

ЗОНА УПРОЧНЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ ЛИСТА

Задоян М.А.

Մ.Ա. Զադոյան
Ամրապնդման գոտիները շերտի ծծման ժամանակ

Հետազոտվում է ամրապնդման գոտիները շերտի ծծման ժամանակ, երբ նյութի ձգման դիագրաման օժտված է հետ-հոսումային գծային ամրապնդման միջակայքով: Խնդիրը քննարկվում է հարթ դեֆորմացիայի պայմաններում, առանց օգտագործելու ուլիղ նորմալների հիպոթեզը: Ստացված են լարումների բաղադրիչները սեղմվող և ձգվող գոտիներում, որոշված է շեղքը գոտու շառավիղը: Այդ գոտին հանդիսանում է լարումների խզման մակերևույթ:

Որոշված է սահմանային մոմենտի արժեքը, որը կարող է կրել շերտը:

M.A. Zadoyan
The Areas of Hardening in the case of Plate Bending

Исследуются зоны упрочнения при изгибе листа, когда после площадки текучести в диаграмме растяжения материала наступает этап линейного упрочнения.

Задача рассматривается в рамках плоской деформации, без использования гипотезы прямых нормалей. Получены компоненты напряжений в сжатой и растянутой зонах, определен радиус нейтрального слоя, являющийся поверхностью разрыва напряжений.

Определен предельный момент, который может выдержать лист.

В работе Р.Хилла [1] рассмотрен чистый изгиб прямоугольного листа из несжимаемого идеально-пластичного материала. Задача рассматривается в рамках плоской деформации, без использования гипотезы прямых нормалей. Получены компоненты напряжений в сжатой и растянутой зонах, определен радиус нейтрального слоя, который является поверхностью разрыва напряжений, и, наконец, предельный момент, который может выдержать лист.

Многие металлические материалы после зоны текучести приобретают способность заметно повышать свою сопротивляемость дальнейшему пластическому деформированию. На фиг.1 приведена схематизированная диаграмма растяжения такого жесткопластического материала, имеющего после текучести, для простоты, этап линейного упрочнения.

По такой же схеме, а также по диаграмме, имеющей начальную упругую зону, в работах [2,3] исследованно запредельное состояние пластинки под воздействием сосредоточенной силы, состояние пластинки, с круговым отверстием, находящегося под воздействием силы, приложенной в ее плоскости в бесконечности.

Величины σ_s , ϵ_s , σ_* , ϵ_* – механические параметры, определяемые из экспериментов по одноосному растяжению или по испытанию тонкостенных труб на кручение. Точка (σ_*, ϵ_*) на диаграмме соответствует временному сопротивлению материала.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается запредельное напряженное состояние толстого листа из несжимаемого, идеально-жесткопластического упрочняющегося материала, находящегося в состоянии плоской деформации под

воздействием изгибающих моментов M , приложенных на торцевых сечениях. Задача заключается в определении напряженного состояния листа и предельного значения момента, соответствующего временному сопротивлению материала.

В случае плоской деформации имеем уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0 \quad (1)$$

соотношения между компонентами деформаций и перемещений

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Между интенсивностями напряжений и деформаций принимаем зависимость

$$\sigma_\theta = f(\varepsilon_0) \varepsilon_0 \quad \text{где} \quad f(\varepsilon_0) = \begin{cases} \frac{\sigma_s}{\varepsilon_0} & \text{при } 0 \leq \varepsilon_0 \leq \varepsilon_{ss} \\ H & \text{при } \varepsilon_{ss} \leq \varepsilon_0 \leq \varepsilon_s \end{cases}$$

причем $\varepsilon_{ss} = \frac{\sigma_s}{H}$, $H = \frac{\sigma_s^*}{\varepsilon_s^*}$ — параметры, характеризующие деформативные свойства материала.

Зависимости между компонентами деформаций и напряжений при условии несжимаемости материала $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0$ принимаются в виде

$$\sigma_y - \delta_{ij} \sigma = 2f(\varepsilon_0) \varepsilon_{ij}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а σ — среднее давление

$$\sigma = \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)$$

Компоненты перемещений ищем в виде

$$u = Ar + \frac{C}{r}, \quad v = 2Ar\theta$$

Соответственно, деформации будут

$$\varepsilon_\theta = -\varepsilon_r = -A + \frac{C}{r^2}, \quad \gamma_{r\theta} = 0$$

Полагаем, что при $r = \rho$ деформации равны нулю, тогда $C = A\rho^2$. Находим

$$\varepsilon_\theta = -\varepsilon_r = -A \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right), \quad \varepsilon_0 = 2 \left| \varepsilon_\theta \right|$$

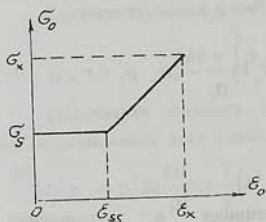
Это означает, что

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} 2A \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right) & \text{при } r \geq \rho \\ -2A \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right) & \text{при } r \leq \rho \end{cases}$$

Когда лист целиком находится в состоянии текучести, т.е. до появления зон упрочнения, имеем $\rho = \sqrt{ab}$. Тогда легко заметить, что в состоянии текучести ε_0 принимает свое наибольшее значение во

внутренних волокнах $r = a$. Таким образом, зона упрочнения начинается распространяться с внутренней стороны при $M > M_0 = \sigma_s h^2 / 2$, где $h = b - a$.

2. Одностороннее упрочнение



Фиг. 1

При $M > M_0$ с внутренней стороны распространяется зона упрочнения (фиг.2). Тогда, учитывая, что

$$\sigma_0 = \frac{\chi}{2}(\sigma_0 - \sigma_r), \quad \chi = \text{sign} \varepsilon_0$$

будем иметь

$$\sigma_0 - \sigma_r = \begin{cases} -4AH \left(\frac{\rho^2}{r^2} - 1 \right) & \text{при } a \leq r \leq \rho_1 \\ -\sigma_s & \text{при } \rho_1 \leq r \leq \rho \\ \sigma_s & \text{при } \rho \leq r \leq b \end{cases}$$

где $r = \rho_1$ — граничная цилиндрическая поверхность между зонами упрочнения и текучести. Значение ρ_1 , а также и ρ , следует определять в ходе решения задачи.

1) Решение в зоне упрочнения. Принимая

$$\sigma_r - \sigma_0 = 4AH \left(\frac{\rho^2}{r^2} - 1 \right) \quad \text{при } a \leq r \leq \rho_1 \quad (2)$$

и подставляя в уравнения равновесия (1), которые при $\tau_{\theta 0} = 0$ примут вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_0}{r} = 0 \quad (3)$$

и интегрируя с учетом граничного условия $\sigma_r = 0$ при $r = a$, находим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2AH \left(2 \ln \frac{r}{a} + \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \\ \sigma_0 &= 2AH \left(2 + 2 \ln \frac{r}{a} - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \quad a \leq r \leq \rho_1 \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь A, ρ, ρ_1 — неизвестные постоянные.

2) Решение в зоне текучести $\rho_1 \leq r \leq \rho$. Принимая в уравнении

(3) $\sigma_r - \sigma_0 = 2\sigma_s$ и интегрируя, получаем

$$\sigma_r = B - 2\sigma_s \ln \frac{r}{\rho_1}, \quad \rho_1 \leq r \leq \rho$$

где B - произвольная постоянная. Используя условия непрерывности σ_r и σ_θ на граничной поверхности $r = \rho_1$, находим выражения напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2AH \left(2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2\sigma_s \ln \frac{r}{\rho_1} \\ \sigma_\theta &= 2AH \left(2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2\sigma_s \ln \frac{r}{\rho_1} - 2\sigma_s, \quad \rho_1 \leq r \leq \rho\end{aligned}\quad (5)$$

а также соотношение между параметрами

$$2AH \left(\frac{\rho^2}{\rho_1^2} - 1 \right) = \sigma_s \quad (6)$$

Неизвестные постоянные, содержащиеся в выражениях напряжений, определяется в дальнейшем.

3) *Решение в зоне текучести* $\rho \leq r \leq b$. Полагая в уравнении равновесия (3) $\sigma_\theta - \sigma_r = 2\sigma_s$ и интегрируя с учетом граничного условия $\sigma_r = 0$ при $r = b$, получаем

$$\sigma_r = -2\sigma_s \ln \frac{b}{r}, \quad \sigma_\theta = 2\sigma_s - 2\sigma_s \ln \frac{b}{r}, \quad \rho \leq r \leq b \quad (7)$$

Условие непрерывности σ_r при $r = \rho$ дает

$$AH \left(2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) = \sigma_s \ln \frac{\rho^2}{b\rho_1} \quad (8)$$

4) *Условие разрушения*. Когда на диаграмме σ_θ приближается к значению σ_* , т.е. при временном сопротивлении материала, в листе появляется тенденция к разрушению. Условие $\sigma_\theta = \sigma_*$ назовем интегральным условием разрушения или просто условием разрушения.

Принимая $\sigma_\theta = \sigma_*$ на внутренних волокнах, т.е. $\sigma_r - \sigma_\theta = 2\sigma_s$ при $r = a$ из (2) получаем

$$A = \frac{\sigma_*}{2H \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right)} \quad (9)$$

Далее, вводя обозначение $\mu = \sigma_*/\sigma_s$ и подставляя значение A в уравнения (6) и (8), получаем

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu - 1 + \rho^2/a^2}} \quad (10)$$

$$2 \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right) \ln \frac{\rho}{b} \frac{\sqrt{\mu - 1 + \frac{\rho^2}{a^2}}}{\sqrt{\mu}} = (\mu - 1) \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) + 2\mu \frac{\ln \frac{\rho}{a} \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu - 1 + \frac{\rho^2}{a^2}}} \quad (11)$$

Таким образом, для заданного значения $\mu > 1$ из (11) определяется ρ , а из (10) значение ρ_1 . Принимая в (11) $\mu = 1$, находим $\rho = \sqrt{ab}$, а из (10) $\rho_1 = a$.

Соответствующий изгибающий момент определяется формулой

$$M = \int_a^{\rho_1} \sigma_{\theta} r dr + \int_{\rho_1}^{\rho} \sigma_{\theta} r dr + \int_{\rho}^b \sigma_{\theta} r dr$$

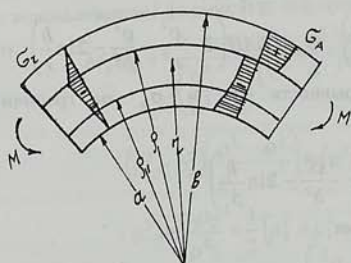
Подставляя значение A из (9) в формулы (4), (5), (7) для σ_0 , после вычисления этих интегралов получим

$$M/\sigma_s = \rho^2 \ln \frac{b\rho_1}{\rho^2} + \frac{1}{2}(b^2 + \rho_1^2 - 2\rho^2) + \frac{\mu\rho^2}{2\left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1\right)} \left(\frac{\rho_1^2}{\rho^2} - \frac{a^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right)$$

Полученные формулы справедливы до значения $\mu = \mu_1$, при котором впервые на внешней волокне $r = b$ появляются деформации упрочнения.

Значение μ_1 , а также соответствующие величины ρ_{10}, ρ_0 и M_1 определяются в дальнейшем.

3. Двухстороннее упрочнение



Фиг. 2

1) Решение в зоне упрочнения $a \leq r \leq \rho_1$. Аналогичным образом получаем

$$\sigma_r = 2AH \left(2 \ln \frac{r}{a} + \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \quad (12)$$

$$\sigma_{\theta} = 2AH \left(2 + 2 \ln \frac{r}{a} - \frac{\rho^2}{a^2} - \frac{\rho^2}{r^2} \right) \quad a \leq r \leq \rho_1$$

где A, ρ, ρ_1 - неизвестные постоянные.

2) Решение в зоне текучести $\rho_1 \leq r \leq \rho$. Для компонентов напряжений получаем

$$\sigma_r = 2AH \left(2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2\sigma_s \ln \frac{r}{\rho_1}$$

При $M > M_1$, т.е. при $\mu > \mu_1$ с внешней стороны листа распространяется вторая зона упрочнения (фиг.2). Радиус этой граничной поверхности между зонами текучести и упрочнения обозначим через ρ_2 .

$$\sigma_{\theta} = 2AH \left(2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2\sigma_s \ln \frac{r}{\rho_1} - 2\sigma_s, \quad \rho_1 \leq r \leq \rho \quad (13)$$

Из условия непрерывности σ_{θ} на граничной поверхности $r = \rho_1$ находим

$$2AH \left(\frac{\rho^2}{\rho_1^2} - 1 \right) = \sigma_s, \quad (14)$$

3) Решение в зоне текучести $\rho \leq r \leq \rho_2$. Принимая в дифференциальном уравнении равновесия (3) $\sigma_{\theta} - \sigma_r = 2\sigma_s$ и интегрируя, будем иметь

$$\sigma_r = D - 2\sigma_s \ln \frac{\rho_2}{r}, \quad \sigma_{\theta} = \sigma_r + 2\sigma_s, \quad (15)$$

где D - произвольная постоянная.

4) Решение в зоне упрочнения $\rho_2 \leq r \leq b$. В этой зоне имеем $\sigma_{\theta} = H\varepsilon_0$, т.е. $\sigma_{\theta} - \sigma_r = 4AH \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_1^2} \right)$

Подставляя в уравнение (3) и интегрируя с использованием граничного условия $\sigma_r = 0$ при $r = b$, получим

$$\sigma_r = 2AH \left(\frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{b^2} - 2 \ln \frac{b}{r} \right), \quad \sigma_{\theta} = 2AH \left(2 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{b^2} - 2 \ln \frac{b}{r} \right) \quad (16)$$

Далее, из условия непрерывности σ_r и σ_{θ} на граничной поверхности $r = \rho_2$ определим

$$D = 2AH \left(\frac{\rho^2}{\rho_2^2} - \frac{\rho^2}{b^2} - 2 \ln \frac{b}{\rho_2} \right)$$

и соотношение между параметрами

$$2AH \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_2^2} \right) = \sigma_s, \quad (17)$$

Имеем также условие непрерывности σ_r на нейтральной поверхности $r = \rho$. Получим

$$AH \left(2 \ln \frac{b \rho_1}{a \rho_2} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{\rho_2^2} - \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{b^2} \right) = \sigma_s \ln \frac{\rho^2}{\rho_1 \rho_2}$$

Используя условие разрушения $\sigma_{\theta} = \sigma_s$, для A находим значение согласно (9). Для радиусов граничных поверхностей получаем

$$\rho_i = \frac{\sqrt{\mu \rho}}{\sqrt{\mu \mp 1 \pm \rho^2/a^2}} \quad (i = 1, 2) \quad (18)$$

где верхние знаки для $i = 1$, а нижние для $i = 2$, а также уравнение нейтрального слоя

$$\mu \ln \frac{b^2}{a^2} \frac{\mu + 1 - \rho^2/a^2}{\mu - 1 + \rho^2/a^2} + (2 - \mu) \frac{\rho^2}{a^2} + \mu \frac{\rho^2}{b^2} =$$

$$= 2 + \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right) \ln \left[1 - \frac{1}{\mu^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^2 \right] \quad (19)$$

Принимая в формуле ρ_2 по (18) $\mu = \mu_1$ при $\rho_2 = b$, получаем

$$\mu_1 = \frac{b^2 \rho_0^2 - a^2}{a^2 b^2 - \rho_0^2}$$

Далее, подставляя это значение $\mu = \mu_1$ в (19) и полагая в нем $\rho = \rho_0$, находим уравнение относительно ρ_0 .

Предельное положение нейтральной поверхности $\rho = \rho_*$ получается из (19) предельным переходом при $\mu \rightarrow \infty$

$$\rho_* = ab \sqrt{\frac{2 \ln \frac{b}{a}}{b^2 - a^2}}$$

Соответственно, из (18) при $\mu \rightarrow \infty$ находим $\rho_{1*} = \rho_{2*} = \rho_*$.

Вычисляя изгибающий момент при $\mu > \mu_1$

$$M = \int_a^{\rho_1} \sigma_\theta r dr + \int_{\rho_1}^{\rho} \sigma_\theta r dr + \int_{\rho}^{\rho_2} \sigma_\theta r dr + \int_{\rho_2}^b \sigma_\theta r dr$$

с использованием формул (12), (13), (15), (16), получаем

$$\begin{aligned} M/\sigma_s = & \frac{\mu}{2 \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right)} \left[\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) (\rho_1^2 - a^2) + \left(1 - \frac{\rho^2}{b^2} \right) (b^2 - \rho_2^2) + \right. \\ & \left. + (\rho^2 - \rho_1^2) \left(\frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) + (\rho^2 - \rho_2^2) \left(\frac{\rho^2}{b^2} - \frac{\rho^2}{\rho_2^2} \right) \right] + \\ & + \rho^2 \ln \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho^2} + \frac{1}{2} (\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho^2) \end{aligned}$$

Определенный практический интерес представляет график функции $M = M(\mu)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. — М.: Гостехиздат, 1956. 408с.
2. Ключников В.В. Запредельное состояние пластинки с отверстием. — В междуз. сб.: Статическая и динамическая прочность элементов машиностроительных констр. М.: ВЗМИ, 1986.
3. Ключников В.В. Упрочняющаяся пластинка под действием сосредоточенной силы. Деп.ВИНИТИ, 1986.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
1.02.1996