ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, №3-4, 1997 Механика

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ КЛИНОВИДНЫХ ОБЛАСТЕЙ, ОСЛАБЛЕННОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ВЕРШИНУ КЛИНЬЕВ

Аветикян В.Е.

Վ.Ե.Ավետիքյան

Երկու սեպաձև տիրույթներից բաղկացած բաղադրյալ հարթության մի խառը խնդրի մասին, որը թուլացված է նրա սիմետրիայի առանցքի վրա գտնվող և սեպերի գագաթով անցնողկիսաանվերջ ճաքով

Դիտարկված է խառը խնդիր երկու սեպաձև տիրույթներից բաղկացած բաղադրյալ հարթության համար, որը թուլացված է նրա սիմետրիայի առանցքի վրա գտնվող և սեպերի գագաթով անցնող կիսաանվերջ ճաքով:

Խնդրի լուծումը բերված է Վիներ-Հոպֆի ֆունկցիոնալ հավասարմանը, որի փակ լուծումը ստացված է:

V.E.Avetikyan

On a mixed problem for a plane, which is composed of two wedges and weakened with a crack, placed along its symmetry axis and overlapping the vertex of the wedges

Рассматривается смешанная задача для кусочно-однородной плоскости, состоящей из двух клиновидных областей, жестко сцепленных вдоль границ $\vartheta = \pm\alpha \ \left(0 < \alpha < \pi, 0 < r < \infty\right)$, ослабленной симметричной полубесконечной трещиной, проходящей через вершину клиньев. Решение задачи сведено к функциональному уравнению Винера-Хопфа, получено его замкнутое решение. Определено значение коэффициента особенности в конце трещины.

Рассмотрим смешанную задачу для кусочно-однородной плоскости, состоящей из двух клиновидных областей, жестко сцепленных вдоль границ $\vartheta = \pm\alpha \ \left(0 < \alpha < \pi, 0 < r < \infty\right)$, имеющих модуль Юнга и коэффициент Пуассона E_1, ν_1 при $-\alpha < \vartheta < \alpha$ и E_2, ν_2 при $\alpha < \vartheta < 2\pi - \alpha$, соответственно. При $\vartheta = 0,\ 0 \le r < \infty$ и $\vartheta = \pi,\ 0 \le r < a$ имеется полубесконечная трещина, к берегам которой приложены заданные постоянные нормальные нагрузки.

Граничные условия сформулированной симметричной задачи можно записать так:

$$\vartheta = \alpha, \quad \left[u_r\right] = \left[u_\vartheta\right] = 0; \ \left[\sigma_\vartheta\right] = \left[\tau_{r\vartheta}\right] = 0, \quad 0 < r < \infty \tag{1}$$

$$\vartheta = 0, \quad \tau_{r\vartheta} = 0, \quad 0 \le r < \infty; \ \sigma_\vartheta = -\sigma_1, \quad 0 \le r \le a \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \vartheta = \pi, \quad \sigma_\vartheta = -\sigma_0, \quad 0 < r < a; \ u_\vartheta = 0, \quad a < r < \infty \\ \vartheta = \pi, \quad \tau_{r\vartheta} = 0, \quad 0 \le r < \infty \end{gathered} \tag{3}$$

u_r, u_ϑ - смещения, $\sigma_\vartheta, \tau_{r\vartheta}$ - напряжения, σ_0, σ_1 - заданные постоянные величины, $\left[N\right]$ - скачок величины N. На бесконечности напряжения исчезают.

Применяя интегральное преобразование Меллина с комплексным параметром p к уравнениям Ламе и к граничным условиям задачи (1)-(3), после некоторых выкладок для поставленной задачи получим следующее функциональное уравнение Винера-Хопфа:

$$E_2 p\bar{u}_\vartheta^-(p) = \frac{D_1(p)}{D_2(p)}\left[\bar{\sigma}_\vartheta^+(p+1,\pi) - \frac{\sigma_0}{p+1}\right] + \frac{k\sigma_1}{p+1}\frac{D_3(p)}{D_2(p)}$$

$$(-\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0,\ 0 < \varepsilon < 1)$$

$$D_1(p) = k^2\left[G_1 + \delta\sin 2\pi p\right] - k\left[G_2 - (1+\nu_2)A_1\right] - (1+\nu_2)A_2,\quad k = E_2/E_1$$

$$D_2(p) = k^2\left[H_1 + H_0 + \delta\sin^2\pi p\right] - k\left[H_2 + H_0 + B_1\left(C_{12} - (1+\nu_2)\right)\right] +$$

$$+ B_2\left[C_{22} - (1+\nu_2)\right],\quad D_3(p) = \delta H_3 + \delta k\left[2\sin\pi p - H_3\right]$$

$$G_j = A_j(\delta_1 - \nu_1\delta) - 2(1+\nu_j)A_3 - 4\Delta_0 + 2\left[2\Delta_0 - (1-\nu_1)\Delta_1\right]\times$$

$$\times\sin^2(\pi-\alpha)p + 2p(1+\nu_1)\left[\Delta + \Delta_0 - 2p\sin 2(\pi-\alpha)p\right]\sin^2\alpha,\quad (j=1;2)$$

$$H_0 = 2pB_1\sin^2\alpha - 0.5\Delta_1 A_1$$

$$H_j = B_j(\delta_1 - \nu_1\delta) - 2(\delta_1 - \nu_1\delta) + 2Q_j + C_{jj}\delta,\quad (j=1;2)$$

$$H_3 = \Delta_0\cos\pi p + \left[\delta_1 + \Delta_2 - p\nu_1(1-p)\sin^2\alpha\right]\sin\pi p$$

$$A_3 = \Delta_2\sin 2\pi p - \Delta_0\sin^2\pi p \tag{4}$$

$$C_{ij} = 2 - (\nu_i + \nu_j) - p(p-1)(1+\nu_i)(1+\nu_j)\sin^2\alpha$$

$$B_i = (3-\nu_i)\sin^2(\pi-\alpha)p + p(1+\nu_i)\sin^2\alpha - 2,\quad (i=1;2)$$

$$A_i = (3-\nu_i)\sin 2(\pi-\alpha)p + p(1+\nu_i)\sin 2\alpha,\qquad (i=1;2)$$

$$Q_i = 2p\sin^2\alpha\left[1 + (p-1)(1+\nu_i)\sin^2 p\alpha\right]$$

$$\delta = \sin^2 p\alpha - p^2\sin^2\alpha,\qquad \delta_1 = \sin^2 p\alpha + p^2\sin^2\alpha$$

$$\Delta_0 = \sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha,\qquad \Delta_1 = \sin 2p\alpha - p\sin 2\alpha$$

$$\Delta = \sin 2(\pi-\alpha)p - p\sin 2\alpha,\quad \Delta_2 = \sin 2p\alpha + p\sin^2\alpha$$

$$\bar{u}_\vartheta^-(p) = \int_0^1 u_\vartheta(ar,\pi)r^{p-1}dr,\quad \bar{\sigma}_\vartheta^+(p+1,\pi) = \int_1^\infty \sigma_\vartheta(ar,\pi)r^p dr$$

Преобразуем уравнение (4) к следующему виду:

$$E_2\bar{V}^-(p+1) = 2\operatorname{ctg}\pi p D(p)\left[\bar{\sigma}_\vartheta^+(p+1,\pi) - \frac{\sigma_0}{p+1}\right] + \frac{k\sigma_1}{p+1}\frac{D_3(p)}{D_2(p)},$$

$$-\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0$$

$$D(p) = \frac{D_1(p)}{2D_2(p)ctg\pi p},\quad \bar{V}^-(p+1) = -\int_0^1 \frac{du_\vartheta(ar,\pi)}{dr}r^p dr - u_\vartheta(0,\pi) \tag{5}$$

Решение функционального уравнения (5) ищем в классе функции [1,2]

$$\bar{\sigma}_\vartheta^+(p+1,\pi) \sim |p|^{-\frac{1}{2}},\quad \bar{V}^-(p+1) \sim |p|^{-\frac{1}{2}}\quad \text{при}\quad |p|\to\infty \tag{6}$$

в своих областях регулярностей, так как

$\sigma_\vartheta(ar,\pi)$ и $\dfrac{du_\vartheta(ar,\pi)}{dr}$ при $r\to 1$ имеют корневую особенность.

Далее при помощи факторизации [1,2]

$$D(p)=D^+(p)/D^-(p),\quad -\varepsilon<\operatorname{Re}p<0,\quad D^\pm(p)=\exp\left[\pm R^\pm(p)\right]$$

$$R(r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\ln D(p)r^{-(p+1)}dp\quad -\varepsilon<c<0 \tag{7}$$

$$p\operatorname{ctg}\pi p=M^+(p)M^-(p),\quad M^\pm(p)=\Gamma(1\mp p)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}\mp p\right)$$

где $M^\pm(p)\sim|p|^{\frac{1}{2}}$ при $|p|\to\infty$ в своих областях регулярности, из уравнения (5) получим

$$E_2\frac{D^-(p)}{M^-(p)}\overline{V}^-(p+1)=\frac{2M^+(p)D^+(p)}{p}\overline{\sigma}_\vartheta^+(p+1,\pi)-$$

$$-\frac{2\sigma_0M^+(p)D^+(p)}{p(p+1)}+\frac{k\sigma_1}{p+1}\frac{D_3(p)}{D_2(p)}\frac{D^-(p)}{M^-(p)},\quad(-\varepsilon<\operatorname{Re}p<0) \tag{8}$$

Используя представления [2,3]

$$\frac{M^+(p)D^+(p)}{p(p+1)}=\left[\frac{M^+(p)D^+(p)}{p(p+1)}+\frac{M^+(-1)D^+(-1)}{p+1}\right]-\frac{M^+(-1)D^+(-1)}{p+1}$$

$$\overline{\varphi}(p+1)=\frac{1}{p+1}\frac{D_3(p)}{D_2(p)}\frac{D^-(p)}{M^-(p)},\quad\overline{\varphi}(p+1)=\overline{\varphi}^-(p+1)+\overline{\varphi}^+(p+1)$$

$$\overline{\varphi}^-(p+1)=\int_0^1\varphi(r)r^pdr,\qquad\overline{\varphi}^+(p+1)=\int_1^\infty\varphi(r)r^pdr$$

функциональное уравнение (8) представим в следующем виде:

$$E_2\frac{D^-(p)}{M^-(p)}\overline{V}^-(p+1)-\frac{2\sigma_0M^+(-1)D^+(-1)}{p+1}-k\sigma_1\overline{\varphi}^-(p+1)=$$

$$=\frac{2M^+(p)D^+(p)}{p}\overline{\sigma}_\vartheta^+(p+1,\pi)-\frac{2\sigma_0}{p+1}\left[\frac{M^+(p)D^+(p)}{p}+M^+(-1)D^+(-1)\right]+$$

$$+k\sigma_1\overline{\varphi}^+(p+1),\quad(-\varepsilon<\operatorname{Re}p<0) \tag{9}$$

В силу теоремы об аналитическом продолжении и теоремы Лиувилля, учитывая поведения функций, входящих в (9), (6) и (7), получим следующее решение задачи:

$$E_2\overline{V}^-(p+1)=\frac{2\sigma_0M^+(-1)D^+(-1)}{p+1}\frac{M^-(p)}{D^-(p)}+k\sigma_1\frac{M^-(p)}{D^-(p)}\overline{\varphi}^-(p+1) \tag{10}$$

$$\overline{\sigma}_\vartheta^+(p+1,\pi)=\frac{\sigma_0}{p+1}+\frac{M^+(-1)D^+(-1)}{M^+(p)D^+(p)}\frac{\sigma_0p}{p+1}-\frac{k\sigma_1p}{2}\frac{\overline{\varphi}^+(p+1)}{M^+(p)D^+(p)} \tag{11}$$

Из (11) для $\sigma_\vartheta(r,\pi)$ при $r\to a$ получим следующую ассимптотическую формулу:

$$\sigma_\vartheta(r,\pi) \sim \frac{2\sigma_0 D^+(-1)}{\pi} \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{r-a}}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х. Об одной задаче для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение. - Уч. зап. ЕГУ, естеств. науки, 1982, №2, с.38-43.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. - М.:1962. 279 с.
3. Кипнис Л.А. Кусочно-однородная плоскость с границей раздела в форме сторон угла и симметричным разрезом, исходящим из вершины. - ПММ. 1986, т.50, вып.2, с.334-336.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 26.03.1996