետրիկ եզրային խնդիրներ

Դիտարկված է նախապես բևեռացված պյեզոկերամիկ կիսահարթության համար էլեկտրաառաձգականության տեսության հարթ սիմետրիկ երկու խնդիր, երբ կիսահարթությունը թուլացված է կամ եզրից վերջավոր հեռավորության վրա կիսաանվերջ կամ էլ դեպի եզր դուրս եկող վերջավոր ուղղահայաց ճեղքով: Նախնական բևեռացման ուղղությունը զուգահեռ է ճեղքի առանցքին: Կիսահարթության եզրի վրա տրված են մեխանիկական լարումների վեկտորը և էլեկտրական ինդուկցիայի նորմալ բաղադրիչը, իսկ ճեղքի ափերի վրա տրված են նորմալ ճնշումը և էլեկտրական պոտենցիալը: Խնդրի լուծումը զույգ ինտեգրալ հավասարումների մեթոդով բերվել է Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը: Ցույց է տրված վերջին հավասարման լուծելիությունը: Ստացված են անալիտիկ բանաձևեր մեխանիկական նորմալ լարման և էլեկտրական ինդուկցիայի նորմալ բաղադրիչի համար անջատված եզակիությամբ:

V.S. Tonoyan, N.S. Melkumian

Symmetric boundary-value problems of electroelasticity for a piezoceramic semi-plane with vertical cuts

Рассматриваются две симметричные задачи плоской теории электроупругости для предварительно поляризованной пьезокерамической полуплоскости, когда полуплоскость ослаблена или конечным, или полубесконечным вертикальным разрезом. Направление предварительной поляризации параллельно оси разреза. Решение задач методом парных интегральных уравнений сведено к решению интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость последнего уравнения. Получены аналитические формулы для нормального механического напряжения, касательного компонента векторов электрической индукции и напряженности на линии продолжения разреза с выделенной корневой особенностью.

Пьезокерамики в качестве активных элементов современных электромеханических преобразователей энергии для существующих типов ультразвуковых излучателей из пьезокерамики силовых пьезотрансформаторов, искровых пьезогенераторов и других ограничиваются механической и электрической прочностями керамики. Как механическая, так и электрическая прочности заметно снижаются при наличии в керамике дефектов типа трещин, полостей и инородных включений.

В связи с этим представляет интерес исследование сопряженных электроупругих полей вблизи различного типа дефектов в керамике. К настоящему времени достаточно исследованы смешанные задачи для упругих тел с указанными типами дефектов при действии механических и тепловых нагрузок. Однако смешанные задачи для упругих тел с дефектами типа трещин, полостей и инородных включений при наличии связанных полей различной природы до сих пор изучены недостаточно, нам известны лишь немногочисленные задачи, и то, для бесконечных тел.

Электроупругое состояние пьезокерамической полости, поляризованной в направлении оси симметрии, с прямолинейной трещиной конечной длины, параллельной оси симметрии, при равномерном растяжении на бесконечности в направлении, перпендикулярном оси трещин, рассмотрено в работе [1]. Симметричная задача плоской теории электроупругости для пьезокерамической полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом, поляризованной в направлении, перпендикулярном к оси разреза, рассмотрена в работе [2].

В настоящей работе рассматриваются две симметричные задачи плоской теории электроупругости для предварительно поляризованной пьезокерамической полуплоскости, когда полуплоскость ослаблена или конечным, или полубесконечным вертикальным разрезом. Направление предварительной поляризации параллельно оси разреза. На границе полуплоскости заданы вектор механических напряжений и нормальная составляющая электрической индукции, а на берегах разреза – нормальное давление и нормальная составляющая электрической индукции. Полуплоскость граничит с вакуумом. Задачи решены методом Фурье. Решение каждой задачи представлено в виде суммы интегралов Фурье. Определение неизвестных функций интегрирования сведено к решению сперва парного интегрального уравнения, а затем к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость последнего уравнения. Получены аналитические формулы для нормального механического напряжения, касательного компонента векторов электрической индукции и напряженности на линии продолжения разреза с выделенной корневой особенностью.

Рассмотрим электроупругое состояние плоской деформации пьезокерамической полуплоскости $z \ge 0, |x| < \infty$, поляризованной в направлении оси oz, которая имеет:

1) на конечном расстоянии a от горизонтальной границы вертикальный полубесконечный разрез (первая задача);

2) начиная от горизонтальной границы конечный вертикальный разрез (вторая задача).

На границе полуплоскости с вакуумом задан вектор механических напряжений и нормальная составляющая электрической индукции, а на берегах разреза – нормальное давление и нормальная составляющая электрической индукции.

Так как задачи симметричны относительно вертикальных разрезов, то можно ограничиться рассмотрением только квадранта $(x \ge 0,\ z \ge 0)$. Известно, что поставленные электроупругие задачи математически сводятся к решению уравнений равновесия (1.72), электростатики (1.73) и состояния среды (1.74), а также соотношений Коши (1.75) работы [3] со следующими граничными условиями:

$$\sigma_z(x,0) = f_1(x),\ \tau_{xz}(x,0) = f_2(x),\ D_z(x,0) = 0 \qquad (0 \le x < \infty) \tag{1}$$

$$\tau_{xz}(0,z) = 0,\ D_x(0,z) = 0 \qquad (0 \le z < \infty)$$

$$U_x(0,z) = 0 \quad (0 \le z \le a);\quad \sigma_x(0,z) = f_3(z) \quad (a < z < \infty) \tag{2}$$

$$\sigma_x(0,z) = f_3(z) \quad (0 \le z < a);\quad U_x(0,z) = 0 \quad (a < z < \infty) \tag{3}$$

где $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ – компоненты тензора механических напряжений, U_x, U_z – проекции вектора перемещений, D_x, D_z – компоненты вектора электрической индукции. Причем граничные условия (1) и (2) соответствуют первой задаче, а (1) и (3) – второй задаче. Решение для обеих задач ищем в виде суммы интегралов Фурье

$$U_x(x,z) = \frac{1}{c_{11}^E}\int_0^\infty \alpha \overline{U}(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha - \frac{1}{c_{11}^E}\int_0^\infty \beta \overline{U}(\beta,x)\sin\beta z d\beta$$

$$U_z(x,z) = \frac{1}{c_{44}^E}\int_0^\infty \alpha \overline{W}(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha - \frac{1}{c_{44}^E}\int_0^\infty \beta \overline{W}(\beta,x)\sin\beta z d\beta$$

полубесконечным разрезом, поляризованной в направлении, перпендикулярном к оси разреза, рассмотрена в работе [2].

В настоящей работе рассматриваются две симметричные задачи плоской теории электроупругости для предварительно поляризованной пьезокерамической полуплоскости, когда полуплоскость ослаблена или конечным, или полубесконечным вертикальным разрезом. Направление предварительной поляризации параллельно оси разреза. На границе полуплоскости заданы вектор механических напряжений и нормальная составляющая электрической индукции, а на берегах разреза – нормальное давление и нормальная составляющая электрической индукции. Полуплоскость граничит с вакуумом. Задачи решены методом Фурье. Решение каждой задачи представлено в виде суммы интегралов Фурье. Определение неизвестных функций интегрирования сведено к решению сперва парного интегрального уравнения, а затем к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость последнего уравнения. Получены аналитические формулы для нормального механического напряжения, касательного компонента векторов электрической индукции и напряженности на линии продолжения разреза с выделенной корневой особенностью.

Рассмотрим электроупругое состояние плоской деформации пьезокерамической полуплоскости $z \geq 0, |x| < \infty$, поляризованной в направлении оси oz, которая имеет:

1) на конечном расстоянии a от горизонтальной границы вертикальный полубесконечный разрез (первая задача);

2) начиная от горизонтальной границы конечный вертикальный разрез (вторая задача).

На границе полуплоскости с вакуумом задан вектор механических напряжений и нормальная составляющая электрической индукции, а на берегах разреза – нормальное давление и нормальная составляющая электрической индукции.

Так как задачи симметричны относительно вертикальных разрезов, то можно ограничиться рассмотрением только квадранта $(x \geq 0,\ z \geq 0)$. Известно, что поставленные электроупругие задачи математически сводятся к решению уравнений равновесия (1.72), электростатики (1.73) и состояния среды (1.74), а также соотношений Коши (1.75) работы [3] со следующими граничными условиями:

$$\sigma_z(x,0) = f_1(x),\ \tau_{xz}(x,0) = f_2(x),\ D_z(x,0) = 0 \qquad (0 \leq x < \infty) \tag{1}$$

$$\tau_{xz}(0,z) = 0,\ D_x(0,z) = 0 \qquad (0 \leq z < \infty)$$

$$U_x(0,z) = 0 \quad (0 \leq z \leq a);\quad \sigma_x(0,z) = f_3(z) \quad (a < z < \infty) \tag{2}$$

$$\sigma_x(0,z) = f_3(z) \quad (0 \leq z < a);\quad U_x(0,z) = 0 \quad (a < z < \infty) \tag{3}$$

где $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ – компоненты тензора механических напряжений, U_x, U_z – проекции вектора перемещений, D_x, D_z – компоненты вектора электрической индукции. Причем граничные условия (1) и (2) соответствуют первой задаче, а (1) и (3) – второй задаче. Решение для обеих задач ищем в виде суммы интегралов Фурье

$$U_x(x,z) = \frac{1}{c_{11}^E}\int_0^\infty \alpha\overline{U}(\alpha,z)\sin\alpha x\,d\alpha - \frac{1}{c_{11}^E}\int_0^\infty \beta\overline{U}(\beta,x)\sin\beta z\,d\beta$$

$$U_z(x,z) = \frac{1}{c_{44}^E}\int_0^\infty \alpha\overline{W}(\alpha,z)\sin\alpha x\,d\alpha - \frac{1}{c_{44}^E}\int_0^\infty \beta\overline{W}(\beta,x)\sin\beta z\,d\beta$$

и $B_k(\beta)$.

Для первой задачи, удовлетворяя граничным условиям (1) и (2), получим [4]

$$B_k(\beta) = C_k B_1(\beta),\quad A_j(\alpha) = d_j A_1(\alpha) + P_j \varphi_1(\alpha) \tag{10}$$

$$A_1(\alpha) = -\frac{m_{12}}{m_{11}}\varphi_1(\alpha) + \frac{1}{m_{11}}\varphi_2(\alpha) - \frac{2}{\pi m_{11}\alpha}\sum_{k=1}^{3} b_{2k} C_k \int_0^\infty \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2 t_k^{-2}} d\beta \tag{11}$$

$$\int_0^\infty \beta B_1(\beta)\sin\beta z d\beta = 0 \qquad (0 \le z \le a)$$

$$\int_0^\infty \beta^2 B_1(\beta)\sin\beta z d\beta = \frac{1}{n_{12}} f_3(z) - \frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3} a_{4j} P_j \int_0^\infty \alpha^2 \varphi_1(\alpha) e^{-\alpha t_j z} d\alpha -$$

$$-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3} a_{4j} P_j \int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha) e^{-\alpha t_j z} d\alpha \qquad (a < z < \infty) \tag{12}$$

где

$$C_1 = 1;\quad C_2 = \frac{b_{13}b_{21} - b_{11}b_{23}}{b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}};\quad C_3 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}}$$

$$d_1 = 1;\quad d_2 = \frac{a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}};\quad d_3 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}$$

$$P_1 = 0;\quad P_2 = -\frac{a_{13}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}};\quad P_3 = \frac{a_{12}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}} \tag{13}$$

$$m_{11} = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} d_j;\quad m_{12} = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} P_j$$

$$b_{1k} = \Delta_1(t_k) t_k + \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k}\frac{c_{11}^E}{c_{44}^E} + \frac{\Delta_3(t_k)}{t_k}\frac{c_{11}^E \varepsilon_{11}^s}{e_{15}^2}$$

$$b_{2k} = \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E}\Delta_1(t_k) t_k + \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k} - \frac{\Delta_3(t_k)}{t_k}$$

$$a_{1j} = t_j\left[\frac{e_{31}}{e_{15}}\Delta_1(t_j) - \frac{c_{11}^E}{c_{44}^E}\frac{e_{33}}{e_{15}}\Delta_2(t_j) - \frac{c_{11}^E \varepsilon_{33}^s}{e_{15}^2}\Delta_3(t_j)\right]$$

$$a_{2j} = t_j\left[\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E}\Delta_1(t_j) - \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E}\Delta_2(t_j) + \frac{e_{33}}{e_{15}}\Delta_3(t_j)\right]$$

$$a_{3j} = \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E}\Delta_1(t_j) t_j^2 + \Delta_2(t_j) - \Delta_3(t_j)$$

$$\varphi_1(\alpha) = \frac{2}{\pi\alpha^2}\int_0^\infty f_1(x)\cos\alpha x dx,\quad \varphi_2(\alpha) = -\frac{2}{\pi\alpha^2}\int_0^\infty f_2(x)\sin\alpha x dx$$

$$n_{12} = \sum_{k=1}^{3} b_{3k} C_k;\quad b_{3k} = \Delta_1(t_k) - \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E}\Delta_2(t_k) + \frac{e_{13}}{e_{15}}\Delta_3(t_k)$$

$$a_{4j} = t_j\left[\Delta_1(t_j) - \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E}\Delta_2(t_j) + \frac{e_{13}}{e_{15}}\Delta_3(t_j)\right] \tag{14}$$

Решая парное интегральное уравнение (12) методом преобразующих операторов [5], имеем

$$B_1(\beta)=\frac{2}{\pi\beta}\int_a^\infty r\varphi_3(r)J_0(\beta r)dr+\frac{2}{\pi\beta}\int_a^\infty r\varphi_1^*(r)J_0(\beta r)dr+\frac{2}{\pi\beta}\int_a^\infty rF(r)J_0(\beta r)dr \quad (15)$$

Здесь

$$\varphi_3(r)=\frac{1}{n_{12}}\int_r^\infty\frac{f_3(z)}{\sqrt{z^2-r^2}}dz$$

$$\varphi_1^*(r)=-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^3 a_{4j}P_j\int_0^\infty\alpha^2\varphi_1(\alpha)K_0(\alpha t_j r)d\alpha$$

$$F(r)=-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^3 a_{4j}d_j\int_0^\infty\alpha^2 A_1(\alpha)K_0(\alpha t_j r)d\alpha \quad (16)$$

$J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода с действительным аргументом, $K_\nu(z)$ – функция Макдональда.

Имея в виду (16), исключая $A_1(\alpha)$ из (11) и (15), для определения $B(\beta)=\beta B_1(\beta)$ получим следующее интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$B(\beta)=\Omega(\beta)+\int_0^\infty K(\beta,\gamma)B(\gamma)d\gamma \quad (17)$$

где

$$K(\beta,\gamma)=\frac{2\gamma}{\pi^2 n_{12}m_{11}}\sum_{j=1}^3 a_{4j}d_j\sum_{k=1}^3 b_{2k}C_k\int_0^\infty\frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+\gamma^2 t_k^{-2}}\int_a^\infty rK_0(\alpha t_j r)J_0(\beta r)dr \quad (18)$$

$$\Omega(\beta)=\frac{2}{\pi}\int_a^\infty r\varphi_3(r)J_0(\beta r)dr-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^3 a_{4j}P_j\int_0^\infty\alpha^2\varphi_1(\alpha)d\alpha\int_a^\infty rK_0(\alpha t_j r)J_0(\beta r)dr-$$

$$-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^3 a_{4j}d_j\int_0^\infty\alpha^2\left[\frac{\varphi_2(\alpha)}{m_{11}}-\frac{m_{12}\varphi_1(\alpha)}{m_{11}}\right]d\alpha\int_a^\infty rK_0(\alpha t_j r)J_0(\beta r)dr \quad (19)$$

Используя результаты работы [5], имея в виду [4], что

$$\int_a^\infty rK_0(\alpha t_j r)J_0(\beta r)dr<\int_0^\infty rK_0(\alpha t_j r)J_0(\beta r)dr=\frac{1}{\alpha^2 t_j^2+\beta^2}$$

$$\int_0^\infty\frac{\alpha d\alpha}{(\alpha^2 t_k^2+\gamma^2)(\alpha^2 t_j^2+\beta^2)}=\frac{\ln(t_j\gamma/t_k\beta)}{t_k^2\beta^2-t_j^2\gamma^2}$$

и перейдя к новым переменным $\beta=t_je^\eta$, $\gamma=t_ke^\chi$, используя значение интеграла [4] $\int_{-\infty}^\infty\frac{\zeta d\zeta}{\mathrm{sh}\zeta}=\frac{\pi^2}{2}$, где $\zeta=\eta-\chi$, доказана разрешимость уравнения (17) для пьезокерамики $PZT-4$.

Решая уравнение (17) и используя соотношения (10), (11), можно определить все искомые функции интегрирования, а следовательно, при помощи (4), (5) и основных соотношений электроупругости, все компоненты сопряженного электроупругого поля в любой точке полуплоскости. В частности, электроупругие компоненты на продолжении линии вне разреза определяются формулами

$$\sigma_x(0,z)=\frac{2n_{12}}{\pi}z\left[\frac{\varphi_3(a)+\varphi_1^*(a)+F(a)}{\sqrt{a^2-z^2}}-\int_a^\infty\frac{\varphi_3'(r)+\left[\varphi_1^*(r)\right]'+F'(r)}{\sqrt{r^2-z^2}}dr\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}a_{4j}\int_0^\infty\alpha^2A_j(\alpha)\exp\left(-\alpha t_jz\right)d\alpha\qquad(0\le z<a)\tag{20}$$

$$D_z(0,z)=\frac{2n_{13}e_{15}}{\pi c_{11}^E}z\left[\frac{\varphi_3(a)+\varphi_1^*(a)+F(a)}{\sqrt{a^2-z^2}}-\int_a^\infty\frac{\varphi_3'(r)+\left[\varphi_1^*(r)\right]'+F'(r)}{\sqrt{r^2-z^2}}dr\right]+$$

$$+\frac{e_{15}}{c_{11}^E}\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\int_0^\infty\alpha^2A_j(\alpha)\exp\left(-\alpha t_jz\right)d\alpha\qquad(0\le z<a)\tag{21}$$

$$E_z(0,z)=-\frac{2n_{14}}{\pi e_{15}}z\left[\frac{\varphi_3(a)+\varphi_1^*(a)+F(a)}{\sqrt{a^2-z^2}}-\int_a^\infty\frac{\varphi_3'(r)+\left[\varphi_1^*(r)\right]'+F'(r)}{\sqrt{r^2-z^2}}dr\right]-$$

$$-\frac{1}{e_{15}}\sum_{j=1}^{3}t_j\Delta_3\left(t_j\right)\int_0^\infty\alpha^2A_j(\alpha)\exp\left(-\alpha t_jz\right)d\alpha\qquad(0\le z<a)\tag{22}$$

где

$$n_{14}=\sum_{k=1}^{3}\Delta_3\left(t_k\right)C_k,\quad n_{13}=\sum_{k=1}^{3}b_{4k}C_k$$

$$b_{4k}=\frac{e_{31}}{e_{15}}\Delta_1\left(t_k\right)-\frac{c_{11}^E}{c_{44}^E}\frac{e_{33}}{e_{15}}\Delta_2\left(t_k\right)-\frac{c_{11}^E}{e_{15}}\frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}}\Delta_3\left(t_k\right)\tag{23}$$

$$F(r)=\frac{1}{n_{12}}\frac{m_{12}}{m_{11}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\int_0^\infty\alpha^2\varphi_1(\alpha)K_0\left(\alpha rt_j\right)d\alpha-$$

$$-\frac{1}{n_{12}}\frac{1}{m_{11}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\int_0^\infty\alpha^2\varphi_2(\alpha)K_0\left(\alpha rt_j\right)d\alpha-$$

$$-\frac{2}{\pi n_{12}m_{11}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\sum_{k=1}^{3}b_{2k}C_k\int_0^\infty\alpha K_0\left(\alpha rt_j\right)d\alpha\int_0^\infty\frac{\beta B(\beta)}{\alpha^2+\beta^2t_k^{-2}}d\beta\tag{24}$$

$$A_j(\alpha)=P_j\varphi_1(\alpha)-d_j\frac{m_{12}}{m_{11}}\varphi_1(\alpha)+d_j\frac{1}{m_{11}}\varphi_2(\alpha)-$$

$$-\frac{2d_j}{\pi m_{11}\alpha}\sum_{k=1}^{3}b_{2k}C_k\int_0^\infty\frac{\beta B(\beta)}{\alpha^2+\beta^2t_k^{-2}}d\beta\tag{25}$$

Для второй задачи, удовлетворяя граничным условиям (1) и (3), получаем соотношения (10), (11), (13), (14), а вместо парного интегрального уравнения (12) – следующее парное интегральное уравнение:

$$\int_0^\infty\beta^2B_1(\beta)\sin\beta z d\beta=\frac{1}{n_{12}}f_3(z)-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}P_j\int_0^\infty\alpha^2\varphi_1(\alpha)e^{-\alpha t_jz}d\alpha-$$

$$-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}P_j\int_0^\infty\alpha^2A_1(\alpha)e^{-\alpha t_jz}d\alpha\qquad(0<z<a)$$

$$\int_0^\infty\beta B_1(\beta)\sin\beta z d\beta=0\qquad(a<z<\infty)\tag{26}$$

Решая уравнение (26) методом преобразующих операторов [6], получим:

$$B_1(\beta)=\frac{2}{\pi\beta}\int_0^a \varphi_4(t)J_1(\beta t)dt+\frac{2}{\pi\beta}\int_0^a \varphi_5(t)J_1(\beta t)dt+\frac{2}{\pi\beta}\int_0^a \psi(t)J_1(\beta t)dt \quad (27)$$

Здесь

$$\varphi_4(t)=\frac{1}{n_{12}}\int_0^t \frac{zf_3(z)}{\sqrt{t^2-z^2}}dz \quad (28)$$

$$\varphi_5(t)=-\frac{t}{n_{12}}\sum_{j=1}^3 a_{4j}P_j\int_0^\infty \alpha^2\varphi_1(\alpha)\left[L_1(\alpha t_j t)-I_1(\alpha t_j t)+\frac{2}{\pi}\right]d\alpha \quad (29)$$

$$\psi(t)=-\frac{t}{n_{12}}\sum_{j=1}^3 a_{4j}d_j\int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha)\left[L_1(\alpha t_j t)-I_1(\alpha t_j t)+\frac{2}{\pi}\right]d\alpha \quad (30)$$

$I_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента, $L_\nu(z)$ – функция Струве от мнимого аргумента.

Имея в виду (30), исключая из (11) и (27) $A_1(\alpha)$, для определения $B(\beta)=\beta B_1(\beta)$ получаем интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода (17), где

$$K(\beta,\gamma)=\frac{2\gamma}{\pi n_{12}m_{11}}\sum_{j=1}^3 a_{4j}d_j\sum_{k=1}^3 b_{2k}C_k\int_0^\infty \frac{\alpha^2 d\alpha}{\alpha^2+\gamma^2 t_k^{-2}}\times$$

$$\times\int_0^a tJ_1(\beta t)\left[L_1(\alpha t_j t)-I_1(\alpha t_j t)+\frac{2}{\pi}\right]dt \quad (31)$$

$$\Omega(\beta)=\frac{2}{\pi}\int_0^a \varphi_4(t)J_1(\beta t)dt-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^3 a_{4j}P_j\times$$

$$\times\int_0^\infty \alpha^2\varphi_1(\alpha)d\alpha\int_0^a tJ_1(\beta t)\left[L_1(\alpha t_j t)-I_1(\alpha t_j t)+\frac{2}{\pi}\right]dt-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^3 a_{4j}d_j\times$$

$$\times\int_0^\infty \alpha^2\left[-\frac{m_{12}\varphi_1(\alpha)}{m_{11}}+\frac{\varphi_2(\alpha)}{m_{11}}\right]d\alpha\int_a^\infty tJ_1(\beta t)\left[L_1(\alpha t_j t)-I_1(\alpha t_j t)+\frac{2}{\pi}\right]dt \quad (32)$$

Используя результаты работы [6] и [7], аналогичным образом доказывается разрешимость уравнения (17) для ядра (31).

Решая это уравнение методом последовательных приближений и имея в виду (11), (10), (5), (4) и соотношения электроупругости [3], можно определить все компоненты сопряженного упругого поля в любой точке полуплоскости.

В частности, эти величины на продолжении линии разреза вне разреза определяются формулами:

$$\sigma_x(0,z)=-2n_{12}\left[\frac{\varphi_4(a)/\pi+\varphi_5(a)+\psi(a)}{\sqrt{z^2-a^2}}-\int_0^a \frac{\varphi_4'(t)+\varphi_5'(t)+\psi'(t)}{\sqrt{z^2-t^2}}dt\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^3 a_{4j}\int_0^\infty \alpha^2 A_j(\alpha)\exp(-\alpha t_j z)d\alpha \qquad (a<z<\infty) \quad (33)$$

$$D_z(0,z)=-\frac{2n_{13}e_{15}}{c_{11}^E}\left[\frac{\varphi_4(a)/\pi+\varphi_5(a)+\psi(a)}{\sqrt{z^2-a^2}}-\int_0^a \frac{\varphi_4'(t)+\varphi_5'(t)+\psi'(t)}{\sqrt{z^2-t^2}}dt\right]+$$

$$+\frac{e_{15}}{c_{11}^{E}}\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\int_{0}^{\infty}\alpha^{2}A_{j}(\alpha)\exp\left(-\alpha t_{j}z\right)d\alpha \qquad (a<z<\infty) \tag{34}$$

$$E_{z}(0,z)=\frac{2n_{14}}{e_{15}}\left[\frac{\varphi_{4}(a)/\pi+\varphi_{5}(a)+\psi(a)}{\sqrt{z^{2}-a^{2}}}-\int_{0}^{a}\frac{\varphi_{4}'(t)+\varphi_{5}'(t)+\psi'(t)}{\sqrt{z^{2}-t^{2}}}dt\right]+$$

$$-\frac{1}{e_{15}}\sum_{j=1}^{3}t_{j}\Delta_{3}\left(t_{j}\right)\int_{0}^{\infty}\alpha^{2}A_{j}(\alpha)\exp\left(-\alpha t_{j}z\right)d\alpha \qquad (a<z<\infty) \tag{35}$$

где

$$\psi(t)=\frac{m_{12}}{n_{12}m_{11}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_{j}\int_{0}^{\infty}\alpha^{2}\varphi_{1}(\alpha)\left[L_{1}\left(\alpha t_{j}t\right)-I_{1}\left(\alpha t_{j}t\right)+\frac{2}{\pi}\right]d\alpha-$$

$$-\frac{1}{n_{12}m_{11}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_{j}\int_{0}^{\infty}\alpha^{2}\varphi_{2}(\alpha)\left[L_{1}\left(\alpha t_{j}t\right)-I_{1}\left(\alpha t_{j}t\right)+\frac{2}{\pi}\right]d\alpha+$$

$$+\frac{2}{\pi n_{12}m_{11}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_{j}\sum_{k=1}^{3}b_{2k}C_{k}\int_{0}^{\infty}\alpha\left[L_{1}\left(\alpha t_{j}t\right)-I_{1}\left(\alpha t_{j}t\right)+\frac{2}{\pi}\right]d\alpha\int_{0}^{\infty}\frac{\beta B(\beta)}{\alpha^{2}+\beta t_{k}^{-2}}d\beta$$

Как показывают формулы (20) – (23) и (33) – (35), компонент нормального механического напряжения, касательные компоненты векторов электрической индукции и напряженности обладают корневой особенностью у вершин вертикального разреза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел.-М.: Наука, 1988. 472с.
2. Тоноян В.С., Мелкумян Н.С. Об одной симметричной задаче электроупругости для пьезокерамической полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом.-Докл. НАН Армении, 1997, т.97, №1.
3. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость.-Киев: Наукова думка, 1989. 279с.
4. Градштейн Н.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.-М.: Физматгиз, 1971. 1108с.
5. Тоноян В.С., Мелкумян С.А. Об одной задаче для полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом. – Изв.АН АрмССР, Механика, 1971, т. 24, №4, с.3-15.
6. Тоноян В.С., Минасян А.Ф. Несимметричная контактная задача для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом.-Докл. АН АрмССР, 1975, т. 61, №5, с.289-297.
7. Тоноян В.С., Мелкумян С.А. Об одной задаче для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом.-Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. 25, №3, с.3-17.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
8.01.1996