ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ПЛАСТИНОК ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Барсегян В. М.

Վ. Մ. Բարսեղյան
Երկշերտ անիզոտրոպ ջերմաառաձգական սալերի եռաչափ ներքին խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը շերտերի ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում

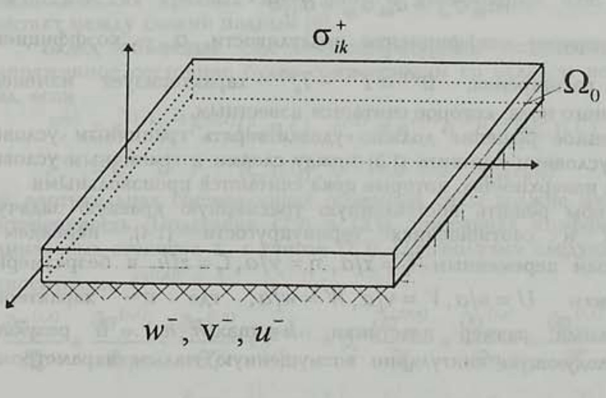
Ուսումնասիրվում է երկշերտ անիզոտրոպ սալերի ներքին լարվածադեֆորմացիոն վիճակը շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում: Ցույց է տրված, որ լարումների թենզորի և տեղափոխման վեկտորի ասիմպտոտիկաները սկզբունքորեն տարբերվում են սալերի դասական տեսության համապատասխան մեծությունների ասիմպտոտիկայից: Դուրս են բերված ռեկուրենտ բանաձևեր սալի ներքին խնդրին համապատասխանող լարումների և տեղափոխությունների որոշման համար:

V. M. Barsegian

The asimptonic solution of the three-dimensional interior problem for two-layered anisotropic plates in case of incomplete contact between layers

На основе уравнений трехмерной задачи теории термоупругости исследуется внутреннее напряженно-деформированное состояние двухслойной анизотропной пластинки, когда контакт между слоями неполный. Асимптотическим методом выведены рекуррентные формулы для определения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения.

1. Требуется найти решение уравнений пространственной задачи теории термоупругости анизотропного тела в области $\Omega=\left\{x, y, z: x, y \in \Omega_0,\ -h_2 \leq z \leq h_1, h << a\right\}$ (фиг.1). Анизотропия самая общая. На пластинку действуют заданные объемные силы с компонентами $F_x^{(i)}(x,y,z), F_y^{(i)}(x,y,z), F_z^{(i)}(x,y,z), i=1,2$ и температурные воздействия.



Фиг. 1

На лицевых плоскостях $z=-h_2$ и $z=h_1$ заданы условия

$$\sigma_z = \varepsilon^{-1}\sigma_z^-(x,y),\ \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^-(x,y),\ \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^-(x,y) \text{ для } z = h_1 \tag{1.1}$$

$$w = \varepsilon^{-1}w^-(x,y),\ u = \varepsilon^{-1}u^-(x,y),\ v = \varepsilon^{-1}v^-(x,y) \text{ для } z = -h_2 \tag{1.2}$$

Рассматривается неполный контакт между слоями:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} = \tau_{x0}(x,y),\ \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} = \tau_{y0}(x,y) \\ &\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)},\quad w^{(1)} = w^{(2)} \end{aligned}\right\} \text{ при } z = 0 \tag{1.3}$$

Функции $\tau_{x0}(x,y)$, $\tau_{y0}(x,y)$ считаются заданными и в зависимости от выбранной модели взаимодействия слоев могут иметь различный вид. В общем случае задача сводится к решению следующей системы уравнений и соотношений термоупругости анизотропного тела:

$$\frac{\partial\sigma_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{(i)}}{\partial z} + F_x^{(i)} = 0,\quad \frac{\partial\sigma_{xy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(i)}}{\partial z} + F_y^{(i)} = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z^{(i)}}{\partial z} + F_z^{(i)} = 0$$

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} = a_{11}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{12}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{13}^{(i)}\sigma_z^{(i)} + a_{14}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i)} + a_{15}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i)} + a_{16}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{11}^{(i)}\theta^{(i)}$$

$$\frac{\partial v^{(i)}}{\partial y} = a_{12}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{22}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{23}^{(i)}\sigma_z^{(i)} + a_{24}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i)} + a_{25}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i)} + a_{26}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{22}^{(i)}\theta^{(i)}$$

$$\frac{\partial w^{(i)}}{\partial z} = a_{13}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{23}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{33}^{(i)}\sigma_z^{(i)} + a_{34}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i)} + a_{35}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i)} + a_{36}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{33}^{(i)}\theta^{(i)}$$

$$\frac{\partial v^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(i)}}{\partial y} = a_{14}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{24}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{34}^{(i)}\sigma_z^{(i)} + a_{44}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i)} +$$
$$+ a_{45}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i)} + a_{46}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{23}^{(i)}\theta^{(i)} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(i)}}{\partial z} = a_{15}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{25}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{35}^{(i)}\sigma_z^{(i)} + a_{45}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i)} +$$
$$+ a_{55}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i)} + a_{56}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{13}^{(i)}\theta^{(i)}$$

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial x} = a_{16}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{26}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{36}^{(i)}\sigma_z^{(i)} + a_{46}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i)} +$$
$$+ a_{56}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i)} + a_{66}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{12}^{(i)}\theta^{(i)}$$

где a_{ij} – упругие коэффициенты податливости, α_{ij} – коэффициенты теплового расширения, $\theta^{(i)} = T^{(i)} - T_0^{(i)}$ характеризует изменение температурного поля, которое считается известным.

Найденное решение должно удовлетворять граничным условиям (1.1), (1.2), условиям контакта (1.3) между слоями и граничным условиям на боковых поверхностях, которые пока считаются произвольными.

2. Чтобы решить поставленную трехмерную краевую задачу, в уравнениях и соотношениях термоупругости (1.4), перейдем к безразмерным переменным $\xi = x/a$, $\eta = y/a$, $\zeta = z/h$ и безразмерным перемещениям $U = u/a$, $V = v/a$, $W = w/a$, где a – характерный тангенциальный размер пластинки, $h = \max(h_1, h_2)$. В результате получим следующую сингулярно возмущенную малым параметром ε систему:

$$\frac{\partial\sigma_x^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xz}^{(i)}}{\partial\zeta}+aF_x^{(i)}=0,\ \frac{\partial\sigma_{xy}^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_y^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{yz}^{(i)}}{\partial\zeta}+aF_y^{(i)}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_z^{(i)}}{\partial\zeta}+aF_z^{(i)}=0,$$

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}=a_{11}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{12}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+\ldots+\alpha_{11}^{(i)}\theta^{(i)},$$

$$\frac{\partial V^{(i)}}{\partial\eta}=a_{12}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{22}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+\ldots+\alpha_{22}^{(i)}\theta^{(i)} \tag{2.1}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial W^{(i)}}{\partial\zeta}=a_{13}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{23}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+\ldots+\alpha_{33}^{(i)}\theta^{(i)}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial V^{(i)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(i)}}{\partial\eta}=a_{14}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{24}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+\ldots+\alpha_{23}^{(i)}\theta^{(i)}$$

$$\frac{\partial W^{(i)}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\zeta}=a_{15}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{25}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+\ldots+\alpha_{13}^{(i)}\theta^{(i)}$$

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(i)}}{\partial\xi}=a_{16}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{26}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+\ldots+\alpha_{12}^{(i)}\theta^{(i)}$$

Решение системы (2.1) складывается из решений внутренней задачи и пограничного слоя [1-5]. Решение внутренней задачи, или проникающее решение ищем в виде:

$$Q^{(i)}=\varepsilon^{q_i+s}Q^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad s=\overline{0,N} \tag{2.2}$$

где Q – любая из искомых величин, а суммирование ведется по s от нуля до числа приближений, N,q_i – целые числа, которые должны быть такими, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(i,s)}$. Эта цель достигается при

$$q_i=-1\ \text{для}\ \sigma_x^{(i)},\sigma_y^{(i)},\sigma_z^{(i)},\sigma_{xy}^{(i)},U^{(i)},V^{(i)},W^{(i)}$$

$$q_i=0\ \text{для}\ \sigma_{xz}^{(i)},\sigma_{yz}^{(i)} \tag{2.3}$$

Асимптотика (2.2), (2.3) принципиально отличается от асимптотики тех же величин в классической теории пластинок [1-3], асимптотики неклассических краевых задач [6,7] и двухслойных пластинок, когда контакт между слоями полный [8].

Вклад объемных сил и температурных воздействий в общее напряженное состояние будет соизмеримым со вкладом поверхностных сил, если

$$F_x^{(i)}=\varepsilon^{-1+s}a^{-1}F_x^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta),\ F_y^{(i)}=\varepsilon^{-1+s}a^{-1}F_y^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$F_z^{(i)}=\varepsilon^{-2+s}a^{-1}F_z^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta),\ \theta^{(i)}=\varepsilon^{-1+s}\theta^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta) \tag{2.6}$$

т.е. вертикальная составляющая объемной силы должна иметь большую интенсивность. Подставив (2.2) в (2.1), приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, с учетом (2.3), (2.6) получим следующую систему относительно $Q^{(i,s)}$:

$$\frac{\partial\sigma_x^{(i,s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(i,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(i,s)}}{\partial\zeta}+F_x^{(i,s)}=0,\ \frac{\partial\sigma_{xy}^{(i,s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_y^{(i,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(i,s)}}{\partial\zeta}+F_y^{(i,s)}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{(i,s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(i,s-2)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{z}^{(i,s)}}{\partial\zeta}+F_z^{(i,s)}=0,$$

$$\frac{\partial U^{(i,s)}}{\partial\xi}=a_{11}^{(i)}\sigma_x^{(i,s)}+a_{12}^{(i)}\sigma_y^{(i,s)}+a_{13}^{(i)}\sigma_z^{(i,s)}+$$
$$+a_{14}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-1)}+a_{15}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-1)}+a_{16}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s)}+\alpha_{11}^{(i)}\theta^{(i,s)}$$

$$\frac{\partial V^{(i,s)}}{\partial\eta}=a_{12}^{(i)}\sigma_x^{(i,s)}+a_{22}^{(i)}\sigma_y^{(i,s)}+a_{23}^{(i)}\sigma_z^{(i,s)}+$$
$$+a_{24}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-1)}+a_{25}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-1)}+a_{26}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s)}+\alpha_{22}^{(i)}\theta^{(i,s)}$$

$$\frac{\partial W^{(i,s)}}{\partial\zeta}=a_{13}^{(i)}\sigma_x^{(i,s-1)}+a_{23}^{(i)}\sigma_y^{(i,s-1)}+a_{33}^{(i)}\sigma_z^{(i,s-1)}+$$
$$+a_{34}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-2)}+a_{35}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-2)}+a_{36}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)}+\alpha_{33}^{(i)}\theta^{(i,s-1)} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial V^{(i,s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(i,s-1)}}{\partial\eta}=a_{14}^{(i)}\sigma_x^{(i,s-1)}+a_{24}^{(i)}\sigma_y^{(i,s-1)}+a_{34}^{(i)}\sigma_z^{(i,s-1)}+$$
$$+a_{44}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-2)}+a_{45}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-2)}+a_{46}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)}+\alpha_{23}^{(i)}\theta^{(i,s-1)}$$

$$\frac{\partial W^{(i,s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U^{(i,s)}}{\partial\zeta}=a_{15}^{(i)}\sigma_x^{(i,s-1)}+a_{25}^{(i)}\sigma_y^{(i,s-1)}+a_{35}^{(i)}\sigma_z^{(i,s-1)}+$$
$$+a_{45}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-2)}+a_{55}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-2)}+a_{56}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)}+\alpha_{13}^{(i)}\theta^{(i,s-1)}$$

$$\frac{\partial U^{(i,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(i,s)}}{\partial\xi}=a_{16}^{(i)}\sigma_x^{(i,s)}+a_{26}^{(i)}\sigma_y^{(i,s)}+a_{36}^{(i)}\sigma_z^{(i,s)}+$$
$$+a_{46}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-1)}+a_{56}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-1)}+a_{66}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s)}+\alpha_{12}^{(i)}\theta^{(i,s)}$$

Учитывая, что $Q^{(s)}\equiv 0$ при $s<0$, из системы (2.7) можно определить все неизвестные величины с точностью некоторых функций, зависящих только от переменных ξ,η. Приведем процедуру решения системы (2.7). Из третьего уравнения равновесия определяется $\sigma_z^{(i,s)}$, из восьмого, седьмого, шестого уравнений системы определяются $U^{(i,s)}, V^{(i,s)}, W^{(i,s)}$, а из четвертого, пятого, девятого уравнений, с учетом уже определенных величин, определяются $\sigma_x^{(i,s)}, \sigma_y^{(i,s)}, \sigma_{xy}^{(i,s)}$. Вернувшись затем к первым двум уравнениям равновесия (2.7), определим $\sigma_{xz}^{(i,s)}, \sigma_{yz}^{(i,s)}$.

В результате имеем решение

$$\begin{aligned}
&\sigma_z^{(i,s)}=\sigma_{z0}^{(i,s)}(\xi,\eta)+\sigma_z^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad W^{(i,s)}=w^{(i,s)}(\xi,\eta)+w^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)\\
&V^{(i,s)}=\mathrm{v}^{(i,s)}(\xi,\eta)+\mathrm{v}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad U^{(i,s)}=u^{(i,s)}(\xi,\eta)+u^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)\\
&\sigma_x^{(i,s)}=A_{11}^{(i)}\sigma_{z0}^{(i,s)}+l_{11}^{(i)}u^{(i,s)}+l_{12}^{(i)}\mathrm{v}^{(i,s)}+\sigma_x^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)\\
&\sigma_y^{(i,s)}=A_{21}^{(i)}\sigma_{z0}^{(i,s)}+l_{21}^{(i)}u^{(i,s)}+l_{22}^{(i)}\mathrm{v}^{(i,s)}+\sigma_y^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)\\
&\sigma_{xy}^{(i,s)}=A_{31}^{(i)}\sigma_{z0}^{(i,s)}+l_{31}^{(i)}u^{(i,s)}+l_{32}^{(i)}\mathrm{v}^{(i,s)}+\sigma_{xy}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)\\
&\sigma_{xz}^{(i,s)}=\sigma_{xz0}^{(i,s)}(\xi,\eta)-\left(A_{11}^{(i)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\xi}+A_{31}^{(i)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\eta}\right)\zeta+\\
&+\zeta\left(L_{11}\left(B_{ij}^{(i)}\right)u^{(i,s)}+L_{12}\left(B_{ij}^{(i)}\right)\mathrm{v}^{(i,s)}\right)+\sigma_{xz}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\sigma_{yz}^{(i,s)}=\sigma_{yz0}^{(i,s)}(\xi,\eta)-\left(A_{21}^{(i)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\eta}+A_{31}^{(i)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\xi}\right)\zeta+$$

$$+\zeta\left(L_{12}\left(B_{ij}^{(i)}\right)u^{(i,s)}+L_{22}\left(B_{ij}^{(i)}\right)v^{(i,s)}\right)+\sigma_{yz}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

Здесь $A_{kj}^{(i)}$ – постоянные коэффициенты упругости, а $l_{kj}^{(i)}, L_{kj}\left(B_{kj}^{(i)}\right)$ – дифференциальные операторы:

$$A_{1,k-2}^{(i)}=-\left(a_{1k}^{(i)}B_{11}^{(i)}+a_{2k}^{(i)}B_{12}^{(i)}+a_{6k}^{(i)}B_{16}^{(i)}\right)$$

$$A_{2,k-2}^{(i)}=-\left(a_{1k}^{(i)}B_{12}^{(i)}+a_{2k}^{(i)}B_{22}^{(i)}+a_{6k}^{(i)}B_{26}^{(i)}\right)$$

$$A_{3,k-2}^{(i)}=-\left(a_{1k}^{(i)}B_{16}^{(i)}+a_{2k}^{(i)}B_{26}^{(i)}+a_{6k}^{(i)}B_{66}^{(i)}\right),\quad (k=3,4,5)$$

$$B_{11}^{(i)}=\left(a_{22}^{(i)}a_{66}^{(i)}-\left(a_{26}^{(i)}\right)^2\right)\Big/\Delta^{(i)},\; B_{22}^{(i)}=\left(a_{11}^{(i)}a_{66}^{(i)}-\left(a_{16}^{(i)}\right)^2\right)\Big/\Delta^{(i)}$$

$$B_{12}^{(i)}=\left(a_{16}^{(i)}a_{26}^{(i)}-a_{12}^{(i)}a_{66}^{(i)}\right)/\Delta^{(i)},\; B_{66}^{(i)}=\left(a_{11}^{(i)}a_{22}^{(i)}-\left(a_{12}^{(i)}\right)^2\right)\Big/\Delta^{(i)}$$

$$B_{16}^{(i)}=\left(a_{12}^{(i)}a_{26}^{(i)}-a_{22}^{(i)}a_{16}^{(i)}\right)/\Delta^{(i)},\; B_{26}^{(i)}=\left(a_{12}^{(i)}a_{16}^{(i)}-a_{11}^{(i)}a_{26}^{(i)}\right)/\Delta^{(i)}$$

$$\Delta^{(i)}=\left(a_{11}^{(i)}a_{22}^{(i)}-\left(a_{12}^{(i)}\right)^2\right)a_{66}^{(i)}+2a_{12}^{(i)}a_{16}^{(i)}a_{26}^{(i)}-a_{11}^{(i)}\left(a_{26}^{(i)}\right)^2-a_{22}^{(i)}\left(a_{16}^{(i)}\right)^2$$

$$l_{11}^{(i)}=-\left(B_{11}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi}+B_{16}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right),\quad l_{12}^{(i)}=-\left(B_{16}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi}+B_{12}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\tag{2.9}$$

$$l_{21}^{(i)}=-\left(B_{12}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi}+B_{26}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right),\quad l_{22}^{(i)}=-\left(B_{26}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi}+B_{22}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$$

$$l_{31}^{(i)}=-\left(B_{16}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi}+B_{66}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right),\quad l_{32}^{(i)}=-\left(B_{66}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi}+B_{26}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$$

$$L_{11}\left(B_{ij}^{(i)}\right)=-\left(\frac{\partial l_{11}^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial l_{31}^{(i)}}{\partial\eta}\right)=B_{11}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2B_{16}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+B_{66}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$L_{12}\left(B_{ij}^{(i)}\right)=-\left(\frac{\partial l_{12}^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial l_{32}^{(i)}}{\partial\eta}\right)=-\left(\frac{\partial l_{31}^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial l_{21}^{(i)}}{\partial\eta}\right)=$$

$$=B_{16}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left(B_{12}^{(i)}+B_{66}^{(i)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+B_{26}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$L_{22}\left(B_{ij}^{(i)}\right)=-\left(\frac{\partial l_{32}^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial l_{22}^{(i)}}{\partial\eta}\right)=B_{66}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2B_{26}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+B_{22}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

Величины $Q^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$ – известные функции для каждого приближения s, если определены величины предыдущих приближений. Они определяются по рекуррентным формулам

$$\sigma_z^{*(i,s)}=-\int_0^{\zeta}\left(F_z^{(i,s)}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(i,s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(i,s-2)}}{\partial\eta}\right)d\zeta$$

$$w^{*(i,s)}=\int_0^{\zeta}\left(a_{31}^{(i)}\sigma_x^{(i,s-1)}+a_{32}^{(i)}\sigma_y^{(i,s-1)}+a_{33}^{(i)}\sigma_z^{(i,s-1)}+a_{34}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-2)}+\right.$$

$$\left.+a_{35}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-2)}+a_{36}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)}+\alpha_{33}^{(i)}\theta^{(i,s-1)}\right)d\zeta$$

$$v^{*(i,s)} = \int_0^{\zeta}\Big(a_{41}^{(i)}\sigma_x^{(i,s-1)} + a_{42}^{(i)}\sigma_y^{(i,s-1)} + a_{43}^{(i)}\sigma_z^{(i,s-1)} + a_{44}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-2)} +$$

$$+a_{45}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-2)} + a_{46}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)} + \alpha_{23}^{(i)}\theta^{(i,s-1)} - \frac{\partial W^{(i,s-1)}}{\partial\eta}\Big)d\zeta \qquad (2.10)$$

$$u^{*(i,s)} = \int_0^{\zeta}\Big(a_{51}^{(i)}\sigma_x^{(i,s-1)} + a_{52}^{(i)}\sigma_y^{(i,s-1)} + a_{53}^{(i)}\sigma_z^{(i,s-1)} + a_{54}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-2)} +$$

$$+a_{55}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-2)} + a_{56}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)} + \alpha_{13}^{(i)}\theta^{(i,s-1)} - \frac{\partial W^{(i,s-1)}}{\partial\xi}\Big)d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(i,s)} = A_{11}^{(i)}\sigma_z^{*(i,s)} + l_{11}^{(i)}u^{*(i,s)} + l_{12}^{(i)}v^{*(i,s)} + A_{12}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-1)} + A_{13}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-1)} + \beta_1^{(i)}\theta^{(i,s)}$$

$$\sigma_y^{*(i,s)} = A_{21}^{(i)}\sigma_z^{*(i,s)} + l_{21}^{(i)}u^{*(i,s)} + l_{22}^{(i)}v^{*(i,s)} + A_{22}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-1)} + A_{23}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-1)} + \beta_2^{(i)}\theta^{(i,s)}$$

$$\sigma_{xy}^{*(i,s)} = A_{31}^{(i)}\sigma_z^{*(i,s)} + l_{31}^{(i)}u^{*(i,s)} + l_{32}^{(i)}v^{*(i,s)} + A_{32}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-1)} + A_{33}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-1)} + \beta_3^{(i)}\theta^{(i,s)}$$

$$\sigma_{xz}^{*(i,s)} = -\int_0^{\zeta}F_x^{(i,s)}d\zeta - \int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_x^{*(i,s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{*(i,s)}}{\partial\eta}\right)d\zeta$$

$$\sigma_{yz}^{*(i,s)} = -\int_0^{\zeta}F_y^{(i,s)}d\zeta - \int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_{xy}^{*(i,s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_y^{*(i,s)}}{\partial\eta}\right)d\zeta$$

$$\beta_1^{(i)} = -\left(\alpha_{11}^{(i)}B_{11}^{(i)} + \alpha_{22}^{(i)}B_{12}^{(i)} + \alpha_{12}^{(i)}B_{16}^{(i)}\right)$$

$$\beta_2^{(i)} = -\left(\alpha_{11}^{(i)}B_{12}^{(i)} + \alpha_{22}^{(i)}B_{22}^{(i)} + \alpha_{12}^{(i)}B_{26}^{(i)}\right)$$

$$\beta_3^{(i)} = -\left(\alpha_{11}^{(i)}B_{16}^{(i)} + \alpha_{22}^{(i)}B_{26}^{(i)} + \alpha_{12}^{(i)}B_{66}^{(i)}\right)$$

В (2.8) неизвестными являются функции $u^{(i,s)}, v^{(i,s)}, w^{(i,s)}$, $\sigma_{z0}^{(i,s)}, \sigma_{xz0}^{(i,s)}, \sigma_{yz0}^{(i,s)}$, которые должны быть определены из граничных и контактных условий.

Удовлетворив условиям (1.1)-(1.3), получим

$$\sigma_{z0}^{(i,s)}(\xi,\eta) = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)$$

$$\sigma_{xz0}^{(i,s)}(\xi,\eta) = \sigma_{xz}^{+(s)} + \zeta_1\left(A_{11}^{(i)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\xi} + A_{31}^{(i)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\eta}\right) -$$

$$-L_{11}\left(C_{ij}^{(1)}\right)u^{(1,s)} - L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)v^{(1,s)} - \sigma_{xz}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)$$

$$\sigma_{yz0}^{(i,s)}(\xi,\eta) = \sigma_{yz}^{+(s)} + \zeta_1\left(A_{31}^{(i)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\xi} + A_{21}^{(i)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\eta}\right) - \qquad (2.11)$$

$$-L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)u^{(1,s)} - L_{22}\left(C_{ij}^{(1)}\right)v^{(1,s)} - \sigma_{yz}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)$$

$$\sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz0}^{(2,s)} = \tau_{x0}^{(s)}(\xi,\eta),\ \ \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)} = \tau_{y0}^{(s)}(\xi,\eta)$$

$$\sigma_{z0}^{(2,s)} = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)$$

$$w^{(1,s)}(\xi,\eta) = w^{(2,s)}(\xi,\eta) = w^{-(s)} - w^{*(2,s)}(\xi,\eta,-\zeta_2)$$

$$u^{(2,s)}(\xi,\eta) = u^{-(s)} - u^{*(2,s)}(\xi,\eta,-\zeta_2)$$

$$v^{(2,s)}(\xi,\eta) = v^{-(s)} - v^{*(2,s)}(\xi,\eta,-\zeta_2)$$

$$C_{ij}^{(1)} = \zeta_1 B_{ij}^{(1)}$$

$$\sigma_z^{+(0)}, \sigma_{xz}^{+(0)}, \sigma_{yz}^{+(0)} = \sigma_z^{+}(a\xi, a\eta),\ \sigma_{xz}^{-}(a\xi, a\eta),\ \sigma_{yz}^{+}(a\xi, a\eta)$$

$$u^{-(0)}, v^{-(0)}, w^{-(0)} = u^{-}(a\xi, a\eta),\ v^{-}(a\xi, a\eta),\ w^{-}(a\xi, a\eta)$$

$$\sigma_z^{+(s)} = \sigma_{xz}^{+(s)} = \sigma_{yz}^{+(s)} = 0, \quad u^{-(s)} = v^{-(s)} = w^{-(s)} = 0, \quad s > 0$$

$$\tau_{x0}^{(0)}, \tau_{y0}^{(0)} = \tau_{x0}(a\xi, a\eta),\ \tau_{y0}(a\xi, a\eta)$$

$$\tau_{x0}^{(s)} = \tau_{y0}^{(s)} = 0, \quad s > 0$$

Как следует из (2.11), все искомые величины выразились через $u^{(1,s)}, v^{(1,s)}$. Для определения же $u^{(1,s)}, v^{(1,s)}$ получаются следующие дифференциальные уравнения с частными производными:

$$L_{11}\left(C_{ij}^{(1)}\right)u^{(1,s)} + L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)v^{(1,s)} + \tau_{x0}^{(s)}(\xi,\eta) = p_1^{(s)}$$
$$L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)u^{(1,s)} + L_{22}\left(C_{ij}^{(1)}\right)v^{(1,s)} + \tau_{y0}^{(s)}(\xi,\eta) = p_2^{(s)} \tag{2.12}$$

где

$$p_1^{(s)} = \sigma_{xz}^{+(s)} + \zeta_1\left(A_{11}^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(1,s)}}{\partial\xi} + A_{31}^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(1,s)}}{\partial\eta}\right) - \sigma_{xz}^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)$$

$$p_2^{(s)} = \sigma_{yz}^{+(s)} + \zeta_1\left(A_{31}^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(1,s)}}{\partial\xi} + A_{21}^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(1,s)}}{\partial\eta}\right) - \sigma_{yz}^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)$$

$$L_{11}\left(C_{ij}^{(1)}\right) = C_{11}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2C_{16}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + C_{66}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \tag{2.13}$$

$$L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right) = C_{16}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \left(C_{12}^{(1)} + C_{66}^{(1)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + C_{26}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$L_{22}\left(C_{ij}^{(1)}\right) = C_{66}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2C_{26}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + C_{22}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

Определив перемещения $u^{(1,s)}, v^{(1,s)}$, по формулам (2.2), (2.3), (2.8)-(2.11) определятся все искомые величины.

Отметим некоторые различительные стороны возникающих двумерных уравнений по сравнению с классическими и другими.

В случае классической теории пластинок получаются дифференциальные уравнения не только относительно тангенциальных компонентов U, V вектора перемещения, но и относительно нормальной компоненты W, при этом в задаче изгиба главную роль играет именно уравнение относительно W. В нашем же случае уравнения получаются относительно U, V, а W определяется для каждого приближения арифметическими действиями.

В случае второй и третьей краевых задач [7,8], величины $U^{(i,s)}, V^{(i,s)}, W^{(i,s)}$ полностью определяются в процессе удовлетворения условий при $y = \pm h$, в нашем же случае для $U^{(i,s)}, V^{(i,s)}$ получаются уравнения (2.12). Это означает, что граничные условия на боковой поверхности непосредственно будут влиять на значения этих величин. Процедура формулировки приведенных граничных условий такая же, что и в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. К теории изгиба ортотропных пластин //МТТ, 1966, №6, с. 116-121.
2. Агаловян Л.А. К вопросу приведения граничных условий трехмерной задачи к двумерным в теории анизотропных пластинок // Уч. записки ЕГУ, 1978, №3, с. 21-30.
3. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. – ПММ, 1962, т. 26, вып.4, с. 668-686.
4. Вишик М.И. Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений //УМН, 1960, т.15, №3, с. 3-93.
5. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений.- М.: Наука, 1973. 272с.
6. Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела. -Межвуз. Сб.: механика, изд-во ЕГУ, 1982, вып. 2, с. 7-12.
7. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией-В сб: Механика конструкций из композиционных материалов. Новосибирск, Наука, 1984, с. 7-12.
8. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок. //ПММ, 1986, т. 50, вып. 2, с. 271-278.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
18.11.1996