ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 62.50:534.112

ЗАДАЧА НАБЛЮДЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ

Барсегян В.Р.

Վ.Ռ. Բարսեղյան
Լարի տատանման դիտման խնդիր

Հետազոտված է լարի տատանողական շարժման օպտիմալ դիտման խնդիրը: Ենթադրվում է, որ լարի դրական չափով $L_2[0,l]$ դասի ֆունկցիաներով բնութագրվող որոշ տեղամասերից ստացվում է ազդակ: Հաշվի առնելով ստացվող ազդակի որոշակի նախապատմություն, կառուցված է ունիվերսալ օպտիմալ գործողություն, որը թույլ է տալիս որոշելու լարի բոլոր կետերի ճկվածքը և արագությունը ժամանակի ցանկացած պահի:

V.R. Barseghian
The problem of a string vibrations observing

Исследована задача оптимального наблюдения колебательного движения струны. Предполагается, что из некоторых участков струны, которые характеризуются функциями из класса $L_2[0,l]$, поступает сигнал. При помощи некоторой предыстории поступающего сигнала, построен универсальный оптимальный функционал, позволяющий определить прогиб и скорость всех точек струны в любой момент времени.

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим свободные колебания однородной, упругой струны длины l, края которой закреплены. Если предполагать, что каждая точка x струны колеблется строго вертикально, то ее отклонение в каждый момент времени $t \geq 0$ от положения равновесия будет функцией от x и t. Будем рассматривать малые колебания струны.

Пусть состояние струны описывается функцией $Q(x,t)$, $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, которая удовлетворяет следующему уравнению ([1] с.26):

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

и граничным условиям

$$Q(0,t) = Q(l,t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{1.2}$$

где $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$, T_0 – натяжение, ρ – плотность однородной струны.

Пусть имеется возможность с помощью измерительных устройств на некоторых участках струны положительной меры измерять некоторую величину, определенную на промежутке времени $t - \vartheta \leq \tau \leq t$, где $\vartheta > 0$ – постоянное число – длина интервала, в течение которого учитывается некоторая предыстория поступающего сигнала. Число ϑ определяется из дополнительных требований, сопровождающих задачу о наблюдении, и зависит от физических возможностей измерительных устройств.

Предполагается, что участки струны, подлежащие измерению, характеризуются функциями $f(x)$ и $g(x)$ из класса $L_2[0,l]$. В частном случае они могут быть характеристическими функциями участков измерения.

Требуется по поступающему сигналу вычислить функцию состояния $Q(x,t)$ и скорость $\dot{Q}(x,t)$ струны для любой точки $x \in [0,l]$, каково бы ни было реализовавшееся в процессе (1.1) значение $Q(x,t)$. Известно, что решение уравнения (1.1) имеет следующий вид:

$$Q(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \sin\frac{\pi k}{l} x \tag{1.3}$$

где функции $Q_k(t)$ удовлетворяют системе бесконечных уравнений

$$\ddot{Q}_k(t) = -\left(a\frac{\pi k}{l}\right)^2 Q_k(t), \quad k = 1,2,\ldots \tag{1.4}$$

Вводя обозначения

$$\lambda_k = a\frac{\pi k}{l}, \quad Q_k^{(1)}(t) = Q_k(t), \quad Q_k^{(2)}(t) = \frac{1}{\lambda_k}\dot{Q}_k(t) \tag{1.5}$$

уравнение (1.4) в нормальной форме запишется

$$\dot{Q}_k^{(1)} = \lambda_k Q_k^{(2)}, \quad \dot{Q}_k^{(2)} = -\lambda_k Q_k^{(1)} \quad k = 1,2,\ldots \tag{1.6}$$

Обозначим коэффициенты рядов Фурье функции $f(x)$ и $g(x)$ в вышеупомянутом базисе следующим образом:

$$f_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi k}{l} x dx, \quad g_k = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{\pi k}{l} x dx \tag{1.7}$$

Коэффициенты f_k и g_k известны заранее, так как известны функции $f(x)$ и $g(x)$. Предполагается, что $f_k^2 + g_k^2 \neq 0$ [2] для каждого $k = 1,2,\ldots$.

Предположим, что для каждого $k = 1,2,\ldots$ через измерительное устройство поступает сигнал с некоторой погрешностью

$$Z_k(\tau) = f_k Q_k^{(1)}(\tau) + g_k Q_k^{(2)}(\tau) + \Delta_k(\tau), \quad t - \vartheta \leq \tau \leq t \tag{1.8}$$

где погрешность $\Delta_k(\tau)$ неизвестна, однако можно принять, что из физических условий процесса наблюдения вытекает некоторая оценка этой погрешности. Пусть $\Delta_k(\tau)$ является элементом пространства L_2 и оценка возможной помехи $\Delta_k(\tau)$ выражается в виде

$$\rho[\Delta_k] = \left[\int_{t-\vartheta}^{t} \Delta_k^2(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \leq \delta_k \tag{1.9}$$

здесь δ_k, $k = 1,2,\ldots$ – положительные постоянные.

Требуется найти операцию $\varphi_{ki}^0[t, Z_k(\tau)]$, которая удовлетворяет условию

$$\sup_{Z_k}\left|\varphi_{ki}^0[t, Z_k(\tau)] - Q_k^{(i)}(t)\right| = \min_{\varphi_{ki}}\sup_{Z_k}\left|\varphi_{ki}[t, Z_k(\tau)] - Q_k^{(i)}(t)\right| \tag{1.10}$$

по всевозможным реализациям $Z_k(\tau)$ и по всевозможным операциям φ_{ki}.

Отметим, что операция φ_{ki}, которая при каждом t обеспечивает конечную верхнюю грань (1.10), удовлетворяет условию

$$\varphi_{ki}\left[t, f_k Q_k^{(1)}(\tau) + g_k Q_k^{(2)}(\tau)\right] = Q_k^{(i)}(t) \tag{1.11}$$

Учитывая (1.11) и линейность операции φ_{ki}, получим

$$\varphi_{ki}[t, Z_k(\tau)] - Q_k^{(i)}(t) = \varphi_{ki}[t, \Delta_k(\tau)]$$

но так как

$$\sup_{\Delta_k}\left|\varphi_{ki}[t, \Delta_k(\tau)]\right| = \delta_k \rho^*[\varphi_{ki}] \tag{1.12}$$

при условии (1.9), следовательно [3], для решения поставленной задачи надо найти операцию

$$\varphi_{ki}^0\left[t, f_k Q_k^{(1)}(\tau) + g_k Q_k^{(2)}(\tau)\right] = Q_k^{(i)}(t)$$

и имеющую при каждом рассматриваемом значении t наименьшую возможную норму $\rho^*[\varphi_{ki}^0]$. Поэтому будем строить разрешающую операцию для идеального сигнала

$$f_k Q_k^{(1)}(\tau) + g_k Q_k^{(2)}(\tau), \quad t - \vartheta \le \tau \le t \tag{1.13}$$

Вообще поступающие сигналы могут быть различными. Целесообразность выбора такого сигнала обусловлено содержанием достаточного количества информации и несложной реализацией. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ рассматриваем по отношению к (1.13) "усиленный" сигнал

$$y_k(\tau) = \lambda_k^\alpha f_k Q_k^{(1)}(\tau) + \lambda_k^\alpha g_k Q_k^{(2)}(\tau), \quad t - \vartheta \le \tau \le t \tag{1.14}$$

реализация которого также нетрудна, здесь $\alpha = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – малое число.

Таким образом, для каждого $k = 1, 2, \ldots$ имеем задачу наблюдения системы (1.6) с сигналом (1.14).

Для того, чтобы система (1.6) была вполне наблюдаемой по сигналу (1.14), для каждого $k = 1, 2, \ldots$ необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$K_k = \{G_k', \ A_k' G_k'\}$$

был равен двум [3], где

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_k \\ -\lambda_k & 0 \end{pmatrix}, \quad G_k = \left(\lambda_k^\alpha f_k, \lambda_k^\alpha g_k\right)$$

Здесь и далее штрихом обозначено транспонирование матрицы.

Так как условия полной наблюдаемости выполняются, то система (1.6) по сигналу (1.14) вполне наблюдаема для каждого $k = 1, 2, \ldots$.

Отметим, что выражение

$$\frac{l}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(f_k Q_k(\tau) + g_k \dot{Q}_k(\tau)\right)$$

общий член которого является выбранный сигнал (1.13), после постановки значения f_k и g_k из (1.7) с учетом (1.3) приводится к виду

$$\int_0^l \left(f(x)Q(x,\tau) + g(x)\dot{Q}(x,\tau)\right)dx$$

2. Приведение задачи наблюдения к проблеме моментов и ее решение. Решение системы (1.6) для каждого $k = 1,2,\dots$ согласно формуле Коши запишется

$$\overline{Q}_k(\tau) = X_k(\tau,t)\overline{Q}_k(t) \tag{2.1}$$

где

$$\overline{Q}_k(\tau) = \begin{pmatrix} Q_k^{(1)}(\tau) \\ Q_k^{(2)}(\tau) \end{pmatrix}$$

$X_k(\tau,t)$ – нормированная фундаментальная матрица системы (1.6) и имеет вид

$$X_k(\tau,t) = \begin{pmatrix} \cos\lambda_k(\tau-t) & \sin\lambda_k(\tau-t) \\ -\sin\lambda_k(\tau-t) & \cos\lambda_k(\tau-t) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Из (1.14) и (2.1) получим

$$y_k(\tau) = G_k X_k(\tau,t)\overline{Q}_k(t), \quad t-\vartheta \le \tau \le t \tag{2..3}$$

Операции, вычисляющие функции $Q_k^{(1)}(t)$ и $Q_k^{(2)}(t)$, по сигналу (2.3) будем искать в виде

$$\begin{gathered} \int_{t-\vartheta}^{t} y_k(\tau)\overline{V}_{k1}(t,\tau)d\tau = Q_k^{(1)}(t) \\ \int_{t-\vartheta}^{t} y_k(\tau)\overline{V}_{k2}(t,\tau)d\tau = Q_k^{(2)}(t) \qquad k=1,2,\dots \end{gathered} \tag{2.4}$$

Подставляя $y_k(\tau)$ из (2.3) в (2.4), выполняя замену переменного $\tau - t = \xi$ и вводя обозначение $\overline{V}_{ki}(t,t+\xi) = V_{ki}(\xi)$, $i=1,2$, будем иметь

$$\begin{gathered} \int_{-\vartheta}^{0} (f_k\cos\lambda_k\xi - g_k\sin\lambda_k\xi)V_{k1}(\xi)d\xi = \frac{1}{\lambda_k^\alpha} \\ \int_{-\vartheta}^{0} (f_k\sin\lambda_k\xi + g_k\cos\lambda_k\xi)V_{k1}(\xi)d\xi = 0 \\ \int_{-\vartheta}^{0} (f_k\cos\lambda_k\xi - g_k\sin\lambda_k\xi)V_{k2}(\xi)d\xi = 0 \\ \int_{-\vartheta}^{0} (f_k\sin\lambda_k\xi + g_k\cos\lambda_k\xi)V_{k2}(\xi)d\xi = \frac{1}{\lambda_k^\alpha} \end{gathered} \tag{2.5}$$

Для каждого $k = 1,2,\dots$ найдем функции $V_{k1}(\xi)$ и $V_{k2}(\xi)$, удовлетворяющие интегральным условиям (2.5) и являющимися оптимальным в смысле

$$\int_{-\vartheta}^{0} [V_{k1}^2(\xi) + V_{k2}^2(\xi)]d\xi \to \min \tag{2.6}$$

Полученную вариационную задачу (2.5), (2.6) будем решать с помощью проблемы моментов. Следуя [3], нужно найти числа l_{k1}, l_{k2}, l_{k3} и l_{k4}, связанные условием

$$l_{k1} + l_{k4} = \lambda_k^\alpha \tag{2.7}$$

для которых минимум квадрата нормы основного пространства

$$(\rho_k^0)^2=\min_{l_{k1}+l_{k4}=\lambda_k^\alpha}\int_{-\vartheta}^{0}\left[\left(h_{k1}^{(l)}(\xi)\right)^2+\left(h_{k2}^{(l)}(\xi)\right)^2\right]d\xi \tag{2.8}$$

где

$$h_{k1}^{(l)}(\xi)=l_{k1}\left(f_k\cos\lambda_k\xi-g_k\sin\lambda_k\xi\right)+l_{k2}\left(f_k\sin\lambda_k\xi+g_k\cos\lambda_k\xi\right)$$
$$h_{k2}^{(l)}(\xi)=l_{k3}\left(f_k\cos\lambda_k\xi-g_k\sin\lambda_k\xi\right)+l_{k4}\left(f_k\sin\lambda_k\xi+g_k\cos\lambda_k\xi\right) \tag{2.9}$$

Норма сопряженного пространства является (2.6).

Подставляя (2.9) в (2.8) и после некоторых вычислений получим

$$(\rho_k^0)^2=\min_{l_{k1}+l_{k4}=\lambda_k^\alpha}\left\{\left[\left(f_kl_{k1}+g_kl_{k2}\right)^2+\left(f_kl_{k3}+g_kl_{k4}\right)^2\right]\frac{\sigma_{k1}}{2}+\right.$$
$$+\left[\left(g_kl_{k1}-f_kl_{k2}\right)^2+\left(g_kl_{k3}-f_kl_{k4}\right)^2\right]\frac{\sigma_{k2}}{2}+ \tag{2.10}$$
$$\left.+\left[\left(l_{k1}l_{k2}+l_{k3}l_{k4}\right)\left(f_k^2-g_k^2\right)+\left(l_{k2}^2-l_{k1}^2+l_{k4}^2-l_{k3}^2\right)f_kg_k\right]\sigma_{k3}\right\}$$

где

$$\sigma_{k1}=\vartheta+\frac{1}{2\lambda_k}\sin2\lambda_k\vartheta,\ \sigma_{k2}=\vartheta-\frac{1}{2\lambda_k}\sin2\lambda_k\vartheta,\ \sigma_{k3}=-\frac{\sin^2\lambda_k\vartheta}{\lambda_k} \tag{2.11}$$

Для нахождения $l_{k1}^0, l_{k2}^0, l_{k3}^0$ и l_{k4}^0 получим систему алгебраических уравнений

$$\left(f_k^2\sigma_{k1}+g_k^2\sigma_{k2}-2f_kg_k\sigma_{k3}\right)l_{k1}+\left[f_kg_k(\sigma_{k1}-\sigma_{k2})+\left(f_k^2-g_k^2\right)\sigma_{k3}\right]l_{k2}=-\mu_k$$
$$\left[f_kg_k(\sigma_{k1}-\sigma_{k2})+\left(f_k^2-g_k^2\right)\sigma_{k3}\right]l_{k1}+\left(g_k^2\sigma_{k1}+f_k^2\sigma_{k2}+2f_kg_k\sigma_{k3}\right)l_{k2}=0$$
$$\left(f_k^2\sigma_{k1}+g_k^2\sigma_{k2}-2f_kg_k\sigma_{k3}\right)l_{k3}+\left[f_kg_k(\sigma_{k1}-\sigma_{k2})+\left(f_k^2-g_k^2\right)\sigma_{k3}\right]l_{k4}=0 \tag{2.12}$$
$$\left[f_kg_k(\sigma_{k1}-\sigma_{k2})+\left(f_k^2-g_k^2\right)\sigma_{k3}\right]l_{k3}+\left(g_k^2\sigma_{k1}+f_k^2\sigma_{k2}+2f_kg_k\sigma_{k3}\right)l_{k4}=-\mu_k$$

где μ_k – неопределенный множитель Лагранжа. Присоединяя к уравнениям (2.12) условие (2.7), получим замкнутую систему относительно $l_{k1}^0, l_{k2}^0, l_{k3}^0, l_{k4}^0$ и μ_k. Полученная система алгебраических уравнений допускает следующее решение:

$$l_{k1}^0=\lambda_k^\alpha\frac{g_k^2\sigma_{k1}+f_k^2\sigma_{k2}+2f_kg_k\sigma_{k3}}{(\sigma_{k1}+\sigma_{k2})\left(f_k^2+g_k^2\right)}$$
$$l_{k2}^0=l_{k3}^0=-\lambda_k^\alpha\frac{f_kg_k(\sigma_{k1}-\sigma_{k2})+\left(f_k^2-g_k^2\right)\sigma_{k3}}{(\sigma_{k1}+\sigma_{k2})\left(f_k^2+g_k^2\right)} \tag{2.13}$$
$$l_{k4}^0=\lambda_k^\alpha\frac{f_k^2\sigma_{k1}+g_k^2\sigma_{k2}-2f_kg_k\sigma_{k3}}{(\sigma_{k1}+\sigma_{k2})\left(f_k^2+g_k^2\right)}$$

Подставляя в (2.10) вместо $l_{k1}^0, l_{k2}^0, l_{k3}^0$ и l_{k4}^0 соответственно их значения из (2.13) и произведя некоторые упрощения, получим

$$\left(\rho_k^0\right)^2=\frac{\lambda_k^{2\alpha}\left(\sigma_{k1}\sigma_{k2}-\sigma_{k3}^2\right)\left(f_k^2+g_k^2\right)}{2(\sigma_{k1}+\sigma_{k2})} \tag{2.14}$$

Выполняя аналогичную подстановку из (2.13) в (2.9), будем иметь

$$h_{k1}^{(0)}(\xi)=l_{k1}^{0}\left(f_k\cos\lambda_k\xi-g_k\sin\lambda_k\xi\right)+l_{k2}^{0}\left(f_k\sin\lambda_k\xi+g_k\cos\lambda_k\xi\right)$$
$$h_{k2}^{(0)}(\xi)=l_{k3}^{0}\left(f_k\cos\lambda_k\xi-g_k\sin\lambda_k\xi\right)+l_{k4}^{0}\left(f_k\sin\lambda_k\xi+g_k\cos\lambda_k\xi\right) \quad (2.15)$$

Для искомых функций

$$V_{ki}^{0}(\xi)=\frac{1}{\left(\rho_k^0\right)^2}h_{ki}^{0}(\xi),\quad i=1,2 \quad (2.16)$$

после подстановки (2.14) и (2.15) получим

$$V_{k1}^{0}(\xi)=\frac{2}{\lambda_k^{\alpha}(\sigma_{k1}\sigma_{k2}-\sigma_{k3}^2)\left(f_k^2+g_k^2\right)^2}\times$$
$$\times\Big\{\left(g_k^2\sigma_{k1}+f_k^2\sigma_{k2}+2f_kg_k\sigma_{k3}\right)\left(f_k\cos\lambda_k\xi-g_k\sin\lambda_k\xi\right)- \quad (2.17)$$
$$-\left[f_kg_k\left(\sigma_{k1}-\sigma_{k2}\right)+\left(f_k^2-g_k^2\right)\sigma_{k3}\right]\left(f_k\sin\lambda_k\xi+g_k\cos\lambda_k\xi\right)\Big\}$$

$$V_{k2}^{0}(\xi)=\frac{2}{\lambda_k^{\alpha}(\sigma_{k1}\sigma_{k2}-\sigma_{k3}^2)\left(f_k^2+g_k^2\right)^2}\times$$
$$\times\Big\{-\left[f_kg_k\left(\sigma_{k1}-\sigma_{k2}\right)+\left(f_k^2-g_k^2\right)\sigma_{k3}\right]\left(f_k\cos\lambda_k\xi-g_k\sin\lambda_k\xi\right)+ \quad (2.18)$$
$$+\left(f_k^2\sigma_{k1}+g_k^2\sigma_{k2}-2f_kg_k\sigma_{k3}\right)\left(f_k\sin\lambda_k\xi+g_k\cos\lambda_k\xi\right)\Big\}$$

Так как $\left(\rho_k^0\right)^2>0$, то найденные функции $V_{k1}^{0}(\xi)$ и $V_{k2}^{0}(\xi)$ являются оптимальными и универсальными.

3. О сходимости решений. В п. 2 для каждого $k=1,2,\ldots$ построены оптимальные в смысле (2.6) функции $V_{k1}^{0}(\xi)$ и $V_{k2}^{0}(\xi)$. Покажем ограниченность нормы бесконечномерного вектора

$$\left(V^0(\xi)\right)'=\left(V_{11}^0(\xi),V_{12}^0(\xi),\ldots,V_{k1}^0(\xi),V_{k2}^0(\xi),\ldots\right) \quad (3.1)$$

Вычислим норму этого вектора

$$\left\|V^0\right\|^2=\int_{-\vartheta}^{0}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(V_{k1}^0(\xi)\right)^2+\left(V_{k2}^0(\xi)\right)^2\right]\right\}d\xi=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\vartheta}^{0}\left[\left(V_{k1}^0(\xi)\right)^2+\left(V_{k2}^0(\xi)\right)^2\right]d\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\left\|V_k^0\right\|^2 \quad (3.2)$$

Учитывая (2.16), имеем

$$\left\|V_k^0\right\|^2=\frac{1}{\left(\rho_k^0\right)^2}.$$

Следовательно, учитывая (2.14) и (2.11) из (1.12) и (3.2) соответственно, получим

$$\left|\varphi_{ki}[t,\Delta_k(\tau)]\right|\leq\frac{2\delta_k}{\lambda_k^{\alpha}\sqrt{\vartheta\left(1-\dfrac{\sin^2\lambda_k\vartheta}{\lambda_k^2\vartheta^2}\right)\left(f_k^2+g_k^2\right)}}$$

$$\|V^0\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\vartheta\lambda_k^{2\alpha}\left(1-\frac{\sin^2\lambda_k\vartheta}{\lambda_k^2\vartheta}\right)\left(f_k^2+g_k^2\right)} \tag{3.3}$$

Из (3.3) видно, что выбором функций $f(x)$ и $g(x)$ можно улучшить сходимость этого ряда.

Таким образом, имея оптимальные функции $V_{k1}^0(\xi)$ и $V_{k2}^0(\xi)$ в явном виде (2.17) и (2.18), а также значение измерения $y_k(\tau)$ по формуле (2.4), получим $Q_k^{(1)}(\tau)$ и $Q_k^{(2)}(\tau)$. Подставляя полученное значение $Q_k(t)$ в (1.3), будем иметь функцию состояния струны $Q(x,t)$ (аналогично и для $\dot{Q}(x,t)$) для любой точки $x\in(0,l)$. Отметим, что сходимость полученного ряда следует из сходимости нормы (3.3).

Выражаю свою искреннюю благодарноасть профессору М.С.Габриеляну за внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.

2.Габриелян М.С. О стабилизации неустойчивых движений механических систем. – ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.

3.Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 28.03.1995