ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 539.374

СВОБОДНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ЛИНЕЙНО–ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Акопян А.С.[1)], Киракосян Р.М.[2)]

Ա.Ս. Հակոբյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան
Գծայնորեն փոփոխական հաստության օրթոտրոպ օղակաձև սալի առանցքասիմետրիկ տատանումները լայնական սահքի հաշվառմամբ

Սալերի [1] ճշգրտված տեսության հիման վրա ստացվել է գծայնորեն փոփոխական հաստության օրթոտրոպ օղակաձև սալի առանցքասիմետրիկ ազատ տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումը լայնական սահքի հաշվառմամբ: Սալի սեփական հաճախությունների որոշման համար օգտագործվել է կոլոկացիաների մեթոդը՝ անհայտ ֆունկցիան վերածելով եռանկյունաչափական շարքի: Թվային հաշվարկները կատարվել են սալի երկրաչափական և մեխանիկական պարամետրերի մի քանի բնորոշ արժեքների համար: Վերջնական արդյունքների վերլուծման հիման վրա արվել են որակական եզրակացություններ լայնական սահքի ազդեցության վերաբերյալ:

A.S. Hakobian, R.M. Kirakosian
The free axis symmetrical oscillations of orthotropic circular plates of linear variable thickness with calculation cross displacements

На основе уточненной теории пластин [1] получено дифференциальное уравнение свободных осесимметричных колебаний ортотропной кольцевой пластинки линейно–переменной толщины с учетом поперечного сдвига. Для определения собственных частот пластинки применен метод коллокаций, разложив неизвестную функцию в тригонометрический ряд. Численные расчеты проводились для некоторых характерных значений геометрических и механических параметров пластинки. На основе анализа окончательных результатов проделаны качественные заключения о влиянии поперечного сдвига.

1. Рассмотрим ортотропную кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами a и b, толщина которой h меняется по закону

$$h = h_0 + h_1 r,\ h_1 > -\frac{h_0}{b},\ a \le r \le b \tag{1.1}$$

Здесь r — радиальная координата, h_0 и h_1 — геометрические параметры пластинки. Пусть осесимметричным поперечным возмущением пластинка выведена из состояния равновесия и оставлена самой себе. Исследуем возникающие свободные колебания при заданных условиях опирания пластинки с учетом влияния деформаций поперечных сдвигов. Аналогичная задача в классической постановке для изотропной пластинки рассмотрена в работе [2].

Введем обозначения:

$$r = \rho b,\ z = h_0\delta,\ \frac{h_0}{b} = s,\ \frac{h_1}{s} = \gamma,\ \frac{a}{b} = k,\ h = h_0 H,\ \frac{B_0}{B_r} = m^2,\ a_r B_r = \chi$$

1) При поддержке Американского Университета Армении.
2) При спонсорстве общеста с ограниченной отвртственностью "Анушик".

$$\frac{dh_0^2\omega_n^2}{B_r}=\Omega_n^2,\ u_r=h_0u,\ w=h_0f\cos\omega_n t,\ \varphi_1=B_r\varphi\cos\omega_n t,\ \frac{df}{d\rho}=\alpha$$

$$s\alpha-\chi\varphi=y,\quad N_r=B_rh_0\overline{N}_r\cos\omega_n t,\quad M_r=B_rh_0^2\overline{M}_r\cos\omega_n t$$

$$M_\theta=B_rh_0^2\overline{M}_\theta\cos\omega_n t \tag{1.2}$$

Здесь t — время, δ и ρ — поперечная и радиальная безразмерные координаты; d — плотность; B_θ, B_r, a_r — механические параметры материала [3]; w — прогиб; φ_1 — функция, описывающая распределение по толщине поперечного сдвига [1], M_r, M_θ и N_r — изгибающие моменты и поперечная сила, ω_n — круговая частота собственных колебаний пластинки.

С учетом (1.1) и (1.2) находим

$$H=1+\gamma\rho,\ \ u=-\delta y \tag{1.3}$$

$$\overline{N}_r=\frac{H}{12}\left[8\varphi-s^2\gamma H\left(\frac{dy}{d\rho}+\nu_{r\theta}m^2\frac{y}{\rho}\right)\right] \tag{1.4}$$

$$\overline{M}_r=-\frac{sH^3}{12}\left(\frac{dy}{d\rho}+\nu_{r\theta}m^2\frac{y}{\rho}\right) \tag{1.5}$$

$$\overline{M}_\theta=-\frac{sm^2H^3}{12}\left(\nu_{r\theta}\frac{dy}{d\rho}+\frac{y}{\rho}\right) \tag{1.6}$$

где $\nu_{r\theta}$ — соответствующий коэффициент Пуассона материала.

Известно [3], что уравнения свободных колебаний пластинки при пренебрежении инерцией вращения и тангенциальных перемещений можно получить из соответствующих уравнений изгиба, заменив интенсивность поперечной распределенной нагрузки выражением

$$Z=-dh\frac{d^2w}{dt^2} \tag{1.7}$$

Имея в виду это обстоятельство и осесимметричность колебаний, третье и четвертое уравнения движения дифференциального элемента срединной плоскости пластинки представим в виде

$$\frac{d\overline{N}_r}{d\rho}+\frac{\overline{N}_r}{\rho}+\frac{Hf}{s}\Omega_n^2=0 \tag{1.8}$$

$$\frac{d\overline{M}_r}{d\rho}+\frac{\overline{M}_r-\overline{M}_\theta}{\rho}-\frac{\overline{N}_r}{s}=0 \tag{1.9}$$

Подставив выражения $\overline{N}_r, \overline{M}_r$ и $\overline{M}_0$ из (1.4)–(1.6) в уравнение (1.9), для функции φ получим

$$\varphi=-\frac{s^2H}{8}\left[H\frac{d^2y}{d\rho^2}+\left(2\gamma+\frac{H}{\rho}\right)\frac{dy}{d\rho}+\frac{m^2}{\rho}\left(2\nu_{r\theta}\gamma-\frac{H}{\rho}\right)y\right] \tag{1.10}$$

С учетом (1.4), (1.9) и (1.10) из уравнения (1.8) следует:

$$f=\frac{s^3}{12\Omega_n^2}\left[H^2\frac{d^3y}{d\rho^3}+2H\left(3\gamma+\frac{H}{\rho}\right)\frac{d^2y}{d\rho^2}+\left(6\gamma^2+6\frac{\gamma H}{\rho}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+3\nu_{r\theta}\gamma m^2\frac{H}{\rho}-m^2\frac{H^2}{\rho^2}\right)\frac{dy}{d\rho}+m^2\left(6\nu_{r\theta}\gamma^2+\frac{H^2}{\rho^2}-3\frac{\gamma H}{\rho}\right)\frac{y}{\rho}\right] \tag{1.11}$$

Использовав (1.10) и (1.11), уравнение

$$s\frac{df}{d\rho}-\chi\varphi=y \tag{1.12}$$

можно привести к виду

$$\frac{d^4y}{d\rho^4}+A\frac{d^3y}{d\rho^3}+B\frac{d^2y}{d\rho^2}+C\frac{dy}{d\rho}+Dy=0 \tag{1.13}$$

где

$$A=\frac{2}{H}\left(4\gamma+\frac{H}{\rho}\right)$$

$$B=\frac{1}{H^2}\left(12\gamma^2+10\frac{\gamma H}{\rho}-2\frac{H^2}{\rho^2}-\frac{m^2H^2}{\rho^2}+3\nu_{r\theta}\gamma m^2\frac{H}{\rho}+\frac{3\chi H^2\Omega_n^2}{2s^2}\right)$$

$$C=\frac{1}{\rho H^2}\left[6\gamma^2-6\frac{\gamma H}{\rho}+9\nu_{r\theta}m^2\gamma^2-\frac{3\nu_{r\theta}\gamma m^2H^2}{\rho}-\frac{5\gamma m^2H}{\rho}+\right.$$
$$\left.+\frac{3m^2H^2}{\rho^2}+\frac{3\chi H\rho\Omega_n^2}{2s^2}\left(2\gamma+\frac{H}{\rho}\right)\right]$$

$$D=\frac{m^2}{H^2\rho^2}\left\{\frac{8\gamma H}{\rho}-\frac{3H^2}{\rho^2}-3\gamma^2-6\nu_{r\theta}\gamma^2+\right.$$
$$\left.+\frac{12\rho\Omega_n^2}{s^4}\left[\frac{\chi Hs^2}{8}\left(2\nu_{r\theta}\gamma-\frac{H}{\rho}\right)-\frac{\rho}{m^2}\right]\right\} \tag{1.14}$$

Будем считать, что краевые условия на внутреннем и внешнем контурах пластинки $\rho=k$ и $\rho=1$ произвольны. Они могут быть сформулированы в виде любой возможной комбинации следующих условий:

а) Условия свободного края:

$$\frac{dy}{d\rho}+\nu_{r\theta}m^2\frac{y}{\rho}=0, \qquad (M_r=0)$$

$$\rho\nu_{r\theta}\frac{d^2y}{d\rho^2}+\left(1+\nu_{r\theta}\right)\frac{dy}{d\rho}=0, \qquad (N_r=0) \tag{1.15}$$

б) Условия шарнирного опирания:

$$\frac{dy}{d\rho}+\nu_{r\theta}m^2\frac{y}{\rho}=0, \qquad (M_r=0)$$

$$H\frac{d^3y}{d\rho^3}+2\left(3\gamma+\frac{H}{\rho}\right)\frac{d^2y}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho\nu_{r\theta}}\left[3\gamma\left(1+2\nu_{r\theta}+\nu_{r\theta}^2m^2\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{H}{\rho}\left(1+\nu_{r\theta}m^2\right)\right]\frac{dy}{d\rho}=0, \qquad (w=0) \tag{1.16}$$

в) Условия заделки:

$$y=0, \qquad (u_r=0)$$

$$H^2\frac{d^3y}{d\rho^3}+2H\left(3\gamma+\frac{H}{\rho}\right)\frac{d^2y}{d\rho^2}+\left[6\gamma^2+\frac{3\gamma H}{\rho}\left(2+\nu_{r\theta}m^2\right)-\right.$$

$$-\frac{m^2 H^2}{\rho^2}\Bigg]\frac{dy}{d\rho}=0 \qquad (w=0) \qquad (1.17)$$

Докажем, что собственные числа краевой задачи для однородного дифференциального уравнения (1.13) являются круговыми частотами свободных колебаний пластинки при соответствующих условиях крепления и что пластинка других частот не имеет. Очевидно, что для этого достаточно показать, что из условия $y \neq 0$ вытекает условие $f \neq 0\ (w \neq 0)$, а из условия $y \equiv 0$ – условие $f \equiv 0\ (w \equiv 0)$. Рассмотрим эти два утверждения в отдельности.

Сначала докажем, что при $y \neq 0$ имеет место $f \neq 0$. Допустим обратное, то есть $f \equiv 0$. Тогда $df / d\alpha \equiv 0$ и из (1.12) следует $\varphi \neq 0$, что означает $\tau_{rz} \neq 0$. Это противоречит физическому смыслу задачи, поскольку получится, что при отсутствии прогибов (изгиба) возникает поперечное касательное напряжение. Следовательно, обратное допущение неверно и при $y \neq 0$ справедливо $f \neq 0$.

Доказательство же другого утверждения, согласно которому при $y \equiv 0$ имеет место равенство $f \equiv 0$, непосредственно вытекает из (1.11).

Таким образом, нахождение круговых частот собственных колебаний ортотропной кольцевой пластинки линейно-переменной толщины с учетом влияния деформации поперечного сдвига сводится к решению задачи о собственных числах Ω_n соответствующей краевой задачи для однородного дифференциального уравнения (1.13).

2. Для нахождения частот свободных колебаний пластинки Ω_n удобно пользоваться методом коллокаций, решение дифференциального уравнения (1.13) представив в усеченный тригонометрический ряд

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{N}\left(a_i\cos\frac{\pi i\rho}{1-k}+b_i\sin\frac{\pi i\rho}{1-k}\right) \qquad (2.1)$$

Здесь a_i и b_i – неизвестные коэффициенты.

В нижеприведенных таблицах представлены стократно увеличенные безразмерные значения частот первых двух осесимметричных форм колебаний пластинки, внутренний край которой $\rho = k$ свободен, а внешний край $\rho = 1$ – шарнирно оперт. Эти значения найдены с точностью до четырех значащих цифр, для чего понадобилось удерживать 31 член ряда (2.1). Рассмотрены случаи некоторых характерных значений механико-геометрических параметров пластинки E_θ / E_r, χ, k, γ и s. В последних двух строках таблиц приведены поправки в процентах

$$\Delta_n=\frac{\Omega_n^{\text{кл}}-\Omega_n}{\Omega_n^{\text{кл}}}100\%, \qquad (n=1,2) \qquad (2.2)$$

вносимые в значения частот свободных колебаний пластинки с учетом поперечного сдвига. Через $\Omega_n^{\text{кл}}$ обозначены частоты, соответствующие классической постановке задачи, то есть случаю $\chi = 0$.

Данные таблиц приводят к следующим заключениям.

1. Учет влияния поперечного сдвига, как и следовало ожидать, и в случае пластин переменной толщины приводит к уменьшению значений собственных частот.

2. Величина поправки существенным образом зависит от поведения изменения относительной толщины пластинки, то есть от значений параметров s и γ. С ростом этих величин поправка увеличивается.

Таблица 1

$k = 0.2,\ \nu_{r\theta} = 0.3,\ E_\theta = 0.5E_r$							
		$s = 0.05$				$s = 0.3$	
		$\gamma = 0$		$\gamma = 1$		$\gamma = -0.5$	
		Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2
χ	0	2.14	6.09	3.57	9.82	6.45	5.09
	5	2.11	5.77	3.42	8.66	6.30	4.04
	10	2.07	5.50	3.29	7.83	6.15	3.46
Δ_1		1.72	5.19	4.21	11.9	2.25	20.5
Δ_2		3.36	9.66	7.95	20.3	4.63	32.1
$k = 0.2,\ \nu_{r\theta} = 0.3,\ E_\theta = E_r$							
χ	0	2.27	6.19	3.70	9.93	8.78	55.1
	5	2.22	5.86	3.54	8.73	8.37	42.6
	10	2.18	5.58	3.39	7.88	8.02	36.0
Δ_1		1.89	5.33	4.52	12.1	4.63	22.6
Δ_2		3.70	9.89	8.52	20.6	8.67	34.7
$k = 0.2,\ \nu_{r\theta} = 0.3,\ E_\theta = 2E_r$							
χ	0	2.48	6.38	3.95	10.1	11.7	62.3
	5	2.43	6.03	3.75	8.87	10.8	45.9
	10	2.37	5.72	3.57	7.98	10.0	38.0
Δ_1		2.28	5.59	5.18	12.5	7.95	26.3
Δ_2		4.41	10.3	9.68	21.2	14.3	39.0
$k = 0.1,\ \nu_{r\theta} = 0.3,\ E_\theta = 0.5E_r$							
χ	0	1.94	5.17	3.09	8.04	7.11	48.2
	5	1.90	4.94	2.97	7.25	6.88	38.0
	10	1.87	4.73	2.87	6.66	6.67	32.3
Δ_1		1.66	4.55	3.76	9.79	3.19	21.2
Δ_2		3.26	8.53	7.14	17.2	6.16	32.9
$k = 0.1,\ \nu_{r\theta} = 0.3,\ E_\theta = E_r$							
χ	0	2.12	5.40	3.28	8.31	9.19	54.0
	5	2.07	5.14	3.14	7.46	8.69	40.7
	10	2.03	4.91	3.01	6.82	8.27	34.0
Δ_1		1.99	4.90	4.34	10.3	5.35	24.6
Δ_2		3.88	9.14	8.18	18.0	9.96	37.0
$k = 0.1,\ \nu_{r\theta} = 0.3,\ E_\theta = 2E_r$							
χ	0	2.39	5.80	3.59	8.81	11.8	62.1
	5	2.33	5.48	3.40	7.82	10.8	44.0
	10	2.27	5.21	3.23	7.10	9.98	35.9
Δ_1		2.55	5.56	5.39	11.2	8.62	29.2
Δ_2		4.92	10.3	10.0	19.4	15.3	42.2

3. Поправка зависит от характера анизотропии материала. Как и следовало ожидать, она возрастает с уменьшением относительного модуля сдвига материала поперечного направления (с увеличением параметра χ). Величина поправки сильно зависит еще и от анизотропии материала в плоскости пластинки. Причем с ростом отношения модулей упругости кольцевого и радиального направлений E_θ / E_r она увеличивается.

4. Уменьшение радиуса внутреннего края пластинки приводит к уменьшению значений собственных частот.

5. Учет влияния поперечного сдвига на значения второй частоты сказывается качественно одинаково, но намного сильнее, чем на значения первой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. К уточненной теории цилиндрически ортотропных пластин переменной толщины. -Изв. НАН Армении, Механика, 1994, т.47, №5-6, с.64-73.
2. Сони С., Ашба-Рао Ч. Осесимметричные колебания кольцевых пластинок переменной толщины.-В сб.: Механика, колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем. М.: Изд. Мир, 1984, в. 32, с. 7-16.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.-М.: Наука, 1987. 360с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
1.09.1995