

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ НЕОДНОРОДНОМ
АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ВЫЗВАННЫХ
ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ ДАВЛЕНИЯ
Саакян С.Г.

Սահակյան Ս.Գ.

Ճնշման կետային աղբյուրից առաջացած ալիքների արարածունք առածոգական անհամասեռ ակուստիկական կիսատարածությունում

Միատիկական կիսատարածության համար, որի մեխանիկական հատկությունները փոխվում են խորությունից կախված ցուցչային օրենքով, լուծվում է կետային աղբյուրից ճնշման ալիքների տարածման խնդիրը:

Խնդրի ճշգրիտ լուծումը ստացվում է ինտեգրալ ձևափոխությունների եղանակով:
Հետադրական էլև ընկնող, անդրադարձող, ինչպես նաև, կանգուն ճնշման ալիքների հատկությունները:

Sahakian S.G.

The propagation of waves in the elastic inhomogeneous acoustic halfspace, induced by a point source of pressure.

В работе рассматривается задача о распространении волн давления в упругом неоднородном акустическом полупространстве от внутреннего точечного источника давления. Предполагается, что параметры, которые характеризуют свойства акустической среды, зависят от глубины по экспоненциальному закону.

Решение задачи в изображениях построено методом интегральных преобразований. Предложен новый подход для обращения решения в изображениях методом Каньяра-Хуа [1], который дает возможность получить точное аналитическое решение задачи в виде эффективных формул.

Приведен анализ полученного решения. Далее исследовано поведение волн вблизи плоской границы неоднородной акустической среды и показано, что для этой неоднородной среды происходит полное внутреннее отражение падающих волн. Известно [2], что для полного внутреннего отражения характерны волны с комплексным эйконалом, называемые неоднородными. Получено, что в этом случае неоднородные волны могут быть описаны в рамках лучевого метода, как в случае полного внутреннего отражения волн от плоской границы раздела двух однородных упругих сред [3].

Исследованы также установившиеся движения неоднородного акустического полупространства и получено условие, при котором появляются стоячие волны.

1. Формулировка задачи и ее решение в изображениях. В рамках линейной теории упругости распространение волн в упругой неоднородной акустической среде с учетом массовых сил описывается уравнением [4]

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \text{grad}(\lambda \text{div} \vec{u}) \quad (1.1)$$

где \vec{u} – вектор перемещения, \vec{F} – плотность массовых сил, λ – коэффициент сжатия и ρ – плотность среды.

Определив давление p по формуле

$$p = -\lambda \text{div} \vec{u} \quad (1.2)$$

и применив операцию дивергенции к обеим частям уравнения (1.1), получим

$$\Delta p - \frac{1}{\rho} \text{grad} \rho \text{grad} p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho \text{div} \vec{F} \quad (1.3)$$

где Δ - оператор Лапласа, $c = \sqrt{\lambda/\rho}$ - скорость распространения волн давления в акустической среде.

Следует отметить, что по формуле (1.2) давление определяется с точностью до слагаемого градиента гармонической функции. Это слагаемое определим возмущенным состоянием акустической среды так, что в выбранный начальный момент времени давление в ней равнялось нулю.

Уравнение (1.3) в цилиндрической системе координат (r, θ, z) при условии, что коэффициент сжатия λ , плотность ρ среды и $\text{div} \vec{F}$ заданы функциями

$$\lambda = \lambda_0 \exp(\alpha^2 z), \quad \rho = \rho_0 \exp(\alpha^2 z) \quad (1.4)$$

$$\text{div} \vec{F} = A_0 J_0(\alpha c_0 t) \delta(t) \frac{\delta(r)}{r} \delta(z - z_0) \quad (1.5)$$

имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \alpha^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} =$$

$$= -2p_0^* \exp(\alpha^2 z) J_0(\alpha c_0 t) \delta(t) \frac{\delta(r)}{r} \delta(z - z_0) \quad (1.6)$$

где $\lambda_0, \rho_0, \alpha, c_0 = \sqrt{\lambda_0/\rho_0}$, $p^* = \rho_0 A_0$ - известные постоянные, $\delta(z)$ - дельта-функция Дирака, $H(t)$ - функция Хевисайда, $J_0(z)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Решение уравнения (1.6) в области $z > 0$ ищется при условиях:

$$p(r, z, t)|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial p(r, z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0; \quad p(r, z, t)|_{z=0} = 0 \quad (1.7)$$

Решение уравнения (1.6) находим методом интегральных преобразований. Примем, что

$$\bar{p}(r, z, s) = \int_0^{\infty} p(r, z, t) \cdot e^{-st} dt \quad (1.8)$$

$$\hat{p}(k, z, s) = \int_0^{\infty} \bar{p}(r, z, s) \cdot J_0(kr) r dr \quad (1.9)$$

$$\bar{p}(r, z, s) = \int_0^{\infty} \hat{p}(k, z, s) \cdot J_0(kr) k dk \quad (1.10)$$

В изображениях уравнение (1.6) будет

$$\frac{d^2 \hat{p}}{dz^2} - m^2 \hat{p} = -\frac{2p_0^* \exp(\alpha^2 z) \delta(z - z_0)}{c_0 \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2}} \quad (1.11)$$

где

$$m = \sqrt{k^2 + (s/c_0)^2 + \alpha^2} \quad (1.12)$$

Ветвь радикала m определяется условием $m > 0$ при $k > 0, s > 0$.

Уравнение (1.10) имеет фундаментальную систему решений

$$\hat{p}_1 = \text{sh}(zm), \quad \hat{p}_2 = \exp(-zm) \quad (1.13)$$

Пользуясь фундаментальной системой решений (1.13) и граничных условий

$$\lim_{z \rightarrow 0} \hat{p}(k, z, s) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \hat{p}(k, z, s) = 0 \quad (1.14)$$

построим функцию Грина. Имеем

$$G(z, \xi) = -\frac{1}{m} \begin{cases} \text{sh}(zm) \exp(-\xi m) & \text{при } 0 \leq z < \xi \\ \exp(-zm) \text{sh}(\xi m) & \text{при } \xi \leq z < +\infty \end{cases} \quad (1.15)$$

Тогда решение уравнения (1.11) будет

$$\hat{p}(k, z, s) = -\frac{2p_0^*}{c_0 \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2}} \int_0^\infty G(z, \xi) \exp(\alpha^2 \xi) \delta(\xi - z_0) d\xi \quad (1.16)$$

Подставив выражение (1.15) в (1.16), получим

$$\hat{p}(k, z, s) = \frac{2p_0^* \exp(\alpha^2 z_0)}{c_0 m \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2}} \times \begin{cases} \text{sh}(zm) \exp(-z_0 m) & \text{при } 0 \leq z < z_0 \\ \exp(-zm) \text{sh}(z_0 m) & \text{при } z_0 \leq z < +\infty \end{cases} \quad (1.17)$$

Оканчательно формулу (1.17) напомним в виде

$$\hat{p}(k, z, s) = \frac{p_0^* \exp(\alpha^2 z_0)}{c_0 m \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2}} \left\{ \exp[-|z - z_0| m] - \exp[-|z + z_0| m] \right\} \quad (1.18)$$

2. Обращение изображений решения. Обращение Ханкеля (1.18) дается формулой (1.10):

$$\bar{p}(r, z, s) = \frac{p_0^* \exp(\alpha^2 z_0)}{c_0 \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2}} \times \quad (2.1)$$

$$\times \int_0^\infty \frac{1}{m} \left\{ \exp[-|z - z_0| m] - \exp[-|z + z_0| m] \right\} J_0(kr) k dk$$

Подставив в (2.1) интегральное представление Пуассона [5]

$$J_0(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[ikr \cos \phi] d\phi \quad (2.2)$$

получим

$$\begin{aligned} \hat{p}(r, z, s) = & \frac{p_0^* \exp(\alpha^2 z_0)}{2\pi c_0 \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{m} \left\{ \exp[-|z - z_0| m + ikr \cos \phi] - \right. \\ & \left. - \exp[-|z + z_0| m + ikr \cos \phi] \right\} k dk d\phi \quad (2.3) \end{aligned}$$

В двукратном интеграле (2.3) заменим переменные интегрирования k, ϕ новыми переменными ω, q по формулам

$$k \cos \varphi = \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2} \omega; \quad k \sin \varphi = \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2} q \quad (2.4)$$

В результате перехода от полярной системы координат к декартовой получим

$$\bar{p}(r, z, s) = \frac{p_0^* \exp(\alpha^2 z_0)}{2\pi c_0 \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2}} \left\{ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{m_0} \exp \left[-\sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2} (z - z_0 | m_0 - i\omega r) \right] \times \right. \\ \left. \times d\omega dq + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{m_0} \exp \left[-\sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2} (z + z_0 | m_0 - i\omega r) \right] d\omega dq \right\} \quad (2.5)$$

где

$$m_0 = \sqrt{\omega^2 + q^2 + 1} \quad (2.6)$$

Сначала находим оригинал изображения Лапласа

$$\bar{g}_j(s) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{m_0} \exp \left[-s(z_j | m_0 - i\omega r) \right] d\omega dq, \quad j = 1, 2 \quad (2.7)$$

где

$$z_1 = |z - z_0|; \quad z_2 = z + z_0 \quad (2.8)$$

Тогда, оригинал изображения (2.3) получается из соотношения [5]

$$\bar{g}_j \left(\sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2} \right) \doteq g_j(c_0 t) - \alpha \int_0^{c_0 t} g_j \left(\sqrt{(c_0 t)^2 - u^2} \right) J_1(\alpha u) du \quad (2.9)$$

Обращение изображения $\bar{g}_1(s)$ возможно получить методом Каньяра. Обращение $\bar{g}_2(s)$ не представляет трудности и получается простой заменой z_1 на z_2 в оригинале изображения $\bar{g}_1(s)$.

На комплексной плоскости ω рассмотрим линию

$$t = z_1 m_0 - i\omega r \quad (2.10)$$

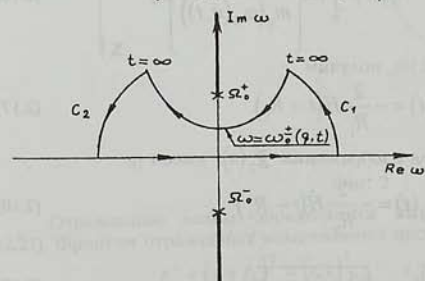
где t принимает только действительные и положительные значения.

Решив уравнение (2.10) относительно ω , получим

$$\omega_0^\pm(q, t) = \left(itr \pm z_1 \sqrt{t^2 - t_q^2} \right) / R_1^2 \quad (2.11)$$

где

$$t_q = R_1 \sqrt{q^2 + 1}; \quad R_1 = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2} \quad (2.12)$$



Фиг. 1

Уравнение (2.12) определяет на плоскости комплексного переменного ω одну ветвь гиперболы с вершиной в точке

$\omega_q = -ir \sqrt{q^2 + 1} / R_1$ и асимптотами $\arg \omega = \pm r / z_1$ при $t \in (t_q, +\infty)$.

Чтобы вычислить внутренний интеграл в формуле (2.7), рассмотрим этот интеграл по замкнутому контуру, состоящему из действительной оси, из ветви гиперболы (2.11) и из дуги C_1 и C_2 окружности с большим радиусом R с центром в начале координат (фиг.1). Ветвь гиперболы (2.11) не пересекает внешний разрез, проведенный между точками ветвления $\Omega_0^\pm = \pm i\sqrt{q^2 + 1}$ в плоскости ω , так как $r/R_1 < 1$. Согласно теории вычетов Коши и по лемме Жордана внутренний интеграл (2.7) по действительной оси преобразуется в интеграл по гиперболе (2.11). Окончательно имеем

$$\bar{g}_1(s) = -2 \int_0^{\infty} \int_0^{t_0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \omega_0(q, t)}{m_0(\omega(q, t))} \right\} \exp(-st) dt dq \quad (2.13)$$

где $\omega_0(q, t) = \omega_0^+(q, t)$.

В двукратном интеграле (2.13) поменяем порядок интегрирования, получим

$$\bar{g}_1(s) = -2 \int_0^{\infty} \left\{ H(t - R_1) \text{v. p.} \int_0^{q_0} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \omega_0(q, t)}{m_0(\omega_0(q, t))} \right] dq e^{-st} \right\} dt \quad (2.14)$$

где

$$q_0 = \sqrt{(t/R_1)^2 - 1} \quad (2.15)$$

Подынтегральная функция в (2.14) терпит разрыв непрерывности при $q = q_0$ и, поэтому, интеграл вычисляется в смысле главного значения по Коши, который указан символом *v. p.* перед знаком интеграла.

Таким образом, в результате удачной замены переменного (2.4) и выбора контура интегрирования (2.5), получается преобразование Лапласа известной функции.

Из (2.14) следует, что оригинал изображения $\bar{g}_1(s)$ будет

$$g_1(t) = -2H(t - R_1) \text{v. p.} \int_0^{q_0} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \omega_0(q, t)}{m_0(\omega_0(q, t))} \right] dq \quad (2.16)$$

Вычисляя интеграл (2.16), получим

$$g_1(t) = -\frac{2}{R_1} H(t - R_1) \quad (2.17)$$

Отсюда, для оригинала изображения $\bar{g}_2(s)$ имеем

$$g_2(t) = -\frac{2}{R_2} H(t - R_2) \quad (2.18)$$

где

$$R_2 = \sqrt{r^2 + (z + z_0)^2} \quad (2.19)$$

Подставив полученные выражения (2.17) и (2.18) в (2.9), после интегрирования получим

$$\bar{g}_j \left(\sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2} \right) \doteq -\frac{4c_0}{R_j} H(c_0 t - R_j) + \frac{2c_0}{R_j} J_0 \left(\alpha \sqrt{(c_0 t)^2 - R_j^2} \right) \quad (2.20)$$

Окончательно, волны давления в упругом неоднородном акустическом полупространстве, вызванные внутренним точечным источником, определяются формулой:

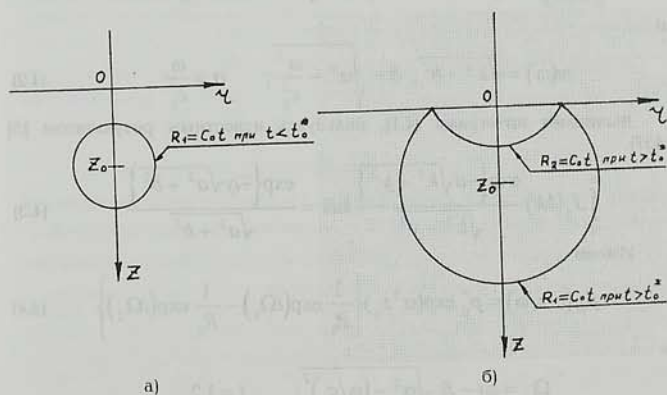
$$p(r, z, t) = \frac{P_0^*}{\pi} \exp(\alpha^2 z_0) \left\{ \frac{1}{R_1} H(c_0 t - R_1) J_0 \times \right. \\ \left. \times \left(\alpha \sqrt{(c_0 t)^2 - R_1^2} \right) - \frac{1}{R_2} H(c_0 t - R_2) J_0 \left(\alpha \sqrt{(c_0 t)^2 - R_2^2} \right) \right\} \quad (2.21)$$

В частности, решение аналогичной задачи для упругого однородного акустического полупространства получается из формулы (2.21), если примем $\alpha = 0$.

3. Исследование решения. Решение (2.21) представляется суммой двух слагаемых. Первое из них определяет падающие волны, фронт которых определяется уравнением

$$r^2 + (z - z_0)^2 = (c_0 t)^2 \quad (3.1)$$

В пространстве (r, θ, z) уравнение (3.1) определяет сферу с радиусом $c_0 t$ и с центром в точке приложения источника давления (фиг.2). Начиная с момента времени $t^* = z_0/c_0$ падающие волны доходят плоской границы полупространства и происходит отражение.



Фиг. 2

Отраженные волны определяются вторым слагаемым формулы (2.21). Фронт отраженных волн является часть сферы

$$r^2 + (z + z_0)^2 = (c_0 t)^2; \quad z > 0 \quad (3.2)$$

с радиусом $c_0 t$ и с центром в точке, симметричной точке приложения источника давления, относительно плоской границы акустического полупространства (фиг.3). Таким образом, в любой момент времени $t > t^*$ фронт волн давления определяется пересечением двух сферических поверхностей (3.1) и (3.2) при $z > 0$.

Отраженные волны распространяются так, как будто лучи исходят от источника, находящегося в точке $(0, 0, -z_0)$. Это явление связано с полным внутренним отражением падающих волн от плоской границы неоднородной акустической среды.

Амплитуды падающих и отраженных волн давления определяются, соответственно, формулами

$$A_1 = \frac{p_0^* \exp(\alpha^2 z_0)}{\pi R_1}; \quad A_2 = \frac{p_0^* \exp(\alpha^2 z_0)}{\pi R_2}$$

В решении (2.21) множители $J_0(\alpha \sqrt{(c_0 t)^2 - R_j^2})$; $j = 1, 2$ обусловлены неоднородностью акустической среды.

Волны давления, как следовало ожидать, прерывают конечный разрыв непрерывности на фронтах падающих и отраженных волн.

4. Дисперсия. Эффект дисперсии характерен для волн, распространяющихся в неоднородных средах. Теперь исследуем дисперсионные свойства акустической среды, для чего решение в изображении Лапласа (2.1) напомним для установившихся волн:

$$\bar{p}(r, z, i\omega) \equiv p_{ss}(r, z, \omega) = p_0^* \exp(\alpha^2 z_0) \exp(i\omega t) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{1}{m(\omega)} \left\{ \exp[-|z - z_0| m(\omega)] - \exp[-|z + z_0| m(\omega)] \right\} J_0(kr) k dk \quad (4.1)$$

где

$$m(\omega) = \sqrt{k^2 - b^2}; \quad b = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2}}; \quad \alpha > \frac{\omega}{c_0} \quad (4.2)$$

Вычислим интегралы (4.1), пользуясь известным результатом [5] (с.457).

$$\int_0^\infty J_0(bk) \frac{\exp\{-a\sqrt{k^2 - y^2}\}}{\sqrt{k^2 - y^2}} k dk = \frac{\exp\{\mp iy\sqrt{a^2 + b^2}\}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4.3)$$

Имеем

$$p_{ss}(r, z, \omega) = p_0^* \exp(\alpha^2 z_0) \left\{ \frac{1}{R_1} \exp(i\Omega_1) - \frac{1}{R_2} \exp(i\Omega_2) \right\} \quad (4.4)$$

где

$$\Omega_j = \omega t - R_j \sqrt{\alpha^2 - (\omega/c_0)^2}; \quad j = 1, 2$$

есть фазы падающих и отраженных волн, соответственно.

Определим фазовую скорость волн. При условии, что $\Omega_j = \text{const}$ имеем

$$c_{ji} = \frac{dR_j}{dt} = \frac{\omega}{k(\omega)} \quad (4.5)$$

где

$$k(\omega) = \sqrt{\alpha^2 - (\omega/c_0)^2} \quad (4.6)$$

есть волновое число падающих и отраженных волн.

Из решения (4.4) для установившихся колебаний видно, что при $\omega < \alpha c_0$ в неоднородной акустической среде появляются стоячие волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Hoop A.T. A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems,- Appl. Sci.Res. Sect. B. 1960, vol. 8, №4, p.349-356.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах.-М.: Академиздат, 1957. 502с.
3. Бабич В.М., Киселев А.П. Геометросейсмическое описание "нелучевых" волн Р, S',...-Л.: Препринт ЛОМИ Р-11-87, 1987. 24с.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды.-М.: Наука, т.1, 1970.-492с.
5. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций.-М.: ИЛ, т.1, 1949.-798с.

Ереванский архитектурно-
строительный институт

Поступила в редакцию
20.06.1996