

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПО ПРОДОЛЬНОМ КОЛЕБАНИИМ
СТЕРЖНЯ, ИЗГОТОВЛЕННОГО ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО
МАТЕРИАЛА

Хачатрян А.А.

Ա.Ա. Խաչատրյան
Տարածողուց նյութից պատրաստված ձողի երկայնական
տատանումների մի խնդրի մասին

Գիտարկվում է ժայռերում ամրացված ձողի երկայնական տատանումները, երբ ձողի ինչ որ կտրվածքում նրա առանցքի ուղղությամբ ազդող ուժը հանկարծ հեռացվում է: Առաջին կետում բերվում է այդ խնդրի լուծումը, երբ ձողը պատրաստված է սովորական նյութից: Երկրորդ կետում բերվում է այդ նույն խնդրի լուծումը մի մասնավոր դեպքի համար, երբ ձողը պատրաստված է տարատնորոց նյութից:

A.A. Khachatryan

On a problem of the longitudinal vibration of the rod made from different moduls material

Рассматривается продольное колебание стержня с закрепленными концами, когда действующая вдоль оси стержня сила, приложенная в некотором его сечении, внезапно удаляется.

В первом пункте приводится решение этой задачи для стержня, изготовленного из обычного материала. Во втором пункте, при одном частном случае, решается эта задача, когда стержень изготовлен из разномодульного материала.

1. Стержень длины l с закрепленными концами находится под действием силы P , приложенной в сечении $x = l_1$ и направленной вдоль оси стержня. В момент времени $t = 0$ внезапно удаляется сила и тогда частицы стержня начнут совершать колебательные движения.

Уравнение движения имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a^2 = E/\rho \quad (1.1)$$

где E , ρ - модуль упругости и плотность материала стержня. Граничные и начальные условия в данной задаче следующие:

$$\text{при } x = 0 \quad \text{и} \quad x = l \quad u = 0, \quad \text{при } t = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\text{при } t = 0 \quad u(x,0) = u_0 \begin{cases} x/l_1 & 0 \leq x \leq l_1 \\ (l-x)/l_2 & l_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad u_0 = \frac{Pl_1}{EF} \quad (1.2)$$

Здесь $l_2 = l - l_1$, F - площадь поперечного сечения стержня.

Пользуясь методом разделения переменных из уравнения (1.1), после удовлетворения граничным условиям и первому начальному условию, для продольного перемещения получим

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} \quad (1.3)$$

После удовлетворения второму начальному условию, предварительно разлагая функцию $u(x,0)$ (1.2) в ряд Фурье по синусам, для A_n получим

$$A_n = \frac{2u_0 l^2}{\pi^2 l_1 l_2} \frac{1}{n^2} \frac{\pi l_1}{l} \quad (1.4)$$

В силу этого, для $u(x,t)$ окончательно будем иметь

$$u(x,t) = \frac{2u_0 l^2}{\pi^2 l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi l_1}{l} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi n a t}{l} \quad (1.5)$$

Отсюда видно, что частицы стержня совершают периодическое движение с периодом, равным $T = 2l/a$. В частном случае, когда сила приложена в середине стержня ($l_1 = l_2 = l/2$), из (1.5) получается известное решение [1]

$$u(x,t) = \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1) \frac{\pi x}{l} \cos(2n-1) \frac{\pi a t}{l} \quad (1.6)$$

Из (1.5) в момент, когда $t = T/2 = l/a$, находим

$$\begin{aligned} u\left(x, \frac{l}{a}\right) &= -\frac{2u_0 l^2}{\pi^2 l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi l_1}{l} \sin \frac{\pi x}{l} = \\ &= -u_0 \begin{cases} x/l_2 & 0 \leq x \leq l_2 \\ (l-x)/l_1 & l_2 \leq x \leq l \end{cases} \end{aligned} \quad (1.7)$$

то есть при $t = l/a$ часть стержня ($0 \leq x \leq l_2$) будет находиться в сжатом, а остальная часть его в растянутом состоянии. Из физических соображений это очевидно, так как нет потери энергии и это положение стержня соответствует случаю, когда если бы сила P была приложена в сечении $x = l_2$ и была направлена в сторону $x = 0$.

Заметим, что ряд (1.5) сходится весьма медленно и поэтому непосредственным использованием его сложно будет судить о перемещениях любого сечения стержня с течением времени. Однако есть возможность суммировать этот ряд, после чего все эти вопросы решаются легко.

Для суммирования ряда (1.5) прежде всего необходимо там произведение, содержащее x и t , представить в виде суммы и использовать разложение, получаемое при представлении функции $u(x,0)$ из (1.2) в ряд Фурье с продолжением ее нечетным образом.

Не останавливаясь на ходе суммирования ряда (1.5), приведем окончательные выражения для перемещения $u(x,t)$ в отдельных интервалах времени

$$0 < t_1 < l_2/a$$

$$u(x,t_1) = \frac{u_0}{2l_1 l_2} \begin{cases} 2l_2 x & 0 \leq x \leq l_1 - at_1 \\ l(l_1 - at_1) - (l_1 - l_2)x & l_1 - at_1 \leq x \leq l + l_2 - at_1 \\ -2l_1(x-l) & l + l_2 - at_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.8)$$

На фиг.1 приведен график функции $u(x, t_1)$ (для случая $l_1 > l_2$), представляющий собой ломаную линию OB_1C_1C . Ломаная OBC соответствует моменту $t_1 = 0$, а OK_1C - моменту $t_1 = l_2/a$.

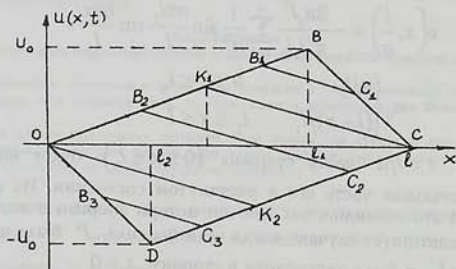
$$l_2/a < t_2 < l_1/a$$

$$u(x, t_2) = \frac{u_0}{2l_1l_2} \begin{cases} 2l_2x & 0 \leq x \leq l_1 - at_2 \\ l(l_1 - at_2) - (l_1 - l_2)x & l_1 - at_2 \leq x \leq l + l_2 - at_2 \\ -2l_2(x - l) & l + l_2 - at_2 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.9)$$

График этой функции является ломаная OB_2C_2C , а при $t = l_1/a$ график принимает положение OK_2C .

$$l_1/a < t_3 < l/a$$

$$u(x, t_3) = \frac{u_0}{2l_1l_2} \begin{cases} 2l_1x & 0 \leq x \leq at_3 - l_1 \\ l(l_1 - at_3) - (l_1 - l_2)x & at_3 - l_1 \leq x \leq l + l_2 - at_3 \\ 2l_2(x - l) & l + l_2 - at_3 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.10)$$



Фиг. 1

График этой функции является ломаная OB_3C_3C , а при $t_3 = l/a$ график принимает положение ODC .

$$l/a < t_4 < (l + l_2)/a$$

$$u(x, t_4) = \frac{u_0}{2l_1l_2} \begin{cases} -2l_1x & 0 \leq x \leq l + l_2 - at_4 \\ -l(l + l_2 - at_4) - (l_1 - l_2)x & l + l_2 - at_4 \leq x \leq at_4 - l_1 \\ 2l_2(x - l) & at_4 - l_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.11)$$

График этой функции (чтобы не загромождать график) имеет примерный вид, как ломаная OB_3C_3C , а при $t_4 = (l + l_2)/a$ график принимает положение OK_2C .

$$(l+l_2)/a < t_5 < (l+l_1)/a$$

$$u(x, t_5) = \frac{u_0}{2l_1 l_2} \begin{cases} 2l_2 x & 0 \leq x \leq at_5 - l - l_2 \\ l(at_5 - l - l_2) - (l_1 - l_2)x & at_5 - l - l_2 \leq x \leq at_5 - l_1 \\ 2l_2(x - l) & at_5 - l_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.12)$$

График этой функции имеет примерный вид, как ломаная OB_2C_2C , а при $t_5 = (l+l_1)/a$ график принимает положение OK_1C .

$$(l+l_1)/a < t_6 < 2l/a$$

$$u(x, t_6) = \frac{u_0}{2l_1 l_2} \begin{cases} 2l_2 x & 0 \leq x \leq at_6 - l - l_2 \\ l(at_6 - l - l_2) - (l_1 - l_2)x & at_6 - l - l_2 \leq x \leq 2l + l_1 - at_6 \\ -2l_1(x - l) & 2l + l_1 - at_6 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.13)$$

График этой функции имеет примерный вид, как ломаная OB_1C_1C , а при $t_6 = 2l/a$ график принимает положение OBC . Этим и завершается период колебания.

Нетрудно заметить, что все прямые B_1C_1 и K_1C , OK_2 параллельны между собой и их наклон к оси x определяется величиной $-u_0(l_1 - l_2)/2l_1 l_2$.

Следует отметить, что аналогичный результат, но совершенно другими методами, получен в книге [2] при решении задачи о поперечных колебаниях струны закрепленной в обоих концах, а это не удивительно, так как с точки зрения математики эти задачи идентичны.

2. Рассмотрим теперь поставленную в пункте задачу для случая, когда стержень изготовлен из разномодульного материала. Как известно [3], в этом случае уравнение движения для растянутой зоны есть

$$a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a_1^2 = E^+/\rho \quad (2.1)$$

а для сжатой зоны-

$$a_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a_2^2 = E^-/\rho \quad (2.2)$$

где E^+ и E^- - модули упругости при растяжении и сжатии.

Сложность решения этой задачи заключается в том, что с течением времени в процессе колебания становится невозможным четко определить зоны растяжения и сжатия. Однако, в одном частном, когда место приложения силы P удовлетворяет условию

$$l_1/l_2 = a_1/a_2 = \sqrt{E^+/E^-} \quad (2.3)$$

эта трудность преодолевается и задача решается до конца.

В начальный момент часть стержня ($0 \leq x \leq l_1$) находится в растянутом, а остальная часть ($l_1 \leq x \leq l$) - в сжатом состоянии. С начала удаления силы P ($t=0$) до некоторого пока неизвестного времени уравнение движения для первой части есть (2.1), а для второй части - (2.2). В этом промежутке времени граничные и начальные условия те же, что и

в задаче первого пункта (1.2) с той лишь разницей, что здесь величина u_0 , при учете (2.3), имеет вид

$$u_0 = \frac{Pl_1l_2}{Fl\sqrt{E^+E^-}} \quad (2.4)$$

Кроме того, к граничным условиям добавляется также условие

$$u(l_1 - 0, t) = u(l_1 + 0, t) \quad (2.5)$$

Решение для растянутой части, удовлетворяющем первому граничному и первому начальному условиям, можно представить в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \omega_n x \cos \omega_n a_1 t \quad 0 \leq x \leq l_1 \quad (2.6)$$

Разлагая теперь в ряд Фурье по синусам функцию

$$f_1(x) = \frac{u_0}{l_1} \begin{cases} x & 0 \leq x \leq l_1 \\ 2l_1 - x & l_1 \leq x \leq 2l_1 \end{cases} \quad (2.7)$$

и приравнявая ее к $u(x, 0)$ из (2.6), получим

$$A_n = \frac{8u_0}{\pi^2} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}; \quad \omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l_1} \quad (2.8)$$

Для сжатой части производим замену $l - x = y$. Тогда для ее решения, удовлетворяющего второму граничному и первому начальному условиям, представится в виде

$$u(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \Omega_n y \cos \Omega_n a_2 t \quad 0 \leq y \leq l_2 \quad (2.9)$$

Разлагая в ряд Фурье по синусам функцию

$$f_2(y) = \frac{u_0}{l_2} \begin{cases} y & 0 \leq y \leq l_2 \\ 2l_2 - y & l_2 \leq y \leq 2l_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

и приравнявая ее к $u(y, 0)$ из (2.9), получим

$$B_n = \frac{8u_0}{\pi^2} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}; \quad \Omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l_2} \quad (2.11)$$

В результате сравнения (2.8) и (2.11) будем иметь

$$A_n = B_n, \quad \omega_n l_1 = \Omega_n l_2 \quad (2.12)$$

Таким образом, решение для $u(x, t)$ в рассматриваемом промежутке времени, с учетом (2.3), можно представить в виде

$$u(x, t) = \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2l_0} \times \begin{cases} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l_1} & 0 \leq x \leq l_1 \\ \sin \frac{(2n-1)\pi(l-x)}{2l_2} & l_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.13)$$

удовлетворяющее также граничному условию (2.5). Здесь $t_0 = l_1/a_1 = l_2/a_2$ - время, при котором волна растяжения из точки

$x = l_1$ доходит до точки $x = 0$, а волна сжатия - из точки $x = l_1$ до точки $x = l$.

Следует отметить, что формула для $u(x, t)$ (2.13) имеет силу только для промежутка времени $0 \leq t \leq t_0$.

Из (2.13) видно, что в момент, когда $t = t_0$, $u(x, t_0) = 0$, то есть стержень принимает свое недеформированное положение. Но частицы стержня продолжают свои движения. В течение времени от $t = t_0$ до $t = 2t_0$ волна сжатия от точки $x = 0$ достигает в точку $x = t_0 a_2 = l_2$, а волна растяжения - от точки $x = l$ также до точки $x = l - t_0 a_1 = l_2$. Значит, в промежутке времени $t_0 \leq t \leq 2t_0$ часть стержня $0 \leq x \leq l_2$ будет находиться в сжатом, а часть $l_2 \leq x \leq l$ в растянутом состоянии.

Скорость движения частиц стержня в момент, когда $t = t_0$, есть

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = -\frac{4u_0}{\pi t_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \begin{cases} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l_1} & 0 \leq x \leq l_1 \\ \sin \frac{(2n-1)\pi(l-x)}{2l_2} & l_1 \leq x \leq l \end{cases} = -\frac{u_0}{t_0} \quad (2.14)$$

В промежутке времени $t_0 \leq t \leq 2t_0$ уравнение движения для части стержня $0 \leq x \leq l_2$ есть (2.2), а для части $l_2 \leq x \leq l$ - (2.1). Здесь граничные условия те же, что и при $0 \leq t \leq t_0$, кроме (2.5), которое заменяется на $u(l_2 - 0, t) = u(l_2 + 0, t)$, а начальные условия следующие:

$$\text{при } t = t_0 \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{u_0}{t_0} \quad (2.15)$$

Здесь ход решения в принципе тот же, как и для промежутка времени $0 \leq t \leq t_0$. После удовлетворения всем граничным и начальным условиям, решение для $u(x, t)$ в промежутке времени $t_0 \leq t \leq 2t_0$, представим в виде

$$u(x, t) = \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2t_0} \times \begin{cases} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l_2} & 0 \leq x \leq l_2 \\ \sin \frac{(2n-1)\pi(l-x)}{2l_1} & l_2 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.16)$$

Здесь, принимая $t = 2t_0$, получим

$$u(x, 2t_0) = -\frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \times$$

$$u(x, 2t_0) = \begin{cases} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l_2} & 0 \leq x \leq l_2 \\ \sin \frac{(2n-1)\pi(l-x)}{2l_1} & l_2 \leq x \leq l \end{cases} = -u_0 \begin{cases} \frac{x}{l_2} \\ \frac{l-x}{l_1} \end{cases} \quad (2.17)$$

Сравнивая $u(x, 2t_0)$ с $u(x, 0)$ замечаем, что l_1 и l_2 поменялись местами и изменился знак плюс на минус. Это положение стержня (при $t = 2t_0$) соответствует случаю, когда если бы сила P была приложена в сечении стержня $x = l_2$ и была направлена в сторону $x = 0$. Таким образом, в момент, когда $t = 2t_0$, часть стержня в интервале $0 \leq x \leq l_2$ находится в сжатом, а другая часть ($l_2 \leq x \leq l$) - в растянутом состоянии. Далее за время $l_2/a_2 = t_0$ волна сжатия из точки $x = l_2$ доходит до точки $x = 0$, а волна растяжения - из точки $x = l_2$ до точки $x = l$. Поэтому в промежутке времени $2t_0 \leq t \leq 3t_0$ уравнение движения для части стержня $0 \leq x \leq l_2$ есть (2.2), а для части $l_2 \leq x \leq l$ - (2.1). Граничные условия те же, что и для промежутка времени $t_0 \leq t \leq 2t_0$, а начальные условия - при $t = t_0$ $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, а $u(x, 2t_0)$ определяется функцией (2.17). После решения и некоторых преобразований для $u(x, t)$ получаем формулу, совпадающую с (2.16). Следовательно, выражение для $u(x, t)$ (2.16) представляет собой решение задачи для промежутка времени $t_0 \leq t \leq 3t_0$.

Из (2.16) видно, что при $t = 3t_0$ $u(x, 3t_0) = 0$, то есть стержень снова принимает свое недеформированное положение. Но частицы стержня продолжают свои движения вдоль положительного направления оси x . В течение времени от $t = 3t_0$ до $t = 4t_0$ волна растяжения от точки $x = 0$ достигает до точки $x = l_1$, а волна сжатия - от точки $x = l$ также до точки $x = l_1$. Значит, в промежутке времени $3t_0 \leq t \leq 4t_0$ часть стержня $0 \leq x \leq l_1$ будет находиться в растянутом, а остальная часть - в сжатом состоянии. Чтобы не повторяться, отметим, что выражение для $u(x, t)$ в промежутке времени $3t_0 \leq t \leq 4t_0$ совпадает с выражением (2.13), полученным для промежутка времени $0 \leq t \leq t_0$.

Из (2.13) видно, что при $t = 4t_0$ $u(x, 4t_0) = u(x, 0)$, стержень принимает свое первоначальное положение. Поэтому здесь мы имеем дело с периодическим движением, с периодом, равным $4t_0$.

Таким образом, поставленная здесь задача решена. Еще раз отметим, что для промежутков времени $0 \leq t \leq t_0$ и $3t_0 \leq t \leq 4t_0$ решение представляется формулой (2.13), а для промежутка времени $t_0 \leq t \leq 3t_0$ - формулой (2.16).

В частном случае, когда стержень изготовлен из обычного материала ($E^+ = E^-$), из (2.13) и (2.16) получается формула (1.6), но не

формула (1.5), так как из-за принятого нами соотношения (2.3) следует, что $l_1 = l_2 = l/2$.

Здесь, как и в первом пункте, для четкого представления о том, что происходит с перемещениями частиц стержня в течение времени, необходимо суммировать ряды в формулах (2.13) и (2.16).

Для суммирования ряда первой строки формулы (2.13) пользуемся рядом Фурье по синусам функции (2.7), а для второй строки — функцией (2.10). Для суммирования же рядов формулы (2.16) пользуемся теми же разложениями, но в соответствующих местах, поменяв местами l_1 и l_2 .

Не останавливаясь на ходе суммирования этих рядов, приведем окончательные выражения для перемещения $u(x, t)$ в отдельных интервалах времени.

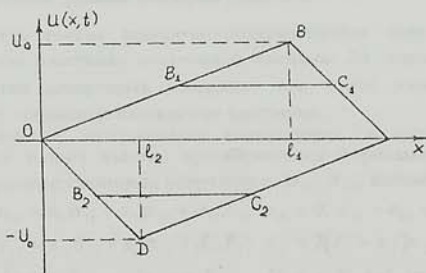
$$0 < t_1 < t_0$$

$$u(x, t_1) = u_0 \begin{cases} x/l_1 & 0 \leq x \leq l_1 - a_1 t_1 \\ (t_0 - t_1)/t_0 & l_1 - a_1 t_1 \leq x \leq l_1 + a_2 t_1 \\ (l-x)/l_2 & l_1 + a_2 t_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.18)$$

На фиг. 2 приведен график функции $u(x, t_1)$ (для случая $l_1 > l_2$), представляющий собой ломаную линию OB_1C_1C . Ломаная OBC соответствует моменту $t_1 = 0$, а прямая OC — моменту $t_1 = t_0$.

$$t_0 < t_2 < 3t_0$$

$$u(x, t_2) = -u_0 \begin{cases} x/l_2 & 0 \leq x \leq 3l_2 - a_2 t_2 \\ (3t_0 - t_2)/t_0 & 3l_2 - a_2 t_2 \leq x \leq a_1 t_2 + l_2 - 2l_1 \\ (l-x)/l_1 & a_1 t_2 + l_2 - 2l_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.19)$$



Фиг. 2

Графиком этой функции при $t_0 < t_2 < 3t_0$ является ломаная OB_2C_2C , а при $t_2 = 2t_0$ график принимает положение ODC . График же этой функции при $2t_0 < t_2 < 3t_0$ имеет примерный вид, как ломаная OB_2C_2C , а при $t_2 = 3t_0$ график представляет собой прямую OC .

$$3t_0 < t_3 < 4t_0$$

$$u(x, t_3) = u_0 \begin{cases} x/l_1 & 0 \leq x \leq a_1 t_3 - 3l_1 \\ (t_3 - 3t_0)/t_0 & a_1 t_3 - 3l_1 \leq x \leq l + 3l_2 - a_2 t_3 \\ (l-x)/l_2 & l + 3l_2 - a_2 t_3 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.20)$$

График этой функции имеет примерный вид, как ломаная OB_1C_1C а при $t_3 = 4t_0$ график принимает положение OBC . Этим и завершается период колебания.

В заключение отметим, что прямые B_1C_1 , B_2C_2 параллельны оси x .

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Колебание в инженерном деле.-М.: Физматгиз, 1959. 440 с.
2. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики, Выпуск 3.-М.: Изд. Мир, 1970. 340 с.
3. Хачатрян А.А. О продольных колебаниях призматических стержней, изготовленных из разномодульного материала. - АН СССР, Инж. журнал МТТ, 1967, №5.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
2.09.1996