ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, №3-4, 1997 Механика

К СВОБОДНЫМ КОЛЕБАНИЯМ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա.Մովսիսյան
Անհամասեռ սալի ազատ տատանումների մասին

Դիտարկված է երկայնական կամ ընդլայնական անհամասեռության սալի ազատ տատանումները (գլանային ծռում) ընդլայնական սահքերի հաշվառումով: Ստացված օրինակները թույլ են տալիս դատել դասական տեսության կիրառելիության սահմանների մասին:

Քննարկված է նաև այն դեպքը, երբ անհամասեռությունը կետի դիրքի ստոխաստիկ ֆունկցիա է և հակադարձ խնդիրը՝ ինչպես տրված հաճախությունների միջոցով կարելի է որոշել անհամասեռությունը:

L.A.Movsisian
About the free vibration of nonhomogeneous plate

Исследуются свободные колебания неоднородных пластин. Начиная с [1], автором были рассмотрены многочисленные задачи определения собственных чисел (критические параметры, частоты) упругих и упруго-пластических систем с различными неоднородностями. Здесь, в отличие от них, уравнение движения берется с учетом поперечных сдвигов. Последний не является самоцелью, а в какой-то степени позволит определить пределы применимости классической теории и для неоднородных пластин. Продольная и поперечная неоднородности изучаются в отдельности.

Вскользь изучаются еще два вопроса: случай, когда неоднородность является стохастической и обратная задача - как по частотам определить неоднородность.

1. Имеется изотропная неоднородная пластинка. Координатная плоскость xy находится в срединной плоскости пластинки. Для перемещений принимается

$$u_x = u(x,y) + \frac{2z}{h}\varphi(x,y), \quad u_y = v(x,y) + \frac{2z}{h}\psi(x,y), \quad u_z = w(x,y) \tag{1.1}$$

которым соответствуют деформации

$$\begin{gathered} e_x = \varepsilon_1 + \frac{2z}{h}\chi_1, \quad e_y = \varepsilon_2 + \frac{2z}{h}\chi_2, \quad e_{xy} = \omega + \frac{2z}{h}\tau \\ e_{xz} = \gamma_1, \quad e_{yz} = \gamma_2 \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь h - толщина пластинки

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \chi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \chi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \gamma_1 = \frac{2}{h}\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{h}\psi + \frac{\partial w}{\partial y} \end{gathered} \tag{1.3}$$

Если предполагать, что модуль упругости – функция от трех координат, а коэффициент Пуассона постоянен (обычно по понятным соображениям так и принимается, например [2], к тому же это не существенно и можно было обойтись без такого предположения) и представить его в виде суммы четной и нечетной функций относительно

$$E(x,y,z) = E_0(x,y,z) + E_1(x,y,z) \tag{1.4}$$

то соотношения упругости запишутся

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ S \\ M_1 \\ M_2 \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 & \nu I_0 & 0 & I_1 & \nu I_1 & 0 \\ & I_0 & 0 & \nu I_1 & I_1 & 0 \\ & & \dfrac{1-\nu}{2} I_0 & 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} I_1 \\ & & & I_2 & \nu I_2 & 0 \\ & & & & I_2 & 0 \\ & & & & & \dfrac{1-\nu}{2} I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \omega \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \tau \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

$$N_1 = \frac{1-\nu}{2} I_0 \gamma_1, \quad N_2 = \frac{1-\nu}{2} I_0 \gamma_2$$

где

$$I_0 = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E_0 dz, \quad I_1 = \frac{2}{h(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E_1 z dz, \quad I_2 = \frac{2}{h(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E_2 z^2 dz$$

Если плотность материала также представить в виде (1.4), то уравнения движения будут

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + X = R_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + Y = R_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + R_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + Z = R_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = N_1 - Q_1 + R_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} = N_2 - Q_2 + R_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + R_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Нет смысла записывать уравнение в перемещениях, отметим лишь, что, как и следовало ожидать, в общем случае плоская задача и задача изгиба не распадаются.

Для выяснения характера влияния неоднородности на частоты и пределы применимости классической теории изгиба $\left(\varphi = -\dfrac{h}{2}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \ \psi = -\dfrac{h}{2}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)$ будет изучен ряд одномерных задач. По этим же соображениям в отдельности будут рассмотрены поперечная и продольная неоднородности.

Рассмотрение двумерных задач принципиальных трудностей не вызывает и можно провести совершенно аналогичным образом [3].

2. Здесь будем рассматривать две задачи свободных колебаний, когда имеется поперечная неоднородность. Пусть коэффициент упругости есть

$$E = E_0 + \frac{2}{h} z E_1, \quad E_0, E_1 = \text{const} \tag{2.1}$$

Уравнениями движения будут

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \delta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a^2 \left(\frac{2}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$c^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\delta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=a^2\left(\frac{12}{h^2}\varphi+\frac{6}{h}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

Здесь

$$c^2=\frac{E_0}{\rho\left(1-\nu^2\right)},\quad a^2=\frac{E_0}{2(1+\nu)\rho},\quad \delta=\frac{E_1}{E_0}$$

Так как нет определенной зависимости между коэффициентом упругости и плотностью материала, для простоты здесь и в дальнейшем последняя принимается постоянной.

Для граничных условий свободного опирания частотное уравнение будет

$$\omega^6-\left[2c^2\lambda^2+a^2\left(\frac{12}{h^2}-\lambda^2\right)\right]\omega^4+\left[a^2c^2\lambda^2\left(\frac{12}{h^2}+2\lambda^2\right)+\right.$$

$$\left.+c^4\lambda^4\left(1-\frac{1}{3}\delta^2\right)\right]\omega^2-a^2c^4\lambda^6\left(1-\frac{1}{3}\delta^2\right)=0 \tag{2.3}$$

$$\lambda=\frac{m\pi}{l},\qquad m=1,2,3,\ldots$$

В табл. 1 приведены величины, пропорциональные значениям безразмерной частоты $\left(\Omega=\dfrac{\omega h}{2\sqrt{3}a}\right)$ для различных δ и $\xi=\dfrac{\pi h}{2\sqrt{3}l}$. Для каждого случая наибольшие значения Ω соответствуют инерции поворота, средние – продольному движению и наименьшие – изгибу. Коэффициент Пуассона взят равным 0.3.

Для сравнения значений изгибной частоты, полученных по (2.3) и по классической постановке в табл. 2 приведены их значения для некоторых δ для балки $(\nu=0)$. В каждой клетке в первых строках помещены значения с учетом сдвига, а во вторых – без него. Истинные значения Ω есть приведенные в таблицах, умноженные на 10^{-n}. В последних столбцах таблиц здесь и в дальнейшем помещены значения *n*.

Таблица 1

ξ \ δ	0	0.25	0.5	0.75	1	*n*
1/5	1.072 3.317 0.6306	1.073 3.379 0.6244	1.073 3.372 0.6054	1.074 3.358 0.5719	1.073 3.379 0.5204	0 1 1
1/10	1.019 1.691 1.659	1.019 1.691 1.642	1.019 1.690 1.590	1.019 1.688 1.498	1.019 1.686 1.358	0 1 2
1/15	1.027 1.069 0.6727	1.027 1.069 0.6652	1.027 1.069 0.6431	1.027 1.069 0.6053	1.027 1.068 0.5504	 1 2

Из таблиц видно, что помимо известных выводов относительно частот, определенных по классической и уточненных теориях, увеличение неоднородности (δ) увеличивает разность между ними.

Таблица 2

$\xi \backslash \delta$	0	0.5	1	n
1/5	0.5348 0.5657	0.5128 0.5514	0.4393 0.4669	1
1/10	1.393 1.483	1.534 1.360	1.140 1.162	2
1/15	0.5666 0.5666	0.5357 0.5422	0.4582 0.4628	3

Частоты, соответствующие инерции поворота и растяжению, менее чувствительные к изменению неоднородности в отличие от изгибной частоты. Частоты инерции поворота с увеличением неоднородности увеличиваются, в то время как изгибная частота, наоборот, – уменьшается.

Рассмотрим теперь симметричную относительно срединной плоскости случай неоднородности:

$$E = E_0 + \frac{4z^2}{h^2} E_1 \tag{2.4}$$

Изгиб здесь не сопровождается продольным движением и уравнениями движения будут:

$$\begin{gathered} a^2 A\left(\frac{2}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad A = 1 + \frac{1}{3}\delta \\ c^2 B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = a^2 A\left(\frac{12}{h^2}\varphi + \frac{6}{h}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad B = 1 + \frac{3}{5}\delta \end{gathered} \tag{2.5}$$

Частотное уравнение для тех же граничных условий будет

$$\omega^4 - \omega^2\left[A\left(1+\xi^2\right) + B\delta\xi^2\right] + AB\delta\xi^4 = 0 \tag{2.6}$$

В табл. 3 приведены значения Ω для некоторых ξ и δ для балки. Для каждой ξ в первых строках помещены частоты инерции поворота, а во вторых – изгибные. Для последних в каждой клетке первые числа получены по (2.6), а во вторые - по классической теории.

В отличие от предыдущего случая здесь и сдвиговые частоты чувствительны к неоднородности.

Таблица 3

$\xi \backslash \delta$	-1	0	1	10	n
1/5	0.8382	1.057	1.229	2.246	0
	0.3425 0.3578	0.5348 0.5657	0.6723 0.7155	1.387 1.497	1
1/10	0.8254	1.015	1.174	2.125	0
	0.8849 0.8944	1.393 1.414	1.752 1.788	3.665 3.742	2

Рассматривая приведенные таблицы, можно заключить, что даже при существенной неоднородности для тонких пластин можно пользоваться классической теорией (для $\xi = 0.1$ разница между частотами, вычисленная по классической и по уточненной теориях для первой при $\delta = 1$, а для второй при $\delta = 10$, отличаются не более 2%)

3. Теперь рассмотрим движение пластинки, для которой неоднородность только продольная. Тогда уравнениями движения будут:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[G_0(x)\left(\frac{2}{h}\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{E_0(x)}{1-\nu^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] = G_0(x)\left(\frac{12}{h^2}\varphi + \frac{6}{h}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

Для свободно опертой пластинки решение (3.1) будем искать, как

$$w = e^{i\omega t}\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\lambda_m x, \quad \varphi = e^{i\omega t}\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m \cos\lambda_m x \tag{3.2}$$

Тогда, представляя известную безразмерную функцию $f(x)$ в виде ряда

$$E_0 = \overline{E}_0 f(x), \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\lambda_k x, \quad G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)} \tag{3.3}$$

для неизвестных w_m и φ_m получим бесконечную систему однородных алгебраических уравнений. Из условия разрешимости последней определяются частоты. Вот эта система:

$$a_0\varphi_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(2\varphi_0 + \varphi_n + n\xi\sqrt{3}w_n\right) = \Omega^2\varphi_0$$

$$\sum_{\substack{n=1\\ m\neq n}}^{\infty} m\xi\left(a_{m-n} + a_{m+n}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_n + n\xi w_n\right) + \left(2a_0 + a_{2m}\right)m\xi \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_m + m\xi w_m\right) - 2\Omega^2 w_m = 0 \tag{3.4}$$

$$\sum_{\substack{n=1\\ m\neq n}}^{\infty}\left\{\left[a_{m-n}\left(1 + A_{mn}\right) + a_{m+n}\left(1 - A_{mn}\right)\right]\varphi_n + \sqrt{3}\left(a_{m-n} + a_{m+n}\right)\xi n w_n\right\} +$$

$$+\left[2a_0\left(1 + A_{mm}\right) + a_{2m}\left(1 - A_{mm}\right) - 2\Omega^2\right]\varphi_m + \sqrt{3}\left(2a_0 + a_{2m}\right)\xi m w_m = 0$$

$$A_{mn} = \frac{2}{1-\nu}mn\xi^2$$

В качестве примеров изучены следующие случаи неоднородности:

а) $f(x) = a_0 + a_m\cos\lambda_m x, \quad m = 1,2,\ldots$

в) $f(x) = a + b\dfrac{x}{l}, \quad a_0 = a + \dfrac{b}{2}, \quad a_k = \dfrac{2b}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k - 1\right]$ (3.5)

с) $f(x) = Ae^{\frac{\gamma x}{l}}, \quad a_0 = \dfrac{A}{\gamma}\left(e^{\gamma} - 1\right), \quad a_k = \dfrac{A\gamma}{\gamma^2 + k^2\pi^2}\left[(-1)^k e^{\gamma} - 1\right]$

Для выяснения вклада неоднородности на значения частот, а также вопроса применимости классической теории эти же задачи были изучены и в классической постановке.

Тогда вместо (3.4) имеем

$$\left[\left(2a_0 - a_{2m}\right)m^4\xi^4 - \Omega^2(1-\nu)\right]w_m + \sum_{\substack{n=1\\ m\neq n}}^{\infty}\left(a_{m-n} - a_{m+n}\right)m^2 n^2\xi^4 w_n = 0 \tag{3.6}$$

Можно показать [4], что в общих предположениях относительно $f(x)$ детерминант системы (3.6) нормальный [5]. Для системы (3.4) сходимость процесса определения собственных значений показана численно.

В табл. 4 размещены значения Ω $(\nu = 0.3)$ для трех случаев в (3.5) при различных m и α $\left(\alpha = \frac{a_m}{a_0}, \frac{b}{a}, \gamma\right)$ и вычисленные по (3.4) и (3.6) ($\alpha = 0$ соответствует однородной пластинке). И здесь видно, что поправка уточненной теории для приведенных неоднородностей, в общем, имеет почти тот же порядок, что и для однородной пластинки.

4. В пп.2,3 предполагалась неоднородность детерминированной. Однако, если она случайная функция от координат и заданы ее вероятные характеристики, то по известным формулам преобразований [6] можно определить эти же характеристики и для частот.

Таблица 4

ξ \ m, α	1			2			5			$\alpha = 0$	n
	a	b	c	a	b	c	a	b	c		
1/5	0.652 0.607	0.822 0.766	0.877 0.819	0.558 0.532	0.939 0.874	1.164 1.088	0.629 0.587	1.214 1.127	3.144 2.964	0.676 0.630	1
1/10	1.629 1.599	2.055 2.016	2.194 2.154	1.397 1.379	2.347 2.303	2.909 2.857	1.573 1.544	3.035 2.975	7.861 7.738	1.961 1.659	2
1/15	7.243 7.181	9.133 9.055	9.751 9.670	6.210 6.173	10.43 10.34	12.93 12.82	6.994 6.936	13.49 13.36	34.94 34.70	7.524 7.476	3

Для примеров типа п.2 это очень просто, а для продольной неоднородности по п.3, если, например, предполагать, что упругий коэффициент является стационарной функцией от x, то в разложениях типа (3.3) случайными окажутся коэффициенты a_k с известными вероятностными характеристиками. Тогда, хотя бы принципиально, можно определить данные для частот. Практическую реализацию лучше осуществить, довольствуясь приближенными формулами для частот. Однако, здесь нас интересует такой вопрос - при заданных a_k как ведут себя частоты, определенные по классической и по уточненной постановках? Поэтому будем изучать простой случай и простой закон функции распределения случайных величин. Возьмем случай 1 из (3.5) при $m = 2$. Тогда основная изгибная частота в предположении малости ξ^2 по сравнению с единицей будет

$$\overline{\Omega} = (a_0 - 0.5a_2)\left(1 - \frac{2}{1-\nu}\xi^2 \frac{a_0 - 0.5a_2}{a_0 + 0.5a_2}\right), \quad \overline{\Omega} = \frac{1-\nu}{2\xi^4}\Omega^2 \qquad (4.1)$$

В классической постановке второй член во второй скобке отсутствует.

Пусть случайной величиной окажется только a_0 и пусть для нее верен закон равномерного распределения с предельными значениями - $a_0^{(1)}$ и $a_0^{(2)}$. Тогда плотность вероятности $\overline{\Omega}$ будет

$$F\left(\overline{\Omega}\right)=\frac{1}{a_0^{(2)}-a_0^{(1)}}\left[1+\frac{2}{1-\nu}\xi^2\frac{\overline{\Omega}\left(\overline{\Omega}+2a_2\right)}{\left(\overline{\Omega}+a_2\right)^2}\right] \tag{4.2}$$

Если вопрос поставить следующим образом, имеем средние значения частот $\left(<\overline{\Omega}>\right)$, определенные по классической и по уточненной теориям (с средним значением $a_0=\dfrac{a_0^{(1)}+a_0^{(2)}}{2}$).

Какова вероятность, чтобы каждая из этих частот находилась в интервале $\pm\Delta\left(<\overline{\Omega}>\right)$ от соответствующих средних своих значений?

Так как

$$P\left(\overline{\Omega}_1<\overline{\Omega}<\overline{\Omega}_2\right)=\frac{\overline{\Omega}_2-\overline{\Omega}_1}{a_0^{(2)}-a_0^{(1)}}\left\{1+\frac{2}{1-\nu}\xi^2\left[1-\frac{a_2^2}{\left(\overline{\Omega}_1+a_2\right)\left(\overline{\Omega}_2+a_2\right)}\right]\right\} \tag{4.3}$$

то понятно, что вероятность для частот, определенных по уточненной теории, будет больше, чем по классической.

5. Процедура определения частот по заданной неоднородности (п.3) можно использовать также для решения обратной задачи - по заданным частотам определить неоднородность. Следует отметить, однако, что в общем случае это невозможно. Дело в том, что при определении m частот, например из (3.6) присутствуют $2m+1$ коэффициентов a_k. Так что, при решении обратной задачи для определения $2m+1$ коэффициентов имеем всего m уравнений. Другое дело, если известен вид неоднородности, но неизвестны необходимые параметры, характеризующие ее. Для второго примера (3.5), когда неизвестными являются величины a и b, зная две частоты $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$, легко получить их приближенные значения

$$a+\frac{b}{2}=\frac{\overline{\Omega}_1+\overline{\Omega}_2}{17},\quad b=\frac{9\pi^2}{64}\left[\overline{\Omega}_1^2-\frac{\left(17\overline{\Omega}_1-16\right)\left(\overline{\Omega}_1+\overline{\Omega}_2\right)}{17}\right]^{1/2} \tag{5.1}$$

Выполнение работы поддерживалось фирмой "Анушик". Основная часть вычислительной работы проведена Г.З.Геворкяном. Им приношу благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А. Об устойчивости упругой балки при продольном ударе.- Докл. АН АрмССР, 1969, т.49, №3, с.124-130.
2. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. - М.: Изд.-во МГУ, 1976.
3. Мовсисян Л.А. К термовязкоупругой устойчивости пластин из композитов.-Мат. Всес. н. сем. "Актуальные проблемы неоднородной механики". Ереван, 1991, с.180-186.
4. Мовсисян Л.А. К определению частот неоднородной балки.-Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т.49, №4, с.19-28.
5. Канторович Л.В. и Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 695 с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.- М.: Наука, 1969. 576 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
21.12.1995