ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 532.5:532.135

НЕСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Петросян Л.Г.

Լ.Գ. Պետրոսյան
Երկու համառանցք գլանների միջև հեղուկի հոսքի ոչ սիմետրիկ մոդելը

Օգտագործված է ոչ սիմետրիկ կառուցվածքային հեղուկի մոդելը լուծելու համակենտրոն գլանների միջև հեղուկի հոսքի մասին խնդիրը: Դիտարկված են հեղուկի հաստատված շարժումները ինչպես անշարժ, այնպես էլ հոսքի շարժվող սահմանների դեպքում: Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ արագության և անկյունային արագության, ինչպես նաև օղակաձև կտրվածքով ներհոսող հեղուկի ծավալային ծախսի և ներքին գլանի (մխոցի) վրա գործող շփման ուժերի համար:
Հեղուկի միկրոկառուցվածքի ազդեցությունը հեղուկ շերտի հոսքի վրա պատկերված են գրաֆիկների վրա:

L.G. Petrosian
Non-symmetrical model of linear flow fluids between two coaxial cylinders

Использована модель структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений к решению задачи о прямолинейном течении между двумя коаксиальными цилиндрами. Рассмотрены установившиеся движения жидкости в случаях как неподвижной, так и подвижной границы течения. Получены аналитические выражения для скорости, угловой скорости, а также для расхода, протекающего через кольцевое сечение и для сил трения, действующих на внутренний цилиндр (поршень). Влияние микроструктуры на течение слоя жидкости проиллюстрировано на графиках.

1. Основные уравнения структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений

А. Уравнения поля

Общая система уравнений поля структурной несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений в векторной форме имеет вид [1]

$$\nabla\cdot\vec{v}=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+(\nu+\nu_r)\nabla^2\vec{v}+2\nu_r\nabla\times\vec{\omega}+\vec{f} \tag{1.2}$$

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt}=2\nu_r(\nabla\times\vec{v}^2-2\vec{\omega})+(c_0+c_d-c_a)\nabla(\nabla\cdot\vec{\omega})+(c_d+c_a)\nabla^2\vec{\omega}+\vec{c} \tag{1.3}$$

Здесь ρ – массовая плотность жидкости, p – давление, I – скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, $\vec{v}$ – вектор скорости точки, $\vec{\omega}$ – вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν – кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r – кинематическая вращательная вязкость; c_0, c_d, c_a – коэффициенты моментной вязкости; $d(\cdots)/dt$ – полная производная по времени, ∇ – пространственный градиент, $\vec{f}$ – вектор массовой силы, $\vec{c}$ – вектор массового момента.

Б. Определяющие уравнения

Определяющие уравнения для тензоров силовых напряжений τ_{ij} и тензоров моментных напряжений μ_{ij} в декартовых координатах в случае изотропных несимметричных жидкостей имеют вид [1]

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) + \mu_r(v_{j,i} - v_{i,j}) - 2\mu_r \varepsilon_{mij}\omega_m \quad (1.4)$$

$$\mu_{ij} = c_0'\omega_{k,k}\delta_{ij} + c_d'(\omega_{i,j} + \omega_{j,i}) + c_a'(\omega_{j,i} - \omega_{i,j}) \quad (1.5)$$

где $\mu = \rho\nu$, $\mu_r = \rho\nu_r$, $c_0' = \rho c_0$, $c_d' = \rho c_d$, $c_a' = \rho c_a$ – положительные скаляры, характеризующие изотропные свойства среды, δ_{ij} – дельта-тензор Кронекера, ε_{ijk} – альтернирующий тензор Леви-Чивиты.

2. Плоско-параллельное течение несимметричной жидкости в круглой кольцевой трубе. Общее решение

Рассмотрим течение вязкой несимметричной структурной жидкости в кольцевой трубе, образованной двумя соосными круглыми цилиндрическими поверхностями: внешней – радиуса R и внутренней – радиуса R_1. Подходящей системой координат в этой задаче является цилиндрическая система (r, φ, z) с осью z, направленной вдоль оси трубы.

Тогда, пренебрегая действием массовых моментов $\bar{c}$ и принимая во внимание симметрию течения, для компонентов поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц имеем

$$\begin{aligned} &1.\ v_r = v_\varphi = 0, \quad v_z = v(r, z) \\ &2.\ \omega_r = \omega_z = 0, \quad \omega_\varphi = \omega(r) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнение неразрывности (1.1) даст $\partial v/\partial z = 0$, а уравнения поступательного движения (1.2) и вращательного движения (1.3) дают

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r} = \dfrac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \\ \dfrac{1}{r}\left[(\mu + \mu_r)\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{dr}\right) + 2\mu_r\dfrac{d}{dr}(r\omega)\right] = \dfrac{dp}{dz} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$(c_a' + c_d')\frac{d}{dr}\left(\frac{d\omega}{dr} + \frac{\omega}{r}\right) - 2\mu_r\frac{dv}{dr} - 4\mu_r\omega = 0 \quad (2.3)$$

Так как левая часть уравнений (2.2) зависит только от r, а правая часть только от z, то

$$\frac{1}{r}\left[(\mu + \mu_r)\frac{d}{d\mu}\left(\mu\frac{dv}{d\mu}\right) + 2\mu_\mu\frac{d}{d\mu}(\mu\omega)\right] = \frac{dp}{dz}, \quad \frac{dp}{dz} = \text{const} \quad (2.4)$$

Общие решения уравнений (2.3) и (2.4)имеют вид

$$\omega = C_2 I_1(kr) + C_3 K_1(kr) - Pr\frac{1}{k^2} - \frac{2\mu_r}{c_a' + c_d'}\frac{1}{rk^2}C_1 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} v = {} & 2\mu_r(\mu + \mu_r)^{-1}k^{-1}\left[-C_2 I_0(kr) + C_3 K_0(kr)\right] + \\ & + \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r^2 + \frac{\mu + \mu_r}{\mu}C_1 \ln r + C_4 \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$k = \frac{N}{l} = \left(\frac{4\mu}{\mu + \mu_r}\frac{\mu_r}{c_a' + c_d'}\right)^{1/2}, \quad P = \frac{\mu_r}{(\mu + \mu_r)(c_a' + c_d')}\frac{dp}{dz}$$

$$N=\left(\frac{\mu_r}{\mu+\mu_r}\right)^{1/2}, \quad l=\left(\frac{c'_a+c'_d}{4\mu}\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

Здесь $I_0(kr), I_1(kr)$ и $K_0(kr)$, $K_1(kr)$ – модифицированные цилиндрические (бесселевы) функции нулевого и первого порядка первого родов и нулевого и первого порядка второго родов; C_1, C_2, C_3 и C_4 – произвольные константы интегрирования.

3. Определение постоянных интегрирования при разных граничных условиях

А. Случай неподвижных соосных цилиндров

Так как жидкость прилипает к стенкам труб $r=R$ и $r=R_1$, то граничные условия для поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц запишутся в форме:

$$\text{при} \quad r=R \quad \text{и} \quad r=R_1: \quad v=0, \ \omega=0 \tag{3.1}$$

Определяя в (2.5) и (2.6) значения C_1, C_2, C_3 и C_4 по условиям (3.1), найдем окончательно следующие законы изменения скоростей в сечении кольцевой трубы:

$$v^*=\frac{v}{v_0}=1-r^{*2}+\frac{2\mu_r}{\mu+\mu_r}\frac{1}{\lambda}\left\{C_2^*\left[I_0(\lambda r^*)-I_0(\lambda)\right]-\right.$$
$$\left.-C_3^*\left[K_0(\lambda r^*)-K_0(\lambda)\right]\right\}-\frac{2\mu_r}{\mu+\mu_r}C_1^*\ln r^* \tag{3.2}$$

$$\omega^*=\frac{\omega R}{v_0}=r^*-C_2^*I_1(\lambda r^*)-C_3^*K_1(\lambda r^*)+\frac{\mu_r}{\mu+\mu_r}\frac{C_1^*}{r^*} \tag{3.3}$$

где

$$v_0=-\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dz}$$

$$r^*=\frac{r}{R},\ \lambda=\frac{N}{l}R=kR=\left(\frac{4\mu}{\mu+\mu_r}\frac{\mu_r}{c'_a+c'_d}\right)^{1/2}R$$

$$C_1^*=\frac{1}{a}\left\{(bc+ad)\left[a-\left(1-\frac{R_1^2}{R^2}\right)I_1(\lambda)\right]+e\left(1-\frac{R_1^2}{R^2}\right)\left(a\lambda\frac{\mu+\mu_r}{\mu_2}-c\right)\right\}A$$

$$C_2^*=\frac{1}{a}\left[\left(1-\frac{R_1^2}{R^2}\right)-bAB\right],\quad C_3^*=AB$$

$$A=\left[e\lambda\ln\frac{R_1}{R}-\frac{\mu_r}{\mu+\mu_r}(bc+ad)\right]^{-1}$$

$$B=a\lambda\ln\frac{R_1}{R}+\left(1-\frac{R_1^2}{R^2}\right)\left[\frac{1}{2}a\lambda-\lambda\ln\frac{R_1}{R}I_1(\lambda)-\frac{\mu_r}{\mu+\mu_r}c\right]$$

$$a=I_1(\lambda)-\frac{R_1}{R}I_1\left(\frac{R_1}{R}\lambda\right),\quad b=K_1(\lambda)-\frac{R_1}{R}K_1\left(\frac{R_1}{R}\lambda\right)$$

$$c=I_0(\lambda)-I_0\left(\frac{R_1}{R}\lambda\right),\quad d=K_0(\lambda)-K_0\left(\frac{R_1}{R}\lambda\right)$$

$$e=aK_1(\lambda)-bI_1(\lambda) \tag{3.4}$$

Здесь v_0 – максимальная по сечению скорость на оси трубы радиуса R (при $R_1 = 0$) в классическом течении Руазейля. Решение (3.2) переходит в классическое при $\mu_r = 0$ [2-4]

$$v = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left[(R_1^2 - r^2) + \frac{(R^2 - R_1^2)}{\ln(R/R_1)}\ln\frac{r}{R_1}\right] \tag{3.5}$$

и (3.3) дает $\omega = 0$.
Заметим, что правая часть формулы (3.5) при уменьшении значения радиуса внутреннего цилиндра R_1 до нуля после раскрытия неопределенности переходит в решение прямолинейного движения вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе – течение Гагена-Пуазейля:

$$v = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}(R^2 - r^2)$$

Рассмотрим другой предельный случай

$$r = R_1\left(1 + \frac{y}{R_1}\right) \text{ и } R = R_1\left(1 + \frac{h}{R_1}\right)$$

считая отношения y/R_1 и h/R_1 малыми, разлагая отношение логарифмов $\ln(r/R_1)/\ln(R/R_1)$, входящее в правую часть (3.5), в ряд и ограничиваясь в этом ряде слагаемыми, содержащими y/R_1 и h/R_1 не выше второй степени, получим приближенное выражение для скорости движения в узкой кольцевой трубе [2,3]

$$v = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz}(hy - y^2) \tag{3.6}$$

Обращаясь к решению (3.2), получим для расхода через сечение кольцевой трубы следующую формулу:

$$Q^* = \frac{Q}{Q_0} = 2\left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right) - \left(1 - \frac{R_1^4}{R^4}\right) + \frac{8\mu_r}{\mu + \mu_r}\frac{1}{\lambda^2}\left\{(C_2^* a + C_3^* b) - \frac{1}{2}\lambda\left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[C_2^* I_0(\lambda) - C_3^* K_0(\lambda)\right]\right\} + \frac{2\mu_r}{\mu + \mu_r}C_1^*\left[2\frac{R_1^2}{R^2}\ln\frac{R_1}{R} + \left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right)\right] \tag{3.7}$$

где

$$Q_0 = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{dp}{dz} \tag{3.8}$$

Здесь Q_0 – расход жидкости в классическом течении Гагена-Пуазейля через сечение трубы радиуса R. Решение (3.7) переходит в классическое при $\mu_r = 0$ [3,4]

$$Q_{\text{кл}}^* = \left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right)\left[1 + \frac{R_1}{R^2} - \frac{1 - R_1^2/R^2}{\ln(R/R_1)}\right] \tag{3.9}$$

Структурные несимметричные жидкости характеризуются двумя безразмерными параметрами.

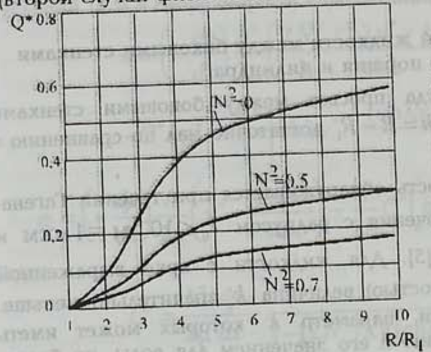
Параметр связи N, определенный формулой (2.7), характеризует связь уравнений (1.2) поступательного и (1.3) вращательного движений. Когда $\nu_r \to 0$, получаем $N \to 0$, эти уравнения разделяются и уравнение поступательного движения (1.2) сводится к обычному уравнению Навье-Стокса, а уравнение (1.3) ($\vec{c}=0$) дает $\omega = \text{const}$ и при любых граничных условиях $\text{const}=0$.

Второй важный безразмерный параметр L представляет собой отношение зазора между стенками внешнего и внутреннего цилиндров $(R-R_1)$ к характерной материальной длине l (определенной формулой (2.7)), то есть

$$L=\frac{R-R_1}{l}$$

Это число характеризует взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости.

Можно ожидать, что эффекты несимметричности жидкости будут значительными, когда либо l велико (что соответствует большому размеру подструктуры вещества. Последнее означает, что среда дисперсная – имеется несколько фаз), либо зазор между цилиндрами мал (второй случай физически ясен).



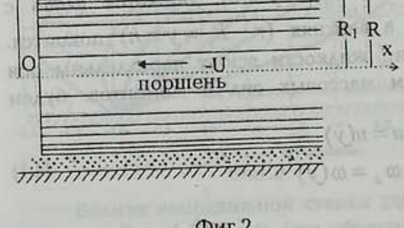
Фиг.1

Большое значение L означает большой зазор между цилиндрами или малую характерную материальную длину l. В этом случае влияние микроструктуры жидкости незначительно. Здесь, по-видимому, представляет интерес второй случай, когда зазор между цилиндрами $(R-R_1)$ мал и сравним с l.

На фиг.1 показаны графики зависимости Q^* от R/R_1 и N при $\lambda=1$. Как видно из этого графика, расход несимметричной структурной жидкости меньше расхода классических жидкостей, где внутреннее вращение не учитывается.

В. Случай, когда внутренний цилиндр двигается поступательно

Рассмотрим течение несимметричной жидкости между двумя соосными цилиндрами, из которых внешний с радиусом R неподвижен, а внутренний с радиусом R_1 (поршень) перемещается влево со скоростью



Фиг.2

$U=\text{const}$ (фиг.2). Это решение дает в первом приближении (без учета влияния концов) закон течения смазки в просвете между боковыми стенками круглого поршня и цилиндра.

Для рассматриваемой задачи граничные условия запишутся в форме:

$$\begin{aligned} &v(R)=0, \quad \omega(R)=0, \\ &v(R_1)=-U, \quad \omega(R_1)=0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Определяя в (2.5) и (2.6) значения C_1, C_2, C_3 и C_4 по этим условиям, найдем

$$V^* = \frac{v}{v_0} = 1 - r^{*2} + \frac{2\mu_r}{\mu+\mu_r}\frac{1}{\lambda}\left\{C_2^*\left[I_0(\lambda r^*) - I_0(\lambda)\right] - C_3^*\left[K_0(\lambda r^*) - K_0(\lambda)\right]\right\} -$$

$$-\left(\frac{2\mu_r}{\mu+\mu_r}C_1^* + e\lambda A\frac{U^*}{2}\right)\ln r^* + \frac{2\mu_r}{\mu+\mu_r}A\frac{U^*}{2}\left[I_0(\lambda) + aK_0(\lambda)\right] \tag{3.11}$$

$$\omega^* = \frac{\omega R}{v_0} = r^* - \left(C_2^* - \lambda bA\frac{U^*}{2}\right)I_1(\lambda r^*) - \left(C_3^* - \lambda aA\frac{U^*}{2}\right)K_1(\lambda r^*) +$$

$$+\left(\frac{\mu_r}{\mu+\mu_r}C_1^* - eA\lambda\frac{U^*}{2}\right)\frac{1}{r^*} \tag{3.12}$$

где

$$U^* = U/v_0\,.$$

4. Течение несимметричной жидкости между боковыми стенками круглого поршня и цилиндра

Рассмотрим случай, когда просвет между боковыми стенками круглого поршня и цилиндра $h = R - R_1$ достаточно мал по сравнению с R_1, то есть $h/R_1 << 1$.

Для воды несимметричность обнаруживается при течении Гагена-Пуазейля в трубе круглого сечения с радиусом $r_0 \le 10^{-6}$ м $= 1$ мкм и параметром $k = 70{,}3\cdot 10^6$ м$^{-1}$ [5]. Для жидкости с ярко выраженной структурностью (несимметричностью) величина k значительно меньше. Будем рассматривать жидкости, параметр k которых может иметь величину меньшую по сравнению с его значением для воды, не более, чем на три порядка. При течении таких жидкостей между коаксиальными цилиндрами, радиусы которых не менее 0,01м, параметр $\lambda = kR > 7\cdot 10^2$.

Имея в виду вышеизложенное и то, что $R_1/R \approx 0{,}999$*, задачу течения смазочной жидкости в тонкой кольцевой трубе можно представить как задачу о прямолинейном движении жидкости между перемещающимися двумя параллельными стенками (течение Куэтта) на расстоянии h [2,3].

Рассмотрим установившееся ламинарное течение несимметричной жидкости, заполняющей все пространство между горизонтальными плоскостями, из которых нижняя $(r - R_1 = y = 0)$ движется влево с постоянной скоростью $U = \text{const}$, а верхняя $(r - R_1 = y = h)$ покоится. Будем считать, что скорости частиц жидкости всюду параллельны оси Ox. Тогда, пренебрегая действием массовых сил и моментов, будем иметь:

$$\begin{aligned} &v = w = 0, \qquad u = u(y) \\ &\omega_x = \omega_y = 0, \qquad \omega_z = \omega(y) \end{aligned} \tag{4.1}$$

---

* Диаметр поршня двигателей ВАЗ равен 76-76,04 мм, а зазор между поршнем и цилиндром равен 0,05÷0,07 мм.

Уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, а уравнения поступательного и вращательного движения (1.2) и (1.3) дают

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{4.2}$$

$$(\nu + \nu_r)\frac{d^2 u}{dy^2} + 2\nu_r \frac{d\omega}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} \tag{4.3}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{c_a + c_d}{2\nu_r}\frac{d^2\omega}{dy^2} - 2\omega \tag{4.4}$$

Граничные условия для поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц будут:

$$\begin{aligned} &u = -U, \quad \omega = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \\ &u = 0, \qquad \omega = 0 \quad \text{при} \quad y = h \end{aligned} \tag{4.5}$$

Решение системы уравнений (4.3) и (4.4) с учетом граничных условий (4.5) в безразмерном виде запишется так:

$$u = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{2N^2}{\lambda}\frac{\text{ch}\lambda y^* - 1}{\text{sh}\lambda} - y^{*2}\right) - U -$$

$$-C^*\left\{y^* - \frac{N^2}{\lambda}\left[\text{sh}\lambda y^* - \frac{(\text{ch}\lambda y^* - 1)(\text{ch}\lambda - 1)}{\text{sh}\lambda}\right]\right\} \tag{4.6}$$

$$\omega = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{h}{2\mu}\left(y^* - \frac{\text{sh}\lambda y^*}{\text{sh}\lambda}\right) - \frac{1}{2h}C^*\left(\text{ch}\lambda y^* - \frac{\text{ch}\lambda - 1}{\text{sh}\lambda}\text{sh}\lambda y^* - 1\right) \tag{4.7}$$

где

$$C^* = \frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx} - \frac{U}{1 - (2N^2/\lambda)((\text{ch}\lambda - 1)/\text{sh}\lambda)}$$

Форма распределения скоростей по (4.6) и (4.7) определяется градиентом давления

$$P = \frac{h^2}{2\mu U}\left(-\frac{dp}{dx}\right)$$

Фиг.3

Для $P > 0$, то есть для случая падения давления в направлении движения поршня, скорость отрицательна по всей высоте канала. При отрицательных P в некоторой части поперечного сечения вблизи неподвижной стенки возможны положительные скорости, то есть возможно возвратное течение.

Вблизи неподвижной стенки (цилиндра) такое движение возникает уже при $P < -1$ (фиг. 4). Это объясняется тем, что для частиц жидкости, находящихся вблизи неподвижной стенки, увлекающее действие соседних, более быстрых слоев в состоянии преодолеть перепад давления, действующей в сторону, противоположную движению поршня.

Кривые распределения скоростей в просвете между боковыми стенками поршня и цилиндра, даваемые решением (4.6) для различных значений N^2 (при $\lambda = 1$) при градиентах давления P=3 и -3, изображены на фиг. 3.

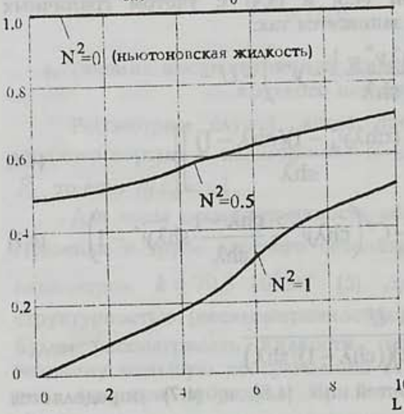
Обращаясь к формуле (4.6), получим для расхода через кольцевое сечение следующее выражение:

$$Q^* = \frac{Q}{Q_0} = 1 - U^* + \frac{6N^2}{\lambda^{*2}} \frac{2\mathrm{sh}\lambda - \lambda\mathrm{ch}\lambda - \lambda}{\mathrm{sh}\lambda} \tag{4.8}$$

где

$$Q_0 = \frac{4}{3}\pi R_1 \frac{(p_0 - p_1)h^3}{\mu l_0}, \quad U^* = \frac{U}{(p_0 - p_1)h^2/6\mu l_0}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p_0 - p_1}{l_0}$$



Фиг. 4

Здесь Q_0 – расход жидкости в классическом течении Пуазейля в плоском канале, ширина которого равна $2\pi R_1$, высота – h; p_0 и p_1 – давление перед и за поршнем.

Отметим, что, если при данной разности давлений $p_0 - p_1$ поршень будет перемещаться в направлении, противоположном градиенту давления, со скоростью

$$U' = \frac{(p_0 - p_1)h^2}{6\mu l_0} + \frac{(p_0 - p_1)h^2}{\mu l_0} \frac{N^2}{\lambda^{*2}} \frac{2\mathrm{sh}\lambda^* - \lambda^*\mathrm{ch}\lambda^* - \lambda^*}{\mathrm{sh}\lambda^*}$$

то, как видно из (4.8), расход смазки будет равен нулю.

Формулу (4.8) для расхода представим при помощи параметров N и $L = \dfrac{h}{l}$ в форме

$$Q^* = 1 - U^* + \frac{6}{L^2} \frac{2\mathrm{sh}NL - NL\mathrm{ch}NL - NL}{\mathrm{sh}NL} \tag{4.9}$$

Выражение расхода (4.9) сводится к классическому решению ньютоновской жидкости, полученное С.М.Таргом [2] при $N \to 0$ или $L \to \infty$

$$Q^* = 1 - U^*$$

Это означает, что в данном предельном случае реологические аномалии отсутствуют. Заметим, что $L = \dfrac{h}{l} \to \infty$ соответствует исчезающему малому размеру элемента подструктуры по сравнению с толщиной слоя.

На фиг. 4 показаны графики зависимости суммы безразмерного расхода Q^* и безразмерной скорости перемещения поршня U^* от параметра L при различных значениях N^2. График показывает, что снижение L соответствует уменьшению расхода при всех значениях N, кроме $N=0$, относящегося к классическому случаю ньютоновской жидкости, в котором расход жидкости не зависит от L.

Таким образом, чем меньше вышеуказанный просвет, тем более явно выражено влияние подструктуры, вызывающее существенное уменьшение расхода смазочного вещества.

Полная сила трения, действующая на поршень длины l_0, равна

$$F = 2\pi R_1 l_0 \tau \tag{4.10}$$

где τ – напряжение силы трения на поверхности внутреннего цилиндра (поршня).

Из (1.4), с учетом (4.6), находим

$$\tau = (\mu + \mu_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu\frac{U}{h}\left(1 - \frac{2N^2}{\lambda}\frac{\operatorname{ch}\lambda - 1}{\operatorname{sh}\lambda}\right)^{-1} + \frac{p_0 - p_1}{2l_0}h \tag{4.11}$$

Полная сила трения, действующая на поршень, будет

$$F = 2\pi R_1 \mu\frac{U}{h}\left(1 - \frac{2N^2}{\lambda}\frac{\operatorname{ch}\lambda - 1}{\operatorname{sh}\lambda}\right)^{-1} + (p_0 - p_1)2\pi R_1 h \tag{4.12}$$

Последним членом по сравнению с разностью сил давления, действующих на поршень, равной $\pi R_1^2(p_0 - p_1)$, можно пренебречь.

Тогда силы трения в безразмерной форме запишутся так:

$$F^{\bullet} = \frac{F}{F_0} = \left(1 - \frac{2N^2}{\lambda}\frac{\operatorname{ch}\lambda - 1}{\operatorname{sh}\lambda}\right)^{-1}$$

где F_0 – сила трения, действующая на поршень, найденная по классической теории ньютоновской жидкости [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Л.Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений. –.Ереван: Изд. ЕГУ, 1984. 308с.
2. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. 420 с.
3. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. –М.: ГИТТЛ, 1955. 519 с.
4. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. 630 с.
5. Петросян Л.Г. К вопросу о масштабном эффекте в асимметричной гидродинамике. – Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1984, т.37, №3, с.35-41.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Изд. Наука, 1971. 1108 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 18.04.1996