ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, №3-4, 1997 Механика

О ДВУХ ЗАДАЧАХ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПОЛОСЫ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Агаловян Л.А., Хачатрян А.М.

Լ.Ա. Աղալովյան, Ա.Մ. Խաչատրյան

Անիզոտրոպ երկշերտի երկու խնդիրների մասին շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում

Աշխատանքը նվիրված է անիզոտրոպ երկշերտ շերտ-հեծանի լարվածային դեֆորմացիոն վիճակի ուսումնասիրությանը, երբ կոնտակտի գծի վրա տրված է տանգենցիալ տեղափոխությունների տարբերության (թռիչքի) բաշխման օրենքը:

L.A. Aghalovian, A.M. Khachatrian

On two problems of an anisotrope two-layered strip with an incomplete contact between the strips

Рассматриваются вопросы определения и анализа напряженно-деформированного состояния двухслойной анизотропной полосы-балки, когда на линии контакта задается закон распределения разности (скачка) тангенциального перемещения.

Многие прикладные задачи для слоистых структур приводят к рассмотрению случаев неполного контакта между слоями. Например, сейсмологические наблюдения указывают, что динамические характеристики отраженных и преломленных волн на сейсмических границах не всегда соответствуют представлениям о границе, как о жестком контакте между двумя средами. Для описания полей сейсмических волн, образующихся на тонких границах, используют граничные условия, отличные от условий жесткого контакта, в частности, условия, учитывающие скачок тангенциальных смещений [1,2].

Работа посвящена определению и анализу напряженно-деформированного состояния (НДС) двухслойной анизотропной полосы-балки при неполном контакте между слоями. Считается, что слои в плоскости полосы обладают анизотропией общего вида. В работах [3,4] асимптотическим методом построены решения слоистых анизотропных балок, когда между слоями имеется полный контакт, а на продольных сторонах заданы значения соответствующих компонентов тензора напряжений. Когда контакт между слоями неполный, аналогичные исследования проведены для двухслойной анизотропной балки-полосы в [5,6]. Асимптотические решения смешанных краевых задач для двухслойных анизотропных балок-полос получены в работе [7]. Во всех упомянутых задачах, где имеется неполный контакт между слоями, считается, что на линии контакта задан закон распределения касательного напряжения.

В настоящей работе, на линии контакта задается закон распределения разности (скачка) тангенциального перемещения [1,2] .

1. Рассматриваются задачи определения НДС анизотропной двухслойной балки-полосы

$\Omega = \left\{(x,y): x \in [0,l],\ -h_2 \le y \le h_1,\ h_1,h_2 << l\right\}$, когда на продольных сторонах заданы условия первой или смешанной краевых задач теории упругости, между слоями – условия неполного контакта, а на торцах

$x = 0,\ l$ – производные условия краевых задач теории упругости. Слои имеют толщины h_k, коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$ $(k = 1,2)$.

Условиями на продольных краях являются:

Задача 1 –

$$\sigma_{xy} = l/h \quad X^{\pm}(x),\ \sigma_y = \pm Y^{\pm}(x) \quad \text{при} \quad y = h_1, -h_2 \tag{1.1}$$

Задача 2 –

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{+}(x),\ \sigma_y^{(1)} = l/h\sigma_y^{+}(x) \qquad \text{при} \qquad y = h_1$$

$$\sigma_{xy}^{(2)} = \sigma_{xy}^{-}(x),\ \mathrm{v}^{(2)} = l/h\mathrm{v}^{-}(x) \qquad \text{при} \qquad y = -h_2 \tag{1.2}$$

На линии раздела слоев $y = 0$ должны быть выполнены следующие условия неполного контакта:

$$u_2 - u_1 = f(x),\ \mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2,\ \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)},\ \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} \tag{1.3}$$

Функция $f(x)$ считается заданной в зависимости от выбранной модели.

Для решения поставленных задач вводится безразмерная система координат ξ, ζ и малый параметр ε

$$\xi = x/l,\ \zeta = y/h,\ \varepsilon = h/l,\ h = (h_1 + h_2)/2 \tag{1.4}$$

В силу сингулярной возмущенности основных уравнений, решения складываются из двух типов решений-внутреннего, т.е. незатухающего при удалении от торцов в глубь области и типа пограничного слоя [8-10].

Решения внутренних задач будем искать в виде

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{-q_k} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(k,s)} \tag{1.5}$$

$Q^{(k)}$ - любое из напряжений или безразмерных перемещений $U_k = u_k/l\,.\,V_k = \mathrm{v}_k/l$, s – номер приближения, k – номер слоя. Целые числа q_k должны быть такими, чтобы после подстановки (1.5) в преобразованные уравнения плоской задачи получить непротиворечивую систему для определения $Q^{(k,s)}$. Они характеризуют также интенсивность (порядок) соответствующей величины. В рассмотренных задачах для q_k можно установить такие значения:

задача 1 [3,8] –

$$q_k = 2 \quad \text{для} \quad \sigma_x^{(k)}, U_k;\ q_k = 0 \quad \text{для} \quad \sigma_y^{(k)}$$

$$q_k = 1 \quad \text{для} \quad \sigma_{xy}^{(k)},\ q_k = 3 \quad \text{для}\ V_k,\ k = 1,2 \tag{1.6}$$

задача 2 [7] –

$$q_k = 0 \quad \text{для} \quad \sigma_{xy}^{(k)},\ q_k = 1 \quad \text{для} \quad \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, U_k, V_k \tag{1.7}$$

Сравнение асимптотик (1.6) и (1.7) показывает, что характер НДС чутко реагирует на тип условий на продольных кромках и даже, заменив одно условие другим, что имеет место в (1.2) по сравнению с (1.1), как убедимся ниже, качественно и принципиально меняется картина напряженно-деформированного состояния.

Подставив (1.5) в преобразованные по (1.4) уравнения плоской задачи теории упругости анизотропного тела, используя для каждого случая (1.6) или (1.7), получим систему относительно $Q^{(k,s)}$, решив которую, будем иметь:

задача 1 –

$$V_k^{(s)} = w^{(k,s)}(\xi) + v^{*(k,s)}(\xi,\zeta), \; U_k^{(s)} = -w_{,\xi}^{(k,s)}\zeta + u^{(k,s)}(\xi) + u^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = 1/a_{11}^{(k)}\left(u_{,\xi}^{(k,s)} - w_{,\xi\xi}^{(k,s)}\zeta\right) + \sigma_x^{*(k,s)}(\xi,\zeta) \tag{1.8}$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = 1/a_{11}^{(k)}\left(w_{,\xi\xi\xi}^{(k,s)}\zeta^2/2 - u_{,\xi\xi}^{(k,s)}\zeta\right) + \sigma_{xy0}^{(k,s)}(\xi) + \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_y^{(k,s)} = 1/a_{11}^{(k)}\left(u_{,\xi\xi\xi}^{(k,s)}\zeta^2/2 - w_{,\xi\xi\xi\xi}^{(k,s)}\zeta^3/6\right) - \sigma_{xy0,\xi}^{(k,s)} + \sigma_{y0}^{(k,s)}(\xi) + \sigma_y^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

задача 2 –

$$V_k^{(s)} = w^{(k,s)}(\xi) + v^{*(k,s)}(\xi,\zeta), \quad U_k^{(s)} = u^{(k,s)}(\xi) + u^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_y^{(k,s)} = \sigma_{y0}^{(k,s)}(\xi) + \sigma_y^{*(k,s)}(\xi,\zeta) \tag{1.9}$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = 1/a_{11}^{(k)} u_{,\xi}^{(k,s)} - a_{12}^{(k)}/a_{11}^{(k)}\sigma_{y0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = -\left(1/a_{11}^{(k)} u_{,\xi\xi}^{(k,s)} - a_{12}^{(k)}/a_{11}^{(k)}\sigma_{y0,\xi}^{(k,s)}\right) + \sigma_{xy0}^{(k,s)}(\xi) + \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

Входящие в (1.8) и (1.9) неизвестные функции $w^{(k,s)}, u^{(k,s)}, \sigma_{xy0}^{(k,s)}, \sigma_{y0}^{(k,s)}$ подлежат определению из условий (1.1)-(1.3), а величины со звездочкой, как обычно, являются известными, если построены приближения меньше s и определются по формулам:

задача 1 –

$$v^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta}\left(a_{12}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-2)} + a_{22}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-4)} + a_{26}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-3)}\right)d\zeta$$

$$u^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta}\left(a_{16}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-3)} + a_{66}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-2)} - v_{,\xi}^{*(k,s)}\right)d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(k,s)} = 1/a_{11}^{(k)}\left(u_{,\xi}^{*(k,s)} - a_{12}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-2)} - a_{16}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}\right) \tag{1.10}$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,s)} = -\int_0^{\zeta}\sigma_{x,\xi}^{*(k,s)}d\zeta, \qquad \sigma_y^{*(k,s)} = -\int_0^{\zeta}\sigma_{xy,\xi}^{*(k,s)}d\zeta$$

задача 2 –

$$v^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta}\left(a_{12}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{22}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-2)}\right)d\zeta$$

$$u^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta}\left(a_{16}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-1)} + a_{66}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-2)} - v_{,\xi}^{*(k,s)}\right)d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(k,s)} = -\int_0^{\zeta}\sigma_{xy,\xi}^{(k,s-2)}d\zeta \tag{1.11}$$

$$\sigma_x^{*(k,s)} = -a_{16}^{(k)}/a_{11}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-1)} - a_{12}^{(k)}/a_{11}^{(k)}\sigma_y^{*(k,s)} + 1/a_{11}^{(k)}u_{,\xi}^{*(k,s)}$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,s)} = -\int_0^{\zeta}\sigma_{x,\xi}^{(k,s)}d\zeta$$

Полагая, что с самого начала $(s=0)$ должно проявляться влияние неполного контакта, т.е. функции $f(x)$, последняя должна быть представима в виде

$$f(x) = \varepsilon^{q+s}f^{(s)}, \qquad s = \overrightarrow{0,N} \tag{1.12}$$

где $q=-2$ и -1 для задач 1,2, соответственно. Удовлетворив условиям контакта (1.3), получим

$$\begin{gathered} u^{(2,s)}=u^{(1,s)}+f^{(s)},\quad w^{(1,s)}=w^{(2,s)}=w^{(s)} \\ \sigma_{xy0}^{(1,s)}=\sigma_{xy0}^{(2,s)},\qquad \sigma_{y0}^{(1,s)}=\sigma_{y0}^{(2,s)} \end{gathered} \tag{1.13}$$

Удовлетворив также граничным условиям (1.1) или (1.2), получим следующие дифференциальные уравнения для определения перемещений:

задача 1 —

$$\begin{gathered} C\frac{d^2u^{(1,s)}}{d\xi^2}+K\frac{d^3w^{(s)}}{d\xi^3}+C_2\frac{d^2f^{(s)}}{d\xi^2}=p_1^{(s)} \\ D\frac{d^4w^{(s)}}{d\xi^4}+K_1\frac{d^3u^{(1,s)}}{d\xi^3}+K_2\frac{d^3f^{(s)}}{d\xi^3}=q^{(s)} \end{gathered} \tag{1.14}$$

задача 2 —

$$C\frac{d^2u^{(1,s)}}{d\xi^2}+C_2\frac{d^2f^{(s)}}{d\xi^2}=p_2^{(s)} \tag{1.15}$$

где

$$\begin{aligned} & C_1=\zeta_1/a_{11}^{(1)},\ C_2=-\zeta_2/a_{11}^{(2)},\ C=C_1+C_2 \\ & K_k=-1/\left(2a_{11}^{(k)}\right)\zeta_k^2,\ K=K_1-K_2,\ \zeta_1=h_1/h,\ \zeta_2=-h_2/h \\ & D_1=\zeta_1^3/\left(3a_{11}^{(1)}\right),\ D_2=-\zeta_2^3/\left(3a_{11}^{(2)}\right),\ D=D_1+D_2 \\ & p_1^{(s)}=-\left(X^{+(s)}-X^{-(s)}\right)+\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\zeta_1)-\sigma_{xy}^{*(2,s)}(\zeta_2) \\ & q^{(s)}=-\left(Y^{+(s)}+Y^{-(s)}\right)-\zeta_1X_{,\xi}^{+(s)}+\zeta_2X_{,\xi}^{-(s)}+\sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_1)- \\ & -\sigma_y^{*(2,s)}(\zeta_2)+\zeta_1\sigma_{xy,\xi}^{*(1,s)}(\zeta_1)-\zeta_2\sigma_{xy,\xi}^{*(2,s)}(\zeta_2) \\ & p_2^{(s)}=-\left(\sigma_{xy}^{+(s)}-\sigma_{xy}^{-(s)}\right)+\left(\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\zeta_1-\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(2)}}\zeta_2\right)\left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi}-\frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_1)}{d\xi}\right)+ \\ & +\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\zeta_1)-\sigma_{xy}^{*(2,s)}(\zeta_2) \\ & X^{\pm(0)}=X^{\pm},\ Y^{\pm(0)}=Y^{\pm},\ \sigma_{xy}^{\pm(0)}=\sigma_{xy}^{\pm},\ \sigma_y^{+(0)}=\sigma_y^{+} \\ & X^{\pm(s)}=Y^{\pm(s)}=\sigma_{xy}^{\pm(0)}=\sigma_y^{+(s)}=0 \qquad \text{при} \qquad s>0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Имеем также формулы

$$\begin{aligned} & \sigma_{xy0}^{(1,s)}=X^{+(s)}-\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\zeta_1)+K_1w_{,\xi\xi\xi}^{(s)}+C_1u_{,\xi\xi}^{(1,s)} \\ & \sigma_{y0}^{(1,s)}=Y^{+(s)}+\zeta_1X_{,\xi}^{+(s)}-\sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_1)-\zeta_1\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\zeta_1)-D_1w_{,\xi\xi\xi\xi}^{(s)}-K_1u_{,\xi\xi\xi}^{(1,s)} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Для задачи 2 получаются

$$\begin{aligned} & v^{(1,s)}=v^{(2,s)}=v^{-(s)}-v^{*(2,s)}(\zeta_2),\ \sigma_{y0}^{(1,s)}=\sigma_{y0}^{(2,s)}=\sigma_y^{+(s)}(\xi)-\sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_1) \\ & \sigma_{xy0}^{(1,s)}=\sigma_{xy0}^{(2,s)}=\sigma_{xy}^{+(s)}(\xi)-\zeta/a_{11}^{(1)}u_{,\xi\xi}^{(1,s)}-a_{12}^{(1)}/a_{11}^{(1)}\zeta_1\sigma_{y0,\xi}^{(1,s)}-\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\zeta_1) \\ & v^{-(0)}=v^{-},\quad v^{-(s)}=0 \qquad \text{при} \qquad s>0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Система уравнений (1.14) и (1.16) вместе с соотношениями (1.8)-(1.11), (1.17) и (1.18) позволяют определить все величины внутренней задачи. Однако, решением только внутренней задачи можно удовлетворить торцевым условиям лишь интегрально. Для полного удовлетворения этим условиям необходимо построить еще решение типа пограничного слоя. Напомним, что решение типа пограничного слоя удовлетворяет однородным условиям как на продольных сторонах двухслойной балки-полосы, так и на линии контакта. Следовательно, решения типа пограничного слоя для рассматриваемых задач совпадают с соответствующими решениями для двухслойных балок-полос при полном контакте между слоями. Для задачи 1 это решение построено в [4].

2. Модель нежесткого контакта интерпретируют как включение тонкого слоя с исчезающе малой сдвиговой жесткостью μ_0 (μ_0 - константа Ляме) между контактирующими средами. Толщина этого слоя $h_0 \to 0$, а отношение $\chi = \lim\limits_{\substack{h_0 \to 0 \\ \mu_0 \to 0}} h_0/\mu_0$ может принимать любое значение от 0 до ∞.

Предельному случаю $\chi \to 0$ соответствует жесткий контакт, другому предельному случаю $\chi \to \infty$ – скользящий контакт ($\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} = 0$). Для промежуточного состояния принимается [1,2]

$$u_2 - u_1 = \chi \sigma_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0} \tag{2.1}$$

Остальные же условия контакта (1.3) остаются неизменными. Принимая условие (2.1), тем самым, мы задаем функцию $f(x) = \chi\, l/h\, \sigma_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0}$, что, в свою очередь, второе условие (1.13) превращает в условие

$$u^{(2,s)} = u^{(1,s)} + \chi \sigma_{xy0}^{(1,s)} \tag{2.2}$$

В итоге система уравнений (1.14) преобразуется к виду

$$\begin{gathered} C\frac{d^2u^{(1,s)}}{d\xi^2} + \chi C_1 C_2 \frac{d^4 u^{(1,s)}}{d\xi^4} + K\frac{d^3 w^{(s)}}{d\xi^3} + \chi K_1 K_2 \frac{d^5 w^{(s)}}{d\xi^5} = \overline{p}_1^{(s)} \\ D\frac{d^4 w^{(s)}}{d\xi^4} + K\frac{d^3 u^{(1,s)}}{d\xi^3} + \chi K_1 K_2 \frac{d^6 w^{(s)}}{d\xi^6} + \chi C_1 K_2 \frac{d^5 u^{(1,s)}}{d\xi^5} = \overline{q}^{(s)} \end{gathered} \tag{2.3}$$

где

$$\overline{p}_1^{(s)} = p_1^{(s)} - \chi C_2 \left(\frac{d^2 X^{+(s)}}{d\xi^2} - \frac{d^2 \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi_1,\zeta_1)}{d\xi^2} \right)$$

$$\overline{q}^{(s)} = q^{(s)} - \chi K_2 \left(\frac{d^3 X^{+(s)}}{d\xi^3} - \frac{d^3 \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi_1,\zeta_1)}{d\xi^3} \right) \tag{2.4}$$

а уравнение (1.15) принимает вид

$$C\frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} - \chi C_1 C_2 \frac{d^4 u^{(1,s)}}{d\xi^4} = \overline{p}_2^{(s)} \tag{2.5}$$

где

$$\overline{p}_2^{(s)} = p_2^{(s)} + \chi C_2\left[\frac{d^2\sigma_{xy}^{+(s)}}{d\xi^2} - \frac{d^2\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi^2} - \right.$$

$$\left. -\zeta\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\left(\frac{d^3\sigma_y^{+(s)}}{d\xi^3} - \frac{d^3\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi^3}\right)\right] \tag{2.6}$$

Из системы (2.3) вытекает

$$\overline{D}\frac{d^6w^{(s)}}{d\xi^6} - \left(K^2 - CD\right)\frac{d^4w^{(s)}}{d\xi^4} = q_0^{(s)}$$

$$\frac{d^3u^{(1,s)}}{d\xi^3} = \frac{1}{CK_2 - KC_2}\left[K_2\frac{d\overline{p}_1^{(s)}}{d\xi} - C_2\overline{q}^{(s)} - \left(KK_2 - C_2D\right)\frac{d^4w^{(s)}}{d\xi^4}\right] \tag{2.7}$$

где

$$\overline{D} = \chi\left[C_1C_2D + K_1K_2C - K\left(C_1K_2 + C_2K_1\right)\right]$$

$$q_0^{(s)} = C\overline{q}^{(s)} + \chi C_1C_2\frac{d^2\overline{q}^{(s)}}{d\xi^2} - K\frac{d\overline{p}_1^{(s)}}{d\xi} - \chi C_1K_2\frac{d^3\overline{p}_1^{(s)}}{d\xi^3} \tag{2.8}$$

Решение дифференциального уравнения (2.7) имеет вид

а) $\left(K^2 - CD\right)/\overline{D} > 0$

$$w^{(s)} = C_1^{(s)}\mathrm{sh}\lambda\xi + C_2^{(s)}\mathrm{ch}\lambda\xi + C_3^{(s)}\xi^3/3! + C_4^{(s)}\xi^2/2! + C_5^{(s)}\xi + C_6^{(s)} + w_0^{(s)}$$

б) $\left(K^2 - CD\right)/\overline{D} < 0$

$$w^{(s)} = C_1^{(s)}\cos\lambda\xi + C_2^{(s)}\sin\lambda\xi + C_3^{(s)}\xi^3/3! + C_4^{(s)}\xi^2/2! + C_5^{(s)}\xi + C_6^{(s)} + w_0^{(s)}$$

в) $K^2 - CD = 0\,,\quad w^{(s)} = \sum_{n=0}^{5} C_{6-n}^{(s)}\,\xi^n/n! + w_0^{(s)}$ (2.9)

Здесь $\lambda = \sqrt{\left|\left(K^2 - CD\right)/\overline{D}\right|}$, $w_0^{(s)}$ - некоторое частное решение первого уравнения (2.7).

Общим решением дифференциального уравнения (2.5) является

$$u^{(1,s)} = C_1^{(s)}\cos\lambda\xi + C_2^{(s)}\sin\lambda\xi + C_3^{(s)}\xi + C_4^{(s)} + u_0^{(s)}(\xi) \tag{2.10}$$

где

$\lambda = \sqrt{h\left(E_1^{(1)}h_1 + E_1^{(2)}h_2\right)/\left(\chi h_1h_2E_1^{(1)}E_1^{(2)}\right)}$, $u_0^{(s)}$ - некоторое частное решение неоднородного уравнения (2.5).

Перемещения и напряжения, соответствующие первому слою, определяются по формулам

$$U^{(1,s)} = u^{(1,s)} + u^{*(1,s)}(\xi,\zeta),\quad V^{(1,s)} = \mathrm{v}^{-(s)} - \mathrm{v}^{*(2,s)}(\xi,\zeta) + \mathrm{v}^{*(2,s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_x^{(1,s)} = \lambda/a_{11}^{(1)}\left(-C_1^{(s)}\sin\lambda\xi + C_2^{(s)}\cos\lambda\xi\right) + C_3^{(s)}/a_{11}^{(1)} -$$

$$-a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)}\left(\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi_1)\right) + \sigma_x^{*(1,s)} + \frac{1}{a_{11}^{(1)}}\frac{d^2u_0^{(s)}}{d\xi^2}$$

$$\sigma_{xy}^{(1,s)} = \lambda^2/a_{11}^{(1)}\left(C_1^{(s)}\cos\lambda\xi + C_2^{(s)}\sin\lambda\xi\right)(\zeta-\zeta_1) + $$

$$+\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi}\right)(\zeta-\zeta_1) + \sigma_{xy}^{+(s)} + \tag{2.11}$$

$$+\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta) - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1) - \frac{1}{a_{11}^{(1)}}\frac{d^2u_0^{(s)}}{d\xi^2}(\zeta-\zeta_1)$$

$$\sigma_y^{(1,s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1) + \sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta)$$

а для второго слоя имеем

$$V^{(2,s)} = v^{-(s)} - v^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2) + v^{*(1,s)}(\xi,\zeta)$$

$$U^{(2,s)} = \left(C_1^{(s)}\cos\lambda\xi + C_2^{(s)}\sin\lambda\xi\right)\left(1-\lambda^2\chi\zeta_1/a_{11}^{(1)}\right) + $$

$$+\chi\left(\sigma_{xy}^{+(s)} - \zeta\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi}\right) - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)\right) + $$

$$+C_3^{(s)}\xi + C_4^{(s)} + u_0^{(s)} + \chi\frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}}\frac{d^2u_0^{(s)}}{d\xi^2} + u^{*(2,s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_x^{(2,s)} = \frac{\lambda}{a_{11}^{(1)}}\left(-C_1^{(s)}\sin\lambda\xi + C_2^{(s)}\cos\lambda\xi\right) + \frac{1}{a_{11}^{(2)}}C_3^{(s)} + \tag{2.12}$$

$$+\frac{\chi}{a_{11}^{(2)}}\left(\sigma_{xy}^{+(s)} + \zeta_1\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi}\right) - \right.$$

$$\left.-\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)\right) - \frac{\chi\lambda^2\zeta_1}{a_{11}^{(1)}a_{11}^{(2)}}\left(C_1^{(s)}\cos\lambda\xi + C_2^{(s)}\sin\lambda\xi\right) - $$

$$-\frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}}\left(\sigma_y^{+(s)}(\xi) - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)\right) + \sigma_x^{*(2,s)}(\xi,\zeta) + \frac{1}{a_{11}^{(2)}}\frac{du_0^{(s)}}{d\xi},$$

$$\sigma_{xy}^{(2,s)} = \lambda^2\left(C_1^{(s)}\cos\lambda\xi + C_2^{(s)}\sin\lambda\xi\right)\left(\left(1-\lambda^2\chi\zeta_1/a_{11}^{(1)}\right)\zeta_1/a_{11}^{(1)} - \right.$$

$$\left.-\frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}}\right) + \left(\frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}} - \frac{\zeta}{a_{11}^{(2)}}\right)\frac{d^2u_0^{(s)}}{d\xi^2} - \chi\frac{\zeta_1\zeta}{a_{11}^{(1)}a_{11}^{(2)}}\frac{d^4u_0^{(s)}}{d\xi^4} - $$

$$-\chi\frac{\zeta}{a_{11}^{(2)}}\left(\frac{d^2\sigma_{xy}^{+(s)}}{d\xi^2} - \zeta_1\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\left(\frac{d^3\sigma_y^{+(s)}}{d\xi^3} - \frac{d^3\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi^3}\right) - \right.$$

$$\left.-\frac{d^2\sigma_{xy}^{*(1,s)}}{d\xi^2}\right) + \left(\frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}}\zeta - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\zeta\right)\left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi}\right) + $$

$$+\sigma_{xy}^{+(s)} - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1) + \sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_y^{(2,s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1) + \sigma_y^{*(2,s)}(\xi,\zeta)$$

Из (2.11), (2.12) следует, что в значения напряжений входят три неивестные константы $C_1^{(s)}, C_2^{(s)}, C_3^{(s)}$. Между тем, когда имеется полный контакт между слоями, в выражения напряжений входит только одна константа [7].

Таким образом, в отличие от случаев полного контакта, контакт типа (2.1) приводит в обоих случаях к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений и, как следствие, увеличению числа произвольных констант в решении внутренней задачи. Значения этих постоянных могут быть определены из граничных условий при $x = 0, l$ с привлечением решения пограничного слоя, т.е. пограничный слой будет непосредственно влиять на решение внутренней задачи. Для удовлетворения граничных условий можно употреблять приближенные методы, например, метод наименьших квадратов, метод Треффца и др. [11].

The research described in this publication was made possible in part by Grant № MVS000 from the International Sciece Foundation.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов А.А., Ермаков С.Ю., Фролова Е.Н., Яновская Т.Б. Исследование отражения-преломления упругих волн на границе нежесткого контакта и контакта с трением.-Росс. АН, Физика земли, 1993, №11, с.37-44.
2. Подьяпольский С.Г. Отражение и преломление на границе двух упругих сред в случае нежесткого контакта.-Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1963, №4, с.525-531.
3. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния анизотропной слоистой балки.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1986, т.39, №2, с.3-14.
4. Хачатрян А.М. О пограничном слое слоистых балок.- Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1987, т.40, №2, с.19-25.
5. Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно-деформированного состояния анизотропной двухслойной балки с проскальзыванием.-В сб.: "Акт. пробл. неоднородной мех.". Материалы Всес. науч. семинара, Ереван, 1991. 390 с.
6. Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. О пограничном слое для двухслоя с проскальзыванием.- Изв. НАН Армении, Механика, 1993, т. 46, №3-4, с.12-19.
7. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Об асимптотическом решении смешанной краевой задачи для двухслойной термоупругой полосы. - В сб.: "Акт. пробл. неоднородной мех.", Материалы Всес. науч. семинара, Ереван, 1991. 390 с.
8. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.- ПММ, 1962, т.26, вып.4, с.668-686.
9. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1973. 272 с.
10. Найфэ А.Х. Методы возмущений.-М.: Мир, 1976.
11. Лурье А.И. Теория упругости.-М.: Наука, 1970.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 19.08.1996