

ИЗГИБ ОРТОТРОПНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО
СДВИГА^{*)}

Аревшатян Н.Г., Киракосян Р.М., Степанян С.П.

Ն.Գ. Արևշատյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան, Ս.Պ. Ստեփանյան
Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ կլոր սալի ծռումը ընդլայնական սահմի հաշվառմանը

Եզրույթում [1] տեսության շրջանակներում լուծվում է հավաստագրափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ գտնվող գծայնորեն փոփոխական հաստության օրթոտրոպ կլոր սալի ծռման խնդիրը՝ ընդլայնական սահմի հաշվառմանը: Դիտարկվում են սալի եզրագծի հողակապորեն հենման և կոշտ անբակցման դեպքերը: Կիրառվում է եզրային խնդիրը Կոշու խնդրի բերելու եղանակը [2], [3]:

Ստացած արդյունքների վերլուծության հիման վրա արվում են որակական եզրակացություններ սալի առավելագույն ճկվածքի վրա ընդլայնական սահմի ազդեցության վերաբերյալ՝ կախված նյութի օրթոտրոպիայի բնույթից և հաստության փոփոխման վարքից:

N.G.Arevshatian, R.M.Kirakosian, S.P.Stepanian

On Bending of Orthotropic Circular Plate of Variable Thickness With the Account of Transverse Shear Strains

В рамках уточненной теории [1] решается задача изгиба ортотропной круглой пластинки линейно-переменной толщины, входящей под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки, при учете влияния поперечного сдвига. Рассматриваются случаи шарнирного опирания и защемления контура пластинки. Применяется метод приведения краевой задачи к соответствующей задаче Коши [2], [3]. На основе анализа полученных результатов делаются качественные заключения о влиянии поперечного сдвига на величину наибольшего прогиба пластинки в зависимости от характера ортотропии материала и поведения изменения толщины пластинки.

1. Пусть шарнирно опертая или защемленная по контуру ортотропная пластинка радиуса R , толщина которой h , изменяется по закону

$$h = h_0 + h_1 r, \quad 0 \leq r \leq R, \quad h_1 > -\frac{h_0}{R} \quad (1.1)$$

находится под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q . Здесь r - радиальная координата, h_0 - толщина пластинки в центре, а параметр h_1 характеризует поведение изменения толщины в радиальном направлении.

Рассмотрим задачу изгиба пластинки в рамках уточненной теории [1], учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов. Воспользуемся методом формального приведения краевой задачи к соответствующей задаче Коши [2], [3]. Введем следующие обозначения:

$$r = c\rho, \quad \frac{h_0}{c} = s, \quad \frac{h_1}{s} = \gamma, \quad h = h_0 H, \quad \frac{B_\theta}{B_r} = m^2, \quad \frac{B_r}{\sigma_0} = n$$

^{*)} Доложена на международной конференции по теоретической и прикладной механике (Ереван, 17-19, IX, 1994 г.)

$$\frac{\sigma_0}{G_{rz}} = l, \quad q^* = \frac{6q}{n\sigma_0 s^3}, \quad w = h_0 \bar{w}, \quad \frac{d\bar{w}}{d\rho} = \alpha, \quad \varphi_1 = \sigma_0 l \quad (1.2)$$

$$s\alpha - lt = y, \quad \frac{dy}{d\rho} = v, \quad M_r = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_r, \quad M_\theta = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_\theta$$

Здесь s — неизвестная постоянная размерности длины, ρ — безразмерная радиальная координата, φ_1 — функция, характеризующая влияние поперечного сдвига [1], σ_0 — характерное напряжение, B_r, B_θ и B_{rz} — механические параметры материала пластинки [4].

С помощью этих обозначений для безразмерных величин толщины H и изгибающих моментов пластинки \bar{M}_r и \bar{M}_θ получим

$$H = 1 + \gamma\rho, \quad \bar{M}_r = -\frac{nsH^3}{12\rho} (\rho v + v_r m^2 y) \quad (1.3)$$

$$\bar{M}_\theta = -\frac{nsH^3 m^2}{12\rho} (v_r \rho v + y)$$

где v_r — соответствующий коэффициент Пуассона.

Осесимметричный изгиб пластинки описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [1]:

$$\frac{dy}{d\rho} = v, \quad \frac{dv}{d\rho} = \frac{q^* \rho}{H^3} - \frac{1+4\gamma\rho}{\rho H} v + \frac{m^2 [1 + (1-3v_r)\gamma\rho]}{\rho^2 H} y = F(\rho, y, v) \quad (1.4)$$

В малой окрестности центра пластинки $\rho \leq \rho_0$, где ρ_0 — достаточно малое число, система (1.4) допускает асимптотические решения

$$y = \begin{cases} A_1 \rho^m, & m < 3 \\ \frac{1}{6} q^* \rho^3 \ln \rho, & m = 3 \\ \frac{q^*}{9-m^2} \rho^2, & m > 3 \end{cases}, \quad v = \begin{cases} A_1 m \rho^{m-1}, & m < 3 \\ \frac{1}{2} q^* \rho^2 \ln \rho, & m = 3 \\ \frac{3q^*}{9-m^2} \rho^2, & m > 3 \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь $A_1 < 0$ — произвольная постоянная.

Систему уравнений (1.4) удобно решать численно. Задаваясь некоторыми значениями параметров γ_1, A_1, q^* и переходя к конечным разностям, можно значения функций y и v в последующих друг другу сечениях $\rho_i = \rho_{i-1} + \Delta\rho$, ($i = 1, 2, 3, \dots$) вычислить по формулам

$$y_i = y_{i-1} + v_{i-1} \Delta\rho, \quad v_i = v_{i-1} + F_{i-1} \Delta\rho \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.6)$$

Здесь $\Delta\rho$ — шаг численного интегрирования.

Начальные значения y_0 и v_0 определяются из асимптотических выражений (1.5) для некоторого малого ρ_0 . Численное интегрирование системы (1.4) продолжается до того значения безразмерной координаты $\rho_R = R/c$, для которого удовлетворяется краевое условие задачи, откуда и определяется неизвестная постоянная c . Этим фактически завершается решение задачи, поскольку после него можно вычислить значения расчетных величин в любой точке пластинки.

Рассмотрим два варианта краевых условий:

1. Условие шарнирного опирания

$$\rho v + v_r m^2 y = 0 \quad (M_r = 0) \quad (1.7)$$

2. Условие защемления

$$y = 0 \quad (u_r = 0) \quad (1.8)$$

Так как с удалением от центра защемленной по контуру пластинки изгибающий момент M_r убывает и, не доходя до края, в некотором сечении превращается в нуль, то сначала удовлетворяется условие шарнирного опирания. Поэтому в ходе решения задачи защемленной по контуру пластинки попутно получается и решение задачи при шарнирном опирании. При желании можно путем варьирования одного из параметров A_1 , γ и q^* добиться того, чтобы краевое условие удовлетворялось при $\rho = 1$. Тогда безразмерный прогиб пластинки определится по формуле

$$\bar{w} = -\frac{1}{s} \int_{\rho}^1 (y + H) d\rho \quad (1.9)$$

где

$$t = \frac{ns^2 \gamma H}{8\rho} (\rho v + v_r m^2 y) - \frac{q^* ns^2}{8H} \rho \quad (1.10)$$

2. В табл. 1-3 представлены значения величин

$$w^* = \frac{w_0 h_0^3 B_r}{h_0 R^3 6q}, \quad \Delta = \frac{w_0 - w_0^{k\lambda}}{w_0^{k\lambda}} \cdot 100\% \quad (2.1)$$

подсчитанные при некоторых характерных значениях параметров $h_1 R/h_0$, $\sqrt{B_\theta/B_r}$ и B_r/G_{rz} . Через $w_0^{k\lambda}$ и w_0 обозначены прогибы центра пластинки, полученные по классической и уточненной теориям. Величина Δ определяет поправку к наибольшему прогибу пластинки в процентах, вносимую с учетом поперечного сдвига. В последних строках таблиц приведены значения отношения поправок, соответствующих защемлению Δ_3 и шарнирному опиранию $\Delta_{ш}$ контура пластинки

$$\sqrt{B_\theta/B_r} = 0.5, \quad v_r = 0.3$$

Таблица 1

$h_1 R/h_0$	-0.5			0			1		
	0	50	100	0	30	50	0	10	20
	шарнирное опирание								
w^*	7.014	7.208	7.403	3.806	3.994	4.119	1.456	1.520	1.584
$\Delta_{ш}$	—	2.77	5.55	—	4.92	8.20	—	4.38	8.76
	Защемление								
w^*	1.638	2.095	2.551	0.477	0.664	0.789	0.109	0.146	0.183
Δ_3	—	27.9	55.7	—	39.3	65.5	—	34.00	67.9
$\Delta_3/\Delta_{ш}$	—	10.07	10.04	—	7.99	7.99	—	7.76	7.75

в) увеличении параметра B_θ/B_r , то есть отношения модулей Юнга материала кольцевого и радиального направлений E_θ/E_r .

3. Поправка, вносимая учетом поперечного сдвига, при защемлении контура пластинки получается значительно больше, чем при шарнирном опирании. Отношение этих поправок уменьшается с ростом модуля упругости материала в кольцевом направлении.

Например, при возрастании отношения E_θ/E_r от $0.25 \left(\sqrt{\frac{B_\theta}{B_r}} = 0.5 \right)$

до $4 \left(\sqrt{\frac{B_\theta}{B_r}} = 2 \right)$ отношение Δ_3/Δ_{III} убывает в пять раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. К уточненной теории цилиндрически ортотропных пластин переменной толщины. - Изв. НАН Армении, Механика, 1994, т.47, №5-6, с.64-73.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. - М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
3. Киракосян Р.М. Об одной задаче круглой пластинки наименьшего объема за пределом упругости материала. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1977, т.30, №1, с.21-32.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1987. 360 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
29.05.1996