ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, №3-4, 1997 Механика

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СПЛОШНОГО ВЕСОМОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ ОДНОМ ЗАКРЕПЛЕННОМ ТОРЦЕ

Торосян В.С.

Վ.Ս. Թորոսյան
Մեկ հիմքով ամրակցված վերջավոր երկարությամբ կշռելի հոծ գլանի առանցքասիմետրիկ դեֆորմացիայի խնդրի լուծման մի թվային եղանակի մասին

Դիտարկվում է մեկ հիմքով ամրակցված վերջավոր երկարությամբ կշռելի հոծ գլանի առանցքասիմետրիկ դեֆորմացիայի խնդիրը: Օգտագործելով տարբերակային սխեմաները, խնդիրը բերվում է գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի: Այն լուծելու համար կիրառվում է գրաֆների տեսությունը: Երկու դեպքերի համար բերվում են թվային օրինակներ:

V.S.Torossian
On one numerical method of solution of the axisymmetrical problem for a solid weighted cylinder of a finite length with one fastened end-wall

В работе рассматривается осесимметричная задача для сплошного весомого цилиндра конечной длины при одном закрепленном торце. Используя разностные схемы, задача сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений, при решении которых применяется теория графов. Приведены численные примеры.

1. Рассматривается осесимметричная деформация сплошного однородного цилиндра конечной длины под действием собственного веса, когда на нижнем торце отсутствуют перемещения, а на другом торце и на боковой поверхности отсутствуют напряжения.

Аналитическое решение этой задачи методом Фурье дано в работе [1]. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат для случая осевой симметрии при наличии объемных сил в перемещениях имеют вид

$$\nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\Delta}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\rho R}{G} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\Delta}{\partial z} + \frac{\rho Z}{G} = 0 \tag{2}$$

Здесь u_r и u_z – компоненты перемещения, ρ – плотность материала цилиндра, G – модуль сдвига, R и Z – компоненты объемных сил

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Если ось z направить в обратную сторону действия силы тяжести для компонентов объемных сил, будем иметь $R = 0,\ Z = -g$.

Уравнения (1), (2) напишем в следующем виде:

$$(1+\alpha)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+\alpha\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}+(1+\alpha)\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-(1+\alpha)\frac{u_r}{r^2}=0 \qquad (3)$$

$$(1+\alpha)\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\alpha\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\alpha}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}=F \qquad (4)$$

где

$$\alpha=\frac{1}{1-2\nu},\quad F=\frac{\rho g}{F}$$

Уравнения (3), (4) представляют собой эллиптическую систему дифференциальных уравнений в частных производных в прямоугольнике

$$G_0=\{(r,z);\ 0<r<R;\ 0<z<l\}$$

Граничные условия для этой системы имеют вид

$$u_r(r,0)=u_z(r,0)=0 \qquad (0\le r\le R) \qquad (5)$$

$$\sigma_z(r,l)=\tau_{rz}(r,l)=0 \qquad (0\le r\le R) \qquad (6)$$

$$\sigma_r(R,z)=\tau_{rz}(R,z)=0 \qquad (0<z<l) \qquad (7)$$

где

$$\sigma_z=2G\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right)$$

$$\sigma_r=2G\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right)$$

$$\tau_{rz}=G\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)$$

Из постановки задачи следует, что на оси симметрии выполняются соотношения

$$u_r(0,z)=\tau_{rz}(0,z)=0 \qquad (0<z<l) \qquad (8)$$

Требуется найти непрерывные в $\overline{G}_0=G_0\cup\Gamma$ (где Γ – граница прямоугольника) решения $u_r(r,z)$, $u_z(r,z)$ уравнения (3), (4), которые на сторонах прямоугольника удовлетворяют граничным условиям (5)-(7) и соотношению (8).

2. В замкнутой области $\overline{G}_0=G_0\cup\Gamma$ введем прямоугольную равномерную сетку $\overline{\omega}=\overline{\omega}_1\times\overline{\omega}_2=\{(r,z)/r\in\overline{\omega}_1,\ z\in\overline{\omega}_2\}$, где $\overline{\omega}_1=\{r_i/r_i=ih_1,\ i=0,1,2,\ldots,N_1\}$ – сетка на отрезке $[0,R]$; $\overline{\omega}_2=\{z_i/z_i=ih_2,\ i=0,1,2,\ldots,N_2\}$ – сетка на отрезке $[0,l]$. Множество внутренних узлов сетки $\overline{\omega}$ обозначим через

$$\omega=\{(r,z)/r\in\overline{\omega}_1,\ z\in\overline{\omega}_2\},\ \overline{\omega}_1=\{r_i/r_i=ih_1,\ i=0,1,2,\ldots,N_1-1\}$$

$$\overline{\omega}_2=\{z_i/z_i=ih_2,\ i=0,1,2,\ldots,N_2-1\}$$

а множество граничных узлов - через $\gamma=\overline{\omega}\setminus\omega$.

Граничную задачу (3)-(7) с учетом (8) поставим в соответствии следующей разностной задаче:

$$(1+\alpha)(u_r)_{\bar{r}r}+(u_r)_{\bar{z}z}+\alpha(u_z)_{\overset{\circ}{r}\overset{\circ}{z}}+(1+\alpha)d_1(u_r)_{\overset{\circ}{r}}-(1+\alpha)d_2u_r=0 \qquad (9)$$

$$(1+\alpha)(u_z)_{\bar{z}z}+(u_z)_{\bar{r}r}+\alpha(u_r)_{\overset{\circ}{r}\overset{\circ}{z}}+d_1(u_z)_{\overset{\circ}{r}}+\alpha d_1(u_r)_{\overset{\circ}{z}}=F \qquad (10)$$

$$(r,z)\in\omega$$

$$u_r = 0 \tag{11}$$

$$u_z = 0$$

$$(r,z)\in\gamma,\quad z=0 \tag{12}$$

$$(1+\beta)(u_r)_{\bar r} + \frac{h_1}{2}\left(\alpha d_2 u_r + \beta d_1 (u_z)_{\dot z} + \beta (u_r)_{\bar z z}\right) + \beta d_1 u_r + \beta (u_z)_{\dot z} = 0 \tag{13}$$

$$(u_z)_{\bar r} + \frac{h_1}{2}\left(F - \frac{\beta}{1+\beta} d_1 (u_r)_{\dot z} - \frac{2+3\beta}{1+\beta}(u_z)_{\bar z z}\right) + (u_r)_{\dot z} = 0 \tag{14}$$

$$(r,z)\in\gamma,\ r=R,\ z\neq 0,l$$

$$(u_r)_{\bar r} + \frac{h_1}{2}(1+\nu) d_2 u_r + \nu d_1 u_r = 0$$

$$(u_z)_{\bar z} + \frac{h_2}{2}\left(\frac{1-\nu}{2}F - \nu d_1 (u_r)_{\bar z}\right) - \nu d_1 u_r = 0 \tag{15}$$

$$(r,z)\in\gamma,\ r=R,\ z=l$$

$$(1+\beta)(u_z)_{\bar z} + \frac{h_2}{2}\left(\frac{F}{2} + \beta (u_z)_{\bar r r} + \beta d_1 (u_z)_{\bar r}\right) + \beta d_1 u_r + \beta (u_r)_{\dot r} = 0 \tag{16}$$

$$(u_r)_{\bar z} + \frac{h_2}{2}\left(\frac{2+3\beta}{1+\beta} d_2 u_r - \frac{2-3\beta}{1+\beta} d_1 (u_r)_{\dot r} - \frac{2+3\beta}{1+\beta}(u_r)_{\bar r r}\right) + (u_z)_{\dot r} = 0$$

$$(r,z)\in\gamma,\ z=l,\ r\neq 0,R \tag{17}$$

$$u_r = 0$$

$$(u_z)_r = 0 \qquad (r,z)\in\gamma,\quad r=0 \tag{18}$$

где

$$\beta = \frac{\nu}{1-2\nu},\quad d_1(r_i) = \frac{1}{r_i},\quad d_2(r_i) = \frac{1}{r_i^2}$$

Разностная задача (9)-(18) на решениях задачи (1)-(2), (5)-(8) имеет второй порядок апроксимации.

3. Решение линейных алгебраических систем уравнений.

После несложных преобразований разностную задачу (9)-(18) можно написать в виде

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

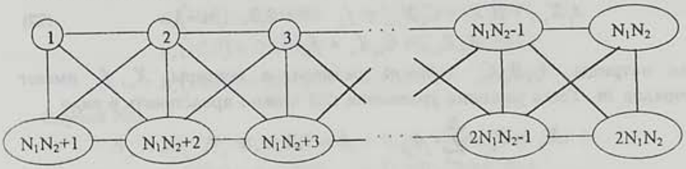
где матрицы A,B,C,D размеров $N_1N_2 \times N_1N_2$ блочно-трехдиагональные матрицы с размерами блоков $N_1 \times N_1$, причем каждый блок в свою очередь или трехдиагональная матрица или диагональная матрица, а X_1, X_2, F_1, F_2 – вектор-столбцы порядка N_1N_2. Обозначим через L матрицу

$$L = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

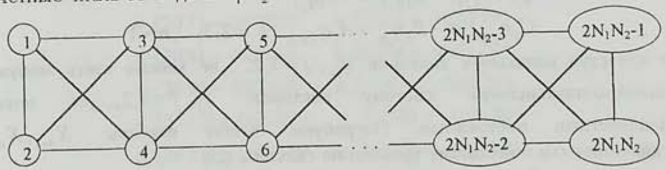
Матрица L – размера $2N_1N_2 \times 2N_1N_2$ представляет собой ленточную матрицу с полушириной ленты $N_1N + N_1 + 1$.

Решение уравнения (19) прямым методом (типа Гаусса) приводит к заполнению нулевых элементов в матрице L. Ниже будет показано, как с помощью теории графов можно существенно уменьшить ширину ленты матрицы L.

Не ограничивая общности, можно считать, что N_1, N_2 – четные числа. Обозначим через $G(L)$ граф матрицы L, который можно представить в виде



где под каждой вершиной $i, i = 1,2,\ldots,\ 2N_1N_2$ графа $G(L)$ ассоциируется одноименная блочная строка матрицы L. Перенумеруем вершины графа $G(L)$ следующим образом. На первой строке в порядке возрастания будут нечетные числа от 1 до $2N_1N_2 - 1$, а во второй – четные числа от 2 до $2N_1N_2$



Фиг. 1

После такой нумерации в преобразованной матрице $\widetilde{L}$ полуширина ленты будет равна [2] $3N_1 + 1$. Каждая перенумерация вершины i графа $G(L)$ на i_1 равносильна тому [2], что одновременно меняются местами строки с номерами i, i_1 и столбцы с номерами i, i_1. Учитывая это обстоятельство и используя схему фиг. 1, можно построить перестановочную матрицу P такую, что матрица $\widetilde{L} = P'LP$ (P' - транспонированная матрица к матрице P), будет блочно-трехдиагональной матрицей с размерами блоков $2N_1 \times 2N_1$. Пусть P – блочно-перестановочная матрица, где единичные матрицы E размера $N_1 \times N_1$ стоят на местах (1,1), (2,3), (3,5), ..., $(N_1N_2, 2N_1N_2 - 1)$; $(N_1N_2 + 1, 2)$; $(N_1N_2 + 2, 4)$; ... $(2N_1N_2 - 1, 2N_1N_2 - 2)$; $(2N_1N_2, 2N_1N_2)$. Легко проверить, что матрица $P'LP$ будет блочно-трехдиагональной матрицей. Обозначим через Y вектор размера $1 \times 2N_1N_2$ решение следующей системы:

$$P'LPY = P'F \tag{20}$$

Тогда решение исходной задачи (19) можно найти по формуле

$$X = PY \tag{21}$$

Для решения уравнения (20) построен блочный аналог метода представления решения с помощью рекуррентных последовательностей [3], который учитывает структуру блоков в матрице.

Пусть решается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A_1X_1 + B_1X_2 &= f_1 \\ A_iX_{i-1} + B_iX_i + C_iX_{i+1} &= f_2 \quad i = 2,3,\ldots,n-1 \\ A_nX_{n-1} + C_nX_n &= f_n \end{aligned} \tag{22}$$

где матрицы A_i, B_i, C_i $- m \times m$ размера, а векторы X_i, f_i имеют порядок m. Тогда решение уравнения (22) можно представить в виде

$$X_k = P_k + \sum_{j=1}^{m} r_j q_{jk} \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

Здесь P_k - частное решение неоднородного уравнения

$$P_1 = P_0, \quad B_1P_2 = f_1 - A_1P_1$$

$$C_kP_{k+1} = f_k - B_kP_k - A_kP_{k-1} \quad k = 2,3,\ldots,n-1$$

P_0 - любой начальный вектор

q_{jk}, $j = 1,2,\ldots,m$ - общие решения однородного уравнения

$$q_{j1} = q_{j0}, \quad B_1q_{j2} = -A_1q_{j1}$$

$$C_kq_{j,k+1} = -B_kq_{jk} - A_kq_{j,k-1} \quad k = 2,3,\ldots,n-1$$

в качестве начальных векторов q_{jo}, $j = 1,2,\ldots,m$ можно взять любую линейно-независимую систему векторов. r_j, $j = 1,2,\ldots,m$ пока неизвестные постоянные. Потребуем, чтобы векторы X_{n-1}, X_n удовлетворяли последнему уравнению системы (22)

$$A_n\left(P_{n-1} + \sum_{j=1}^{m} r_j q_{j,n-1}\right) + C_n\left(P_n + \sum_{j=1}^{m} r_j q_{jn}\right) = f_n$$

или

$$\sum_{j=1}^{m}\left(A_nq_{j,n-1} + C_nq_{jn}\right)r_j = f_n - A_nP_{n-1} - C_nP_n$$

Это условие и позволяет определить неизвестные числа r_j, $j = 1,\ldots,m$. Решение уравнения (22) по этому методу требует выполнения (в главной его члены при $N_1, N_2 \to \infty$) $52.5N_1^2N_2$ арифметических операций. Заметим, что если мы при решении уравнения (22) использовали блочный аналог метода прогонки, то требовалось выполнение $0\left(N_1^3N_2\right)$ арифметических операций.

4. Численная реализация.

Для приведенного алгоритма произведен численных эксперимент в двух случаях значений пары N_1, N_2.

Перемещения на граничных точках сетки $\overline{\omega}$ показаны в таблицах.

Случай №1

$$N_1 = 10; \; N_2 = 10; \; h_1 = h_2 = 0.1; \; \nu = 0.375; \; F = 1$$

$$u_r(10.1) = 0.00898 \qquad u_z(1.10) = -0.01793$$

$$u_r(10.2) = 0.00954 \qquad u_z(2.10) = -0.01793$$

$$u_r(10.3) = 0.01014 \qquad u_z(3.10) = -0.01794$$

$$u_r(10.4) = 0.01017 \qquad u_z(4.10) = -0.01792$$
$$u_r(10.5) = 0.01017 \qquad u_z(5.10) = -0.01791$$
$$u_r(10.6) = 0.01015 \qquad u_z(6.10) = -0.01787$$
$$u_r(10.7) = 0.01012 \qquad u_z(7.10) = -0.01789$$
$$u_r(10.8) = 0.01009 \qquad u_z(8.10) = -0.01877$$
$$u_r(10.9) = 0.01008 \qquad u_z(9.10) = -0.01942$$
$$u_r(10.10) = 0.01006 \qquad u_z(10.10) = -0.02192$$

Случай №2

$$N_1 = 20; \ \ N_2 = 20; \ \ h_1 = h_2 = 0.05; \ \ \nu = 0.375; \ \ F = 1$$
$$u_r(20.1) = 0.00669 \qquad u_z(1.20) = -0.01792$$
$$u_r(20.2) = 0.00894 \qquad u_z(2.20) = -0.01792$$
$$u_r(20.3) = 0.00913 \qquad u_z(3.20) = -0.01793$$
$$u_r(20.4) = 0.00956 \qquad u_z(4.20) = -0.01792$$
$$u_r(20.5) = 0.00982 \qquad u_z(5.20) = -0.01793$$
$$u_r(20.6) = 0.00997 \qquad u_z(6.20) = -0.01794$$
$$u_r(20.7) = 0.00996 \qquad u_z(7.20) = -0.01791$$
$$u_r(20.8) = 0.01018 \qquad u_z(8.20) = -0.01794$$
$$u_r(20.9) = 0.01018 \qquad u_z(9.20) = -0.01794$$
$$u_r(20.10) = 0.01019 \qquad u_z(10.20) = -0.01795$$
$$u_r(20.11) = 0.01016 \qquad u_z(11.20) = -0.01796$$
$$u_r(20.12) = 0.01017 \qquad u_z(12.20) = -0.01798$$
$$u_r(20.13) = 0.01016 \qquad u_z(13.20) = -0.01801$$
$$u_r(20.14) = 0.01013 \qquad u_z(14.20) = -0.01811$$
$$u_r(20.15) = 0.01012 \qquad u_z(15.20) = -0.01886$$
$$u_r(20.16) = 0.01008 \qquad u_z(16.20) = -0.01887$$
$$u_r(20.17) = 0.01007 \qquad u_z(17.20) = -0.01892$$
$$u_r(20.18) = 0.01006 \qquad u_z(18.20) = -0.01931$$
$$u_r(20.19) = 0.01006 \qquad u_z(19.20) = -0.02186$$
$$u_r(20.20) = 0.01004 \qquad u_z(20.20) = -0.02196$$

Используя разностные схемы, мы получили значения компонентов перемещения $u_r(r,z)$, $u_z(r, z)$ в узлах сетки $\overline{\omega}$ и, следовательно, можно определить деформированную поверхность цилиндра. В частности, для осевых перемещений $u_z(r, z)$ наибольшее перемещение получает точка с координатами (R, l), т.е. $|u_z(r,l)| < |u_z(R, l)|$. Относительно радиальных перемещений $u_r(r,z)$ можно сказать, что боковая поверхность упругого цилиндра, при защемленном нижнем торце, под действием собственного веса, выпучивается, то есть цилиндр расширяется. Таким же образом можно определить также характер изменения напряжения σ_z и τ_{rz} на нижнем защемленном торце цилиндра.

Численный эксперимент произведен также для частного решения уравнения (3), (4) (частное решение взято в виде $u_r(r,z) = Arz$, $u_z(r,z) = Az^2$, $A = \dfrac{(1-2\nu)\rho g}{2(3-2\nu)G}$). В этом случае решения получены локально с точностью 10^{-5}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б.Л., Торосян В.С. Несимметричная задача о деформации упругого весомого цилиндра конечной длины с одним закрепленным торцом под действием собственного веса. - Докл. расширенных заседаний семинара НПМ им. И.Н.Векуа при Тбилисском ГУ, Тбилиси, 1991, 7-ой Всесоюзн. съезд по теоретич. и прикладн. механике, Москва, 15-21, YIII, 1991. Аннот. доклады, М., 1991, стр.5-6.
2. Икрамов Х.Д. Решения больших разреженных систем уравнений прямыми методами. -М.: Знание, 1989. 48с.
3. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. - М.: Наука, 1985. 208с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
9.02.1996

Տպագրությունը՝ օֆսեթ
Թուղթը՝ օֆսեթ
Չափսը՝ 84x108 1/18
Ծավալը՝ 15 պայմ. տպ. մամուլ
Տպաքանակը՝ 150
Գինը՝ պայմանագրային

«Զանգակ-97» Հրատարակչություն
Երևան, Մարշալ Բաղրամյան 3

«Զանգակ-97» հրատարակչության տպարան Երևան, Վարդանանց փակուղի 8