ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, №3-4, 1997 Механика

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, НА ГРАНИЦЕ КОТОРОЙ ПРИКЛЕЕН НЕЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМЫЙ СТРИНГЕР КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Саркисян В.С., Керопян А.В.

Վ.Ս. Սարգսյան, Ա.Վ. Քերոբյան
Անիզոտրոպ կիսահարթության համար խնդրի լուծման մասին, որի եզրին սոսնձված է ոչ գծայնորեն դեֆորմացվող վերջավոր երկարության վերադիր

Դիտարկված է կոնտակտային խնդիր անիզոտրոպ կիսահարթության համար, որի եզրը ուժեղացված է ոչ գծային օրենքով դեֆորմացվող վերջավոր երկարության առաձգական վերադիրով, ընդ որում կապը վերադիրի և կիսահարթության միջև իրականացված է բարակ սոսնձաշերտի միջոցով: Հաշվի է առնված վերջինիս ֆիզիկամեխանիկական բնութագրերը:

Խնդրի լուծումը, վերադիրի նյութի նկատմամբ ոչ գծային դրվածքով, հանգեցված է անհայտ շոշափող կոնտակտային լարումների նկատմամբ Կոշու կորիզով ոչ գծային սինգուլյար ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարման լուծման: Վերջինիս լուծումը կառուցված է փոքր պարամետրի մեթոդով:

V.S. Sarkisian, A.V. Keropian
On the solution of the problem for anisotropic half-plane on the edge of which a nonlinear deformable stringer of finite legth is glued

Рассматривается задача о контактном взаимодействии нелинейно-деформируемого по степенному закону стрингера (накладки) конечной длины с линейно-деформируемым основанием в виде анизотропной полуплоскости, когда контакт между ними осуществляется через тонкий слой клея с другими физико-механическими характеристиками.

Контактная задача для бесконечной пластины, усиленной через тонкий слой клея стрингером конечной длины, рассмотрена в работе [1], а в [2] – задача о передаче нагрузки от степенно-упрочняющегося стрингера конечной длины к анизотропной полуплоскости.

В настоящей работе рассматривается задача о контактном взаимодействии нелинейно-деформируемого по степенному закону стрингера (накладки) конечной длины с линейно-деформируемым основанием в виде анизотропной (неортотропной) полуплоскости, когда контакт между ними осуществляется через тонкий слой клея (с другими упругими и геометрическими характеристиками).

Решение задачи, в постановке нелинейной теории установившейся ползучести относительно стрингера при степенном законе связи между напряжениями и деформациями, предложенном Н.Х.Арутюняном [3], сводится к решению нелинейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения с ядром Коши относительно неизвестных тангенциальных контактных напряжений при определенных граничных условиях. Далее, с помощью малого параметра строится решение этого уравнения.

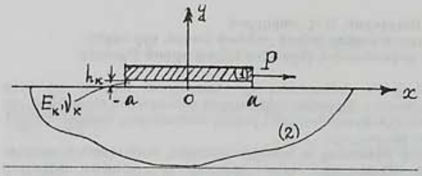
§1. Постановка задачи и вывод основного разрешающего уравнения. Пусть анизотропная, имеющая одну плоскость упругой симметрии, полуплоскость на отрезке своей границы усилена стрингером (накладкой) малой толщины h, причем предполагается, что для материала ее имеет место нелинейное соотношение вида:

$$\varepsilon_x^{(1)}(x)=K_0\left[\sigma^{(1)}(x)\right]^{\nu} \qquad (\nu>1) \tag{1.1}$$

где $\varepsilon_x^{(1)}(x)$ – деформация точек стрингера, $\sigma^{(1)}(x)$ – осевое напряжение, K_0 – коэффициент ползучести, $\nu>1$ – показатель ползучести.

Здесь предполагается, что контакт между стрингером и полуплоскостью осуществляется через тонкий слой клея (модуль упругости E_k, коэффициент Пуассона ν_k и толщина h_k).

Предполагая, что слой клея находится в условиях чистого сдвига [1], задача заключается в определении тангенциальных контактных напряжений, когда к одному из концов стрингера (в точке $x=a$) приложена горизонтальная сила P (фиг.1).



Фиг. 1

Из уравнения равновесия элемента стрингера и соотношения (1.1), после интегрирования, для горизонтальных перемещений $u^{(1)}(x)$ точек стрингера будем иметь

$$u^{(1)}(x)=\frac{K_0}{h^{\nu}}\int_{-a}^{x}\left(\int_{-a}^{y}\tau(s)ds\right)^{\nu}dy+u^{(1)}(-a) \tag{1.2}$$

где $\tau(x)$ – интенсивность тангенциальных контактных напряжений.

С другой стороны известно [4,5], что горизонтальные перемещения $u^{(2)}(x,0)$ граничных точек анизотропной (неортотропной) полуплоскости, когда на отрезке $[-a,a]$ ее границы действуют тангенциальные напряжения интенсивности $\tau(x)$, определяется формулой:

$$u^{(2)}(x,0)=\frac{A^{(2)}}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\tau(s)ds+c \tag{1.3}$$

где c - некоторая константа, $A^{(2)}=A_2=\frac{i}{2}\beta_{11}\left[\mu_1+\mu_2-\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2\right]$, а μ_1 и μ_2 и их сопряженные $\overline{\mu}_1,\overline{\mu}_2$, являются корнями уравнения:

$$\beta_{11}\xi^4-2\beta_{16}\xi^3+\left(2\beta_{12}+\beta_{66}\right)\xi^2-2\beta_{26}\xi+\beta_{22}=0$$

β_{ij} – упругие коэффициенты материала полуплоскости. В случае, когда анизотропное тело является ортотропным, коэффициенты $\beta_{16}=\beta_{26}=0$.

Далее полагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условиях чистого сдвига [1,6,7], будем иметь:

$$u^{(1)}(x)-u^{(2)}(x,0)=k^{*}\tau(x), \qquad -a\le x\le a \tag{1.4}$$

где $k^{*}=h_k/G_k$, $\qquad G_k=E_k/2(1+\nu_k)$

Теперь, подставляя (1.2) и (1.3) в (1.4), после замены переменных x и ax, y на ay, s на as, получим следующее нелинейное интегральное уравнение относительно $\psi(x)$:

$$\psi(x)=\lambda^{*}\int_{-1}^{x}\left(\int_{-1}^{y}\psi(s)ds\right)^{\nu}dy-\frac{\alpha^{*}}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{a|x-s|}\psi(s)ds+c_{1} \qquad (1.5)$$

Здесь введены обозначения

$$\psi(x)=\frac{a\tau(ax)}{P},\ \lambda^{*}=\frac{a^{2}K_{0}P^{\nu-1}}{k^{*}h^{\nu}}.$$

$$\alpha^{*}=\frac{aA^{(2)}}{k^{*}},\ c_{1}=\frac{a\left(u^{(1)}(-a)-c\right)}{Pk^{*}} \qquad (1.6)$$

где неизвестная постоянная c_1 будет определяться из условия

$$\int_{-1}^{1}\psi(s)ds=1 \qquad (1.7)$$

Далее из (1.5) следует, что $\psi(x)$ в точках стрингера $x=\pm1$ имеет конечные значения.

Отметим также, что при $\lambda^{*}=0$, т.е. когда материал стрингера становится жестким, вместо (1.5) будем иметь:

$$\psi(x)=-\frac{\alpha^{*}}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{a|x-s|}\psi(s)ds+c_{1}^{*} \qquad (1.8)$$

где $c_{1}^{*}=-ac/Pk^{*}$.

С другой стороны, после дифференцирования (1.5) и вводя функцию

$$\varphi(x)=\int_{-1}^{x}\psi(s)ds \qquad (1.9)$$

вместо уравнения (1.5), будем иметь:

$$\alpha\varphi''(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(s)}{s-x}ds=\lambda[\varphi(x)]^{\nu} \qquad (1.10)$$

которое, согласно (1.7), должно рассматриваться при граничных условиях

$$\varphi(-1)=0\,, \qquad \varphi(1)=1 \qquad (1.11)$$

Здесь

$$\alpha=\frac{1}{\alpha^{*}}=\frac{k^{*}}{aA^{(2)}}, \qquad \lambda=\frac{\lambda^{*}}{\alpha^{*}}=\frac{aK_{0}P^{\nu-1}}{A^{(2)}h^{\nu}}$$

В (1.10) интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Таким образом, задача определения тангенциальных контактных напряжений сведена к решению нелинейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.10) при граничных условиях (1.11).

Отметим, что при $\nu=1$ имеем случай линейно-упругого стрингера, решение которой приведено в [7], а при $\alpha=0$, т.е. без учета материала склеивания, решение задачи приведено в [2.4].

§2. Решение нелинейного, сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.10). Решение уравнения (1.10) при условиях (1.11) будем искать методом малого параметра. При этом будем рассматривать два случая:

а) α является малым параметром (т.е. ослабевается влияние материала склеивания).

в) λ является малым параметром (т.е. материал стрингера становится жестким).

1^0. Сначала представим решение уравнения (1.10) в виде ряда по степеням малого параметра α :

$$\varphi(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \alpha^k \varphi_k(x) \tag{2.1}$$

Подставляя значения $\varphi(x)$ из (2.1) в (1.10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α , находим:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_0'(s)}{s-x} ds = \lambda\left[\varphi_0(x)\right]^{\nu} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_k'(s)}{s-x} ds = \lambda A_k^{(\nu)}\left[\varphi_0(x)\right]^{\nu-k}\left[\varphi_1(x)\right]^{k} + \\ +\lambda\sum_{m=1}^{k-1} A_{km}^{(\nu)}\left[\varphi_0(x)\right]^{\nu-k+m}\left[\varphi_1(x)\right]^{k-(m+1)}\varphi_{m+1}(x) - \\ -\varphi_{k-1}''(x) \qquad (k \ge 1) \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$A_k^{(\nu)} = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)}{k!},\ A_{km}^{(\nu)} = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+m+1)}{(k-m-1)!},$$

$A_{km}^{(\nu)} = 0$ при $k = 1;2$

Следовательно, из (1.11) в силу (2.1), будем иметь следующие граничные условия:

$$\varphi_0(-1) = 0\,, \qquad \varphi_0(1) = 1\,, \tag{2.4}$$

$$\varphi_k(-1) = 0\,, \quad \varphi_k(1) = 0 \quad \text{при} \quad k \ge 1 \tag{2.5}$$

Итак, решение нелинейного, сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.10) сводится к решению систем рекуррентных систем сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (2.2) и (2.3) при условиях (2.4) и (2.5).

Решение уравнения (2.2) при условиях (2.4), после обращения сингулярного интеграла и интегрирования его обеих частей сводится к решению следующего нелинейного интегрального уравнения и приведена в [2,4]:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) = -\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln\frac{1-sx+\sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}{1-sx-\sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}} \times \\ \times\left[\varphi_0(s)\right]^{\nu} ds + \frac{1}{\pi}\arcsin x + \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.6}$$

которое после замены переменных $x = \cos\pi y$, $s = \cos\pi t$, $0 \le y;t \le 1$ преобразуется к виду:

$$\phi(y) + \int_0^1 K(y;t)F\left[t,\phi(t)\right]dt = 0 \tag{2.7}$$

где

$$\phi(y) = \eta(y) + y - 1\ ,\quad \eta(y) = \varphi_0(\cos \pi y)$$

$$F[y, \phi(y)] = \frac{\lambda}{\pi} \sin \pi y [\phi(y) - y + 1]^{\nu} \tag{2.8}$$

$$K(y,t) = \ln \left| \frac{\sin \dfrac{\pi(t+y)}{2}}{\sin \dfrac{\pi(t-y)}{2}} \right|, \quad (0 < y, t < 1)$$

Решение и исследование нелинейного интегрального уравнения (2.7) типа Гаммерштейна приведена в [2,4,5].

Не останавливаясь на подробностях, отметим, что решение уравнения (2.7) представляется в виде:

$$\phi(y) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \xi_m(y) \quad (0 < y < 1) \tag{2.9}$$

где согласно спектральному соотношению

$$m \int_0^1 \ln \left| \frac{\sin \dfrac{\pi(t+y)}{2}}{\sin \dfrac{\pi(t-y)}{2}} \right| \sin \pi m t dt = \sin \pi m y \ (m = 1,2,\ldots)$$

будем иметь следующие:

$$\xi_m(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \pi m y \qquad (0 < y < 1;\ m = 1,\ 2,\ldots)$$

ортонормированные собственные функции ядра $K(y,t)$, отвечающие собственным значениям $\lambda_m = m\ (m = 1,2,\ldots)$, а x_m - неизвестные коэффициенты, которые определяются из следующей эквивалентной исходному уравнению (2.7) нелинейной бесконечной системы уравнений:

$$x_m = -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^1 F\left[t, \sum_{k=1}^{\infty} x_k \xi_k(t)\right] \xi_m(t) dt \quad (m = 1,2,\ldots) \tag{2.10}$$

Далее, отправляясь от (2.9), приближенное решение уравнения (2.7) представим в виде:

$$\phi_n(y) = \sum_{m=1}^{n} x_{n,m} \xi_m(y) \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{2.11}$$

аналогично предыдущей, задачу определения неизвестных коэффициентов $x_{n,m}\ (m = 1,2,\ldots n;\ n = 1,2,\ldots)$ сведем к решению следующей конечной нелинейной системы:

$$x_{n,m} = -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^1 F\left[t, \sum_{k=1}^{n} x_{n,k} \xi_k(t)\right] \xi_m(t) dt \quad (m = 1,2,\ldots n;\ n = 1,2,\ldots) \tag{2.12}$$

Как и в [2], на основе известной теории нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна, доказывается, что решение систем (2.10) и (2.12) существует и единственное.

Кроме того, доказывается, что решение $\phi_n(y)$ при $n \to \infty$ стремится к решению $\phi(y)$ - исходному уравнению. Тем самым доказывается, что решение нелинейного уравнения (2.7) существует, единственно и его со сколь угодно большой точностью можно аппроксимировать функцией $\phi_n(y)$ по формуле (2.11).

Определив таким способом $\phi(y)$, согласно (2.8) определяется и $\varphi_0(x)$.

Далее, после определения $\varphi_0(x)$, решение (2.3) при условиях (2.5), последовательно можно получить, представляя эти решения в виде[8,9]:

$$\varphi'_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(k)} T_n(x) \quad \left(|x| < 1,\ k \geq 1\right) \tag{2.13}$$

где $T_n(x)$ – многочлены Чебышева первого рода [10], $X_n^{(k)}$ $(k \geq 1;\ n = 0,1,2\ldots)$ – неизвестные коэффициенты.

Не останавливаясь на подробностях, отметим, что после интегрирования (2.13) и удовлетворяя граничным условиям (2.5), находим, что $X_0^{(k)} = 0\ (k \geq 1)$ и, следовательно,

$$\varphi_k(x) = -\sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(k)}}{n} U_{n-1}(x) \quad (k \geq 1) \tag{2.14}$$

где $U_{n-1}(x)$ - многочлены Чебышева второго рода [10].

Теперь, подставляя (2.13) и (2.14) в (2.3), для определения коэффициентов $X_n^{(k)}$ $(k \geq 1, n = 1,2,\ldots)$, известным способом [4,8,9], получим следующую совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$X_m^{(k)} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} R_{m,n} X_n^{(k)} = a_m^{(k)} \quad (k \geq 1;\ m = 1,2,\ldots) \tag{2.15}$$

где

$$R_{m,n} = \frac{2\nu}{\pi n} \int_{-1}^{1} U_{n-1}(x) U_{m-1}(x) \sqrt{1-x^2} \left[\varphi_0(x)\right]^{\nu-1} dx$$

$$\begin{aligned} a_m^{(k)} = & -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, U_{m-1}(x) \varphi''_{k-1}(x) dx + \\ & + \frac{2\lambda}{\pi} A_k^{(\nu)} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, U_{m-1}(x) \cdot \left[\varphi_0(x)\right]^{\nu-k} \times \\ & \times \left[\varphi_1(x)\right]^k dx + \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{m=1}^{k-1} A_{km}^{(\nu)} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, U_{m-1}(x) \times \\ & \times \left[\varphi_0(x)\right]^{\nu-k+m} \left[\varphi_1(x)\right]^{k-(m+1)} \varphi_{m+1}(x) dx \quad (k \geq 1;\ m = 1,2,\ldots) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Далее традиционным способом [4,8,9] доказывается квазивполне регулярность системы (2.15).

2^0. Теперь представим решение уравнения (1.10) в виде ряда по степеням малого параметра λ:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k g_k(x) \tag{2.17}$$

Подставляя (2.17) в (1.10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, находим:

$$\alpha g_0''(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g_0'(s)}{s-x}ds=0 \tag{2.18}$$

$$\alpha g_k''(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g_k'(s)}{s-x}ds=B_k^{(\nu)}\left[g_0(x)\right]^{\nu-k+1}\left[g_1(x)\right]^{k-1}+$$
$$+\sum_{m=1}^{k-2}B_{km}^{(\nu)}\left[g_0(x)\right]^{\nu-k+m+1}\left[g_1(x)\right]^{k-m-2}g_{m+1}(x)\quad (k\geq 1) \tag{2.19}$$

где $B_k^{(\nu)}=\dfrac{\nu(\nu-1)\ldots[\nu-(k-2)]}{(k-1)!}$, $B_{km}^{(\nu)}=\dfrac{\nu(\nu-1)\ldots[\nu-(k-m-2)]}{(k-m-2)!}$

$B_k^{(\nu)}=1$ при $k=1$; $B_{km}^{(\nu)}=0$ при $k=1,2$.

при граничных условиях

$$g_0(-1)=0\,,\qquad g_0(1)=1 \tag{2.20}$$

$$g_k(-1)=0\,,\qquad g_k(1)=0\qquad k\geq 1 \tag{2.21}$$

Таким образом, решение нелинейного, сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.10), при граничных условиях (1.11), сводится к решению систем рекуррентных линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (2.18) и (2.19) при граничных условиях (2.20) и (2.21). Сначала рассмотрим (2.18). Решение (2.18), при условиях (2.20), сведем к бесконечной системе линейных уравнений.

Как уже было сказанно, из (1.5) следует, что тангенциальные контактные напряжения в точках стрингера $x=\pm 1$ имеют конечные значения. Поэтому будем искать такое решение (2.18), которое в точках $x=\pm 1$ имело конечные значения [1,6,7]. Как и в [7], представим решение в виде

$$g_0'(x)=A_0+B_0x+\sqrt{1-x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n^{(0)}}{n}U_{n-1}(x)\quad (-1\leq x\leq 1) \tag{2.22}$$

где

$$A_0=\left[g_0'(1)+g_0'(-1)\right]/2\,,\quad B_0=\left[g_0'(1)-g_0'(-1)\right]/2$$

$U_{n-1}(x)$ - многочлены Чебышева второго рода, $y_n^{(0)}$ - неизвестные коэффициенты.

Теперь интегрируя (2.22) и удовлетворяя первому граничному условию (2.20), получим:

$$g_0(x)=A_0(x+1)+\frac{B_0}{2}\left(x^2-1\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n^{(0)}}{n}Q_n(x) \tag{2.23}$$

где

$$Q_n(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-s^2}\,U_{n-1}(s)ds\qquad (n=1,2,\ldots)$$

или после вычисления

$$Q_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\pi-\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right), & n=1\\[2mm] \dfrac{\sin(n+1)\theta}{2(n+1)}-\dfrac{\sin(n-1)\theta}{2(n-1)}, & n=2,3,\ldots\end{cases}$$

Удовлетворяя второму условию (2.20), находим $y_1^{(0)} = \frac{2}{\pi}\left(1 - 2A_0\right)$.

Вычисляя теперь $g_0^{//}(x)$, будем иметь:

$$g_0^{//}(x) = B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^{(0)} T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.24}$$

Подставляя теперь (2.22), (2.24) в (2.18) и вычисляя интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{g_0^{/}(s)}{s-x} ds = 2B_0 + \left(A_0 + B_0 x\right) \ln \frac{1-x}{1+x} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^{(0)}}{n} T_n(x)$$

после элементарных выкладок приходим к соотношению

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n^{(0)} \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^{(0)}}{n} T_n(x) = f_0(x) \tag{2.25}$$

где

$$f_0(x) = \left(1 + \frac{2}{\pi\alpha}\right) B_0 + \frac{1}{\pi\alpha}\left(A_0 + B_0 x\right) \ln \frac{1-x}{1+x}$$

Теперь умножим обе части равенства (2.25) на $T_m(x)$ $(m = 1,2,\ldots)$, проинтегрируем в пределах от -1 до 1 и используя условие ортогональности многочленов Чебышева первого рода [10], известным способом получим бесконечую систему алгебраических уравнений:

$$y_m^{(0)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n}^{(1)} y_n^{(0)} = f_m^{(0)} \quad (m = 1,2,\ldots) \tag{2.26}$$

где

$$K_{m,n}^{(1)} = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta \sin\theta d\theta, \quad (m,n = 1,2,\ldots) \tag{2.27}$$

$$f_m^{(0)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_0(\cos\theta) \cos m\theta \sin\theta d\theta, \qquad \theta = \arccos x$$

$$f_0(\cos\theta) = \left(1 + \frac{2}{\pi\alpha}\right) B_0 + \frac{2}{\pi\alpha}\left(A_0 + B_0 \cos\theta\right) \ln tg \frac{\theta}{2}$$

Далее, после вычисления интегралов (2.27), бесконечную систему (2.26) можно представить в виде:

$$y_m^{(0)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} K_{m,n}^{(1)} y_n^{(0)} = b_m^{(0)} \quad (m = 2,3,\ldots) \tag{2.28}$$

где

$$K_{m,n}^{(1)} = \frac{4m\left[1 + (-1)^{n+m}\right]}{\pi\left[(m-n)^2 - 1\right]\left[(m+n)^2 - 1\right]} \quad (n \neq m \pm 1) \tag{2.29}$$

$$K_{m,1}^{(1)} = \frac{4\left[1 + (-1)^m\right]}{\pi m\left[(m^2 - 4)\right]}, \quad K_{m,n}^{(1)} = 0 \quad (n = m \pm 1)$$

$$b_m^{(0)} = f_m^{(0)} - \frac{2}{\pi\alpha}\left(1 - 2A_0\right) K_{m,1}^{(1)} \qquad (m = 2,3,\ldots).$$

Теперь после составления сумм

$$S_m^{(1)} = \frac{1}{\alpha}\left[\left|K_{m,1}^{(1)}\right| + \sum_{n=2}^{\infty}\left|K_{m,n}^{(1)}\right|\right]$$

известным способом [4,8,9] можем показать, что эти суммы и свободные члены $b_m^{(0)}$ стремятся к нулю при $m \to \infty$, которое непосредственно следует из (2.29). Следовательно, бесконечная система (2.28) при любых конечных значениях параметра α квазивполне регулярна.

Далее отметим, что после определения коэффициентов $y_m^{(0)}$ из (2.28), $g_0'(1)$ и $g_0'(-1)$ будут определяться из (1.8), постановкой в ней $x = 1$ и $x = -1$.

Теперь, после определения $g_0(x)$, вполне аналогичным образом, можем найти решение уравнения (2.19) при граничных условиях (2.21). С этой целью представим их решения в виде

$$g_k'(x) = A_k + B_k x + \sqrt{1-x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n^{(k)}}{n}U_{n-1}(x) \quad \left(k \ge 1,\ |x| \le 1\right) \tag{2.30}$$

где

$$A_k = \left[g_k'(1) + g_k'(-1)\right]/2, \qquad B_k = \left[g_k'(1) - g_k'(-1)\right]/2$$

$U_{n-1}(x)$ $(n = 1,2\ldots)$ – многочлены Чебышева второго рода, $y_n^{(k)}$ $(k \ge 1)$ – неизвестные коэффициенты.

Теперь, не останавливаясь на подробностях, отметим, что вполне аналогичным образом для определения неизвестных коэффициентов $y_n^{(k)}$, где $y_1^{(k)} = -4A_k/\pi$ $(k \ge 1)$, получим совокупность бесконечных систем алгебраических уравнений, которые отличаются друг от друга лишь свободными членами:

$$y_m^{(k)} + \frac{1}{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}K_{m,n}y_n^{(k)} = b_m^{(k)} \qquad \left(k \ge 1;\ m = 2,3,\ldots\right) \tag{2.31}$$

где ядро $K_{m,n} \equiv K_{m,n}^{(1)}$, т.е. имеет вид (2.29), а свободные члены имеют вид:

$$b_m^{(k)} = f_m^{(k)} + \frac{4A_k}{\pi\alpha}K_{m,1} \qquad \left(k \ge 1;\ m = 2,3,\ldots\right) \tag{2.32}$$

где

$$f_m^{(k)} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f_k(x)T_m(x)dx \qquad (k \ge 1)$$

$$f_k(x) = \left(1 + \frac{2}{\pi\alpha}\right)\mathrm{B}_k + \frac{1}{\pi\alpha}\left(A_k + \mathrm{B}_k x\right)\ln\frac{1-x}{1+x} - \frac{B_k^{(\nu)}}{\alpha}\left[g_0(x)\right]^{\nu-k+1} \times$$

$$\times\left[g_1(x)\right]^{k-1} - \frac{1}{\alpha}\sum_{m=1}^{k-2}B_{km}^{(\nu)}\left[g_0(x)\right]^{\nu-k+m+1}\left[g_1(x)\right]^{k-m-2}g_{m+1}(x) \quad (k \ge 1)$$

Далее, аналогичным способом доказывается квазивполне регулярность бесконечных систем (2.31) при любых конечных значениях параметра α. Отметим также, что после определения $y_n^{(k)}$ из (2.31), определяются и значения контактных напряжений в точках $x = \pm 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bonded to an infinite sheet. — Quart. J. of Mech. and Applied Math. vol. XXIII, p. 521(1970).
2. Саркисян В.С., Мхитарян В.Г., Овсепян Л.О. Передача нагрузки от степенно упрочняющейся накладки к деформируемому основанию. —Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975. т.28, №5.
3. Арутюнян Н.Х. Плоская контактная задача терии пластичности со степенем упрочнением материала.—Изв. АН Арм ССР, сер.ф.-м.н., 1959. №2, с.77-105.
4. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. —Ереван: Изд-во ЕГУ, 1976. 534с.
5. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. —М.:Наука, 1980. 304с.
6. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Саркисян В.С. Контактная задача для упругой полуплоскости, граница которой усилена склеенными с ней полубесконечными накладками.—Изв. РАН, МТТ, 1992, №3, с.180-184.
7. Керопян А.В., Саркисян В.С. Решение задачи для анизотропной полуплоскости, на границе которой приклеена накладка конечной длины. —Юбилейная научная конф., посвящ. 60-летию основания института им. М. Налбандяна. Сб. научных трудов, т. I. Высшая школа, Гюмри, 1994, с.73-76.
8. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. —М.:Наука, 1983. 487с.
9. Григолюк Э.И., Толкачев В.М., Контактные задачи теории пластин и оболочек. —М.:Машиностроение, 1980. 416с.
10. Градштейн И.С. и Рыжик Н.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. —М.:Наука, 1971. 1108с.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
5.12.1995