

УДК 539.3
 ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
 ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա. Մովսիսյան
 Պիեզոէլեկտրիկ սալի համար դինամիկական կայունության մի խնդրի մասին

Դիսկուսվում է հեկագոնալ համակարգի երկու տիպի նյութերից սալի համար դինամիկական կայունության խնդիրը, երբ պարբերական շոշափող լարումներն ազդում են սալի արտաքին հարբարյունների վրա: Որոշվել են սեփական համախորյունները, ստատիկական կրիտիկական լարումը և զվտավոր ռեզոնանսային տիրույթը:

L.A. Movsisian
 About one problem of dynamic stability for piezoelectric plate

Исследуется динамическая устойчивость пластинки из пьезоэлектриков. Тангенциальные периодические напряжения действуют на внешних плоскостях пластинки (моментное начальное состояние) и направлены в противоположные стороны. Рассматриваются два типа пьезоэлектриков гексагональной системы классов $\bar{6}m2$ и $6mm$. Для первого материала электрическое поле индуцируется при продольном движении (плоская задача), в то время как для второго – при изгибе. Благодаря неомстности начального состояния, уравнения возмущенного состояния получаются связанными.

1. Имеется прямоугольная пластинка, на внешних плоскостях которой в направлении одних из сторон действуют тангенциальные периодические напряжения (S), направленные в противоположные стороны. Принимается, что внешние стороны пластинки покрыты металлическим слоем. Изучаются два пьезоэлектрика класса $\bar{6}m2$ (число коэффициентов 5–1–2) и $6mm$ (5–3–2) [1].

Уравнения возмущенного движения пластинки в классической постановке будут [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} - Sh \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} - Sh \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} - Sh \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Считается, что тангенциальные напряжения $S = S_0 + S_1 \cos \theta t$ направлены по оси x .

В рамках принятой модели определяющие уравнения выглядят следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= B_{11}e_x + B_{12}e_y - eE_1, & D_1 &= -ee_x + ee_y + \epsilon_1 E_1 \\ \sigma_y &= B_{12}e_x + B_{11}e_y + eE_1, & D_2 &= ee_{xy} + \epsilon_1 E_2 \\ \sigma_{xy} &= 0,5(B_{11} - B_{12})e_{xy} + eE_2, & D_3 &= \epsilon_2 E_3 \end{aligned} \quad (1.2)$$

для первого материала и

$$\begin{aligned} \sigma_x &= B_{11}e_x + B_{12}e_y - e_1 E_3, & D_1 &= \epsilon_1 E_1 \\ \sigma_y &= B_{12}e_x + B_{11}e_y - e_1 E_3, & D_2 &= \epsilon_1 E_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\sigma_{xy} = 0,5(B_{11} - B_{12})e_{xy}, \quad D_3 = -e_1(e_x + e_y) + \varepsilon_2 E_3$$

К системе (1.1) должны быть присоединены уравнения напряженности электрического поля и электрической индукции

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0, \quad \operatorname{div} \bar{D} = 0 \quad (1.4)$$

По (1.2) и (1.3), вычисляя усилия и моменты, далее выражая их через перемещения, будем иметь следующую систему уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned} & C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\ & + \delta \frac{2}{3} h e \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - Sh \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ & \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \\ & - \delta \frac{4}{3} h e \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - Sh \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ & D_{11} \Delta^2 w + \gamma \frac{2}{3} e_1 h \Delta F + Sh \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

А уравнения (1.4) дают

$$\frac{2}{3} h e_1 \Delta F - \frac{8}{h} \varepsilon_2 F + \delta h e \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \gamma h \left(e_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1.6)$$

При получении (1.5) и (1.6) для электрического потенциала принято

$$\Phi = F(x, y, t) \left(1 - \frac{4}{h^2} z^2 \right) \quad (1.7)$$

В системах (1.5) и (1.6) для первого материала следует положить $\delta = 1$ и $\gamma = 0$, а для второго $-\delta = 0$, $\gamma = 1$ ($C_{ij} = B_{ij} h$, $D_{11} = \frac{h^3}{12} B_{11}$)

2. Пусть края пластинки шарнирно закреплены и покрыты металлическим слоем:

$$\begin{aligned} w = M_1 = u = T_{12} = F = 0 & \quad \text{при } x = 0, x = a \\ w = M_2 = u = T_2 = F = 0 & \quad \text{при } y = 0, y = b \end{aligned} \quad (2.1)$$

Условием (2.1) удовлетворим, если возьмем

$$\begin{aligned} u &= f_1 \sin \lambda x \sin \mu y, & w &= f_3 \sin \lambda x \sin \mu y \\ v &= f_2 \cos \lambda x \cos \mu y, & F &= f_4 \sin \lambda x \sin \mu y \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\lambda = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Подставляя (2.2) в (1.5) и (1.6), исключая f_4 , для остальных f_i получим

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + A_j(t) f_i = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

Для определения главных областей параметрических колебаний решение (2.3) будем искать в виде [3]

$$f_i = C_i^{(0)} \cos \frac{\theta}{2} t + C_i^{(1)} \sin \frac{\theta}{2} t \quad (2.4)$$

в условия нетривиальности решения (2.3) получим выражения для главных областей неустойчивости

$$\det \|a_{ij}\| = 0$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\rho} \left[B_{11} \lambda^2 + \frac{1}{2} (B_{11} - B_{12}) \mu^2 - \delta \frac{2}{3} e^2 \frac{(\lambda^2 - \mu^2)^2}{\Delta_1} \right] \\
 a_{12} &= a_{21} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{2} (B_{11} + B_{12}) \lambda \mu + \delta \frac{4}{3} e^2 \frac{\lambda \mu (\lambda^2 - \mu^2)^2}{\Delta_1} \right] \\
 a_{13} &= a_{31} = \frac{S_0}{\rho} (1 \pm \chi) \lambda^2, \quad a_{23} = a_{32} = -\frac{S_0}{\rho} (1 \pm \chi) \lambda \mu \\
 a_{22} &= \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\rho} \left[B_{11} \mu^2 + \frac{1}{2} (B_{11} - B_{12}) \lambda^2 - \delta \frac{8}{3} e^2 \frac{\lambda^2 \mu^2}{\Delta_1} \right] \\
 a_{33} &= \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{\rho} \left[\gamma \frac{2}{3} e_1 \frac{e_1 \lambda^2 + e_2 \mu^2}{\Delta_1} - \frac{h^2}{12} B_{11} (\lambda^2 + \mu^2) \right] (\lambda^2 + \mu^2) \\
 \Delta_1 &= \frac{8}{h^2} \varepsilon_2 + \frac{2}{3} \varepsilon_1 (\lambda^2 + \mu^2), \quad \chi = \frac{1}{2} \frac{S_1}{S_0}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из (2.5), в частности, получаются статическое критическое напряжение ($S_1 = \theta = 0$) и частоты свободных колебаний ($S_1 = 0, \frac{\theta}{2} = \omega$).

Нет смысла представить (2.5) в развернутом виде, так как из-за громоздкости формул невозможно будет сделать качественных выводов, поэтому приведем формулы для одномерного случая.

3. В случае цилиндрического изгиба ($b \rightarrow \infty$) условие (2.3) превращается

$$\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \left[\frac{1}{4} (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \frac{S_0^2}{\rho^2} (1 \pm \chi)^2 \lambda^4 \right]^{1/2} \tag{3.1}$$

Здесь собственные частоты определяются

$$\omega_1^2 = \frac{B_{11}}{\rho} \lambda^2 (1 - \delta E^{(1)} \xi^2), \quad \omega_2^2 = \frac{B_{11}}{\rho} \lambda^2 \xi^2 (1 - \gamma E^{(1)})$$

$$E^{(1)} = \frac{e^2}{B_{11} \varepsilon_2 \Delta_2}, \quad E^{(2)} = \frac{e_1^2}{B_{11} \varepsilon_2 \Delta_2}, \quad \Delta_2 = 1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \xi^2, \quad \xi^2 = \frac{h^2 \lambda^2}{12} \tag{3.2}$$

Как видно из (3.1) и (3.2), свободные частоты благодаря пьезоэффекту уменьшаются, и вследствие сдвигающихся напряжений продольная частота увеличивается, а поперечная — уменьшается. Из (3.2) также видно, что по χ получаются узкие области динамической неустойчивости.

Из (3.1) можно получить и выражение статического критического напряжения

$$S_0^{кр} = B_{11} \xi \left[(1 - \delta E^{(1)} \xi^2) (1 - \gamma E^{(2)}) \right]^{1/2} \tag{3.3}$$

т.е. присутствие пьезоэффекта уменьшает также критическое напряжение.

Из (3.3), в частности, получается результат [4] (при $\delta = \gamma = 0$).

4. Так как рассмотренные материалы ортотропные, то имеет смысл

изучение этих же задач в постановке, учитывающих поперечные сдвиги [5].

Приведем приближенные выражения интересующих нас величин (изгибная частота, статическое критическое напряжение и область главной динамической неустойчивости) для второго материала при одномерном случае

$$\sigma_x = B_{11}e_x - e_1E_3, \quad D_1 = e_3e_{xx} + \varepsilon_1E_1 \quad (4.1)$$

$$\sigma_{xz} = B_{44}e_{xz} - e_3E_1, \quad D_3 = -e_1e_x + \varepsilon_2E_3$$

Вот эти формулы

$$\omega^2 = \frac{12B_{11}}{\rho h^2} \xi^4 (X_1 - X_2 \xi^2) \quad (4.2)$$

$$S_0^{KP} = B_{11} \xi \left[(X_1 - X_2 \xi^2) / (1 - X_3 \xi^2) \right]^{1/2} \quad (4.3)$$

$$\frac{\theta}{2} = \omega \left[1 - \frac{S_0^2 (1 \pm \chi)^2}{(S_0^{KP})^2} \right]^{1/2} \quad (4.4)$$

Здесь

$$X_1 = 1 - \frac{e_1^2}{B_{11}\varepsilon_2}, \quad X_3 = 2 \frac{B_{11}}{B_{44}} X_1$$

$$X_2 = \frac{B_{11}}{B_{44}} \left(1 - \frac{2e_1^2}{B_{11}\varepsilon_2} - \frac{e_3^4 - e_1^4}{B_{11}^2 \varepsilon_2^2} \right) + \frac{e_3^2 (e_3^2 - e_1^2)}{B_{11} B_{44} \varepsilon_2^2} - \frac{e_1^2 \varepsilon_1}{B_{44} \varepsilon_2^2}$$

Последние формулы выведены с точностью по ξ^2 . В таком же приближении главная область динамической неустойчивости из (3.1) получится по виду (4.4), где уже отсутствуют X_2 и X_3 .

Как известно [5], учет сдвигов, как правило, уменьшает значение собственных частот, однако, как видно, из (4.1) при наличии пьезоэффекта возможен случай ($x_2 < 0$), когда частоты могут увеличиваться.

В то же время, как видно из приведенных формул, учет сдвигов приводит к сужению ($x_3 > 0$) области параметрических колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. - М.: Наука, 1982. 424с.
2. Мовсисян Л.А., Пештмалджян Д.В. Об уравнениях устойчивости и колебаний анизотропных пластин. - Изв. АН Арм ССР, Механика, 1973, т.26, №6, с.18-29.
3. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956. 600с.
4. Flemming J.F., Herrman G., Mooney I. Buckling of structural Element Subject to Surface shear. - J. of Appl. Mech., 1965, vol. 32, 1.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1987. 360с.