

О СУЩЕСТВОВАНИИ СДВИГОВОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ
ВОЛНЫ В СЛАБО-НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ
СО СЛОЕМ

Мухсизачоян А.Р.

Ա.Ր. Մուխսիձաչոյան

Շերտով րույլ անհամասե կիսատարածությունում ստեղծված մակերևութային ալիքի գոյության մասին

Հետազոտված է համասե շերտ ունեցող վերադիրով րույլ անհամասե կիսատարածությունում Լյավի տիպի ալիքների գոյության խնդիրը՝ կախված անհամասե միջավայրի դանդաղ փոփոխվող առաջգալան բնութագրիչներից:

Փուլային արագության փոփոխության տարրեր միջավայրերի համար ստացված են դիսպերսիոն կախատարաններ և մակերևութային ալիքի գոյության պայմաններ, իսկ բարակ շերտով պարբերաբար անհամասե միջավայրի համար բերված են դիսպերսիոն կորեր: Յուրյց է տրված, որ միջավայրի անհամասեությունը դառնում է «ֆիլտր» տարրեր կլկարության ստեղծված մակերևութային ալիքների գոյության համար:

A.R. Mukhsidachoyan

On existence of a shear surface wave in weak-nonhomogeneous semi-space with layer

Исследована задача, в которой рассматривается однородный слой со слабо-неоднородной подложкой с точки зрения существования модифицированной волны Лява в зависимости от медленно изменяющихся упругих характеристик неоднородной среды. Для разных диапазонов фазовой скорости получены дисперсионные уравнения и условия существования сдвиговой поверхностной волны (СПВ). Для периодически неоднородной среды с тонким слоем приведены дисперсионные кривые.

Показано, что неоднородность среды играет роль как бы своего рода «фильтра» для существования той или иной длины СПВ.

Помимо основных типов поверхностных волн, в настоящее время предложен и изучен ряд обобщений и новых разновидностей поверхностных волн. Интересным новым обобщением волны Лява являются сдвиговые поверхностные волны (СПВ) в полупространстве с небольшой поверхностной неоднородностью, рассмотренные в работах [3-5]. В книге [2] изложена как теория рассеяния поверхностных акустических волн на приповерхностных неоднородностях, так и распространение этих волн в слоистых средах, на поверхностях переменной кривизны и т. д.

1. Представляет интерес задача, в которой рассматривается однородный слой (μ_1, ρ_1) со слабо-неоднородной подложкой $(\mu_2(x_2), \rho_2(x_2))$ с точки зрения существования модифицированной волны Лява в зависимости от переменных упругих характеристик. Слабая неоднородность среды заключается в том, что считаются медленно изменяющимися не только упругие характеристики рассматриваемой среды, но и амплитуда искомой волны, вследствие чего пренебрегаются второе производное амплитуды, а также произведения производных от амплитуд и от упругих характеристик. Выберем координатную систему таким образом, чтобы ось Ox_2 была направлена в глубину подложки, а Ox_1 – по направлению распространения волны.

Слой занимает область $(-h < x_2 < 0)$, а подложка $(x_2 > 0)$. Пусть поле перемещений СПВ имеет вид: $U\{0, 0, W_i(x_1, x_2, t)\}$, $i = 1, 2$.

Уравнение движения в слое и в подложке соответственно запишутся следующим образом:

$$\Delta W_1 = c_1^{-2} \ddot{W}_1$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial x_1^2} + \mu_2^{-1}(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu_2(x_2) \frac{\partial W_2}{\partial x_2} \right] = c_2^{-2}(x_2) \ddot{W}_2 \quad (1.1)$$

где $c_1 = (\mu_1/\rho_1)^{1/2}$ и $c_2 = [\mu_2(x_2)/\rho_2(x_2)]^{1/2}$ - скорости сдвиговых объемных волн соответственно в слое и в подложке.

Граничные условия на поверхности слоя $x_2 = -h$ и на поверхности раздела слой-подложка $x_2 = 0$ запишутся соответственно следующим образом:

$$\frac{\partial W_1}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = -h$$

$$\mu_1 \frac{\partial W_1}{\partial x_2} = \mu_0 \frac{\partial W_2}{\partial x_2}, \quad W_1 = W_2, \quad x_2 = 0 \quad (1.2)$$

где $\mu_0 = \mu_2(0)$. Решения уравнений (1.1) ищем в виде

$$W_{1,2} = \varphi_{1,2}(x_2) \exp[i(kx_1 - \omega t)]$$

Уравнения движения преобразуются к виду

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dx_2^2} + k^2 \alpha_1^2 \varphi_1 = 0 \quad (1.3)$$

$$\mu_2^{-1}(x_2) [\mu_2(x_2) \varphi_2'(x_2)]' - k^2 (1 - \eta) \varphi_2(x_2) = 0 \quad (1.4)$$

Таким образом, поле упругих перемещений СПВ в слое принимает вид

$$W_1 = [B \sin(k\alpha_1 x_2) + D \cos(k\alpha_1 x_2)] \exp[i(kx_1 - \omega t)] \quad (1.5)$$

Исходя из предположения, что среда подложки является слабо-неоднородной, ищем решение уравнения (1.4) по методу ВКБ [4]

$$\varphi_2(x_2) = A(x_2) \exp \left[-k \int_0^{x_2} \sqrt{1 - \eta(\xi)} d\xi \right] \quad (1.6)$$

где считается, что $A(x_2)$ - слабо изменяющаяся по x_2 функция, т. е. пренебрежимы $A''(x_2)$, $\mu_2'(x_2)A'(x_2)$ и т. д. Удовлетворяя (1.6) уравнению (1.4) с точностью допущения слабо-изменяющихся функций и с учетом затухания волны на бесконечности

$$0 < \eta(x_2) < 1 \quad (1.7)$$

получим поле СПВ слабо-неоднородной подложки

$$W_2 = A_0 \exp \left[-k \int_0^{x_2} \sqrt{1 - \eta(\xi)} d\xi \right] \frac{\exp[i(kx_1 - \omega t)]}{\mu_2^{1/2}(x_2) [1 - \eta(x_2)]^{1/4}} \quad (1.8)$$

Решения (1.5) и (1.8) удовлетворяют граничным условиям (1.2), в результате чего получим дисперсионное уравнение задачи

$$2kgtg(kh\alpha_1) = \alpha_0^{-2}\alpha_1^{-1} \left[\mu'_0\mu_0^{-1}\alpha_0^2 + c'_0c_0^{-1}(1-\alpha_0^2) + 2k\alpha_0^3 \right] \quad (1.9)$$

где

$$\alpha_0 = (1-\eta_0)^{1/2}, \quad \alpha_1 = (\eta_1-1)^{1/2}, \quad \eta_{0,1} = v^2/c_{0,1}^2, \quad (1.10)$$

$$c_0 = c_2(0), \quad g = \mu_1/\mu_0$$

В уравнение (1.9) входят параметры среды и их первые производные только при $x_2 = 0$, т. е. фазовая скорость СПВ фактически не зависит от "формы" объемных неоднородностей. Это следствие как сильных требований на "слабость" неоднородностей, так и того, что искомая волна локализована вблизи поверхности $x_2 = 0$. Необходимо отметить, что при выводе решений (1.5), (1.8) и дисперсионного уравнения (1.9) предполагалось, что α_1 является реальной, тогда, когда α_0 может быть только реальной в силу затухания волны в подложке. При рассмотрении однородной подложки, дисперсионное уравнение (1.9) сводится к классическому уравнению Лява. Если толщина слоя намного меньше длины искомой волны, то среда допускает распространение СПВ с фазовой скоростью

$$\eta_0^* = v_0^2 c_0^{-2} = \mu'_0 \mu_0^{-1} \left[\mu'_0 \mu_0^{-1} - c'_0 c_0^{-1} \right]^{-1} \quad (1.11)$$

которая с точностью совпадает со скоростью СПВ, распространяющейся в слабо-неоднородном полупространстве при $k \rightarrow 0$ [1]. Однако, должен удовлетворять условию (1.7), вследствие чего получим

$$c'_0 < 0, \quad \mu'_0 > 0 \quad \text{или} \quad c'_0 > 0, \quad \mu'_0 < 0 \quad (1.12)$$

Возможны три варианта взаимоположения постоянных величин c_0, c_1 и v_0 [6]. Рассмотрим первый вариант

$$v_0 < c_1 < c_0 \quad (1.13)$$

Здесь, как следует из (1.10), α_1 становится мнимой, а α_0 реальной.

Допустим $\alpha_1 = i\beta_1$, где $\beta_1 = (1-\eta_1)^{1/2}$ является реальной. Тогда дисперсионное уравнение (1.9) преобразуется к виду

$$L(\eta_0) = 2Pg(1-\eta_0)(1-\eta_0\theta)^{1/2} \operatorname{th} \left[P(1-\eta_0\theta)^{1/2} \right] + \quad (1.14)$$

$$+ 2P(1-\eta_0)^{3/2} + \mu'_0\mu_0^{-1}(1-\eta_0) + hc'_0c_0^{-1}\eta_0 = 0$$

где $\theta = c_0^2 c_1^{-2}$, $P = kh$.

Исходя из того, что функция $L(\eta_0)$, являющаяся монотонной, на краях области своего определения (1.7) принимает значения противоположных знаков, условия существования СПВ запишутся в виде:

а) Если $\mu'_0 > 0$ и $c'_0 < 0$, то могут распространяться СПВ любой длины.

б) Если $\mu'_0 < 0$ и $c'_0 \geq 0$, то могут распространяться СПВ длиной, удовлетворяющей неравенству

$$2P[1 + g \operatorname{th} P] < -h\mu'_0\mu_0^{-1} \quad (1.15)$$

в) Если $\mu'_0 < 0$ и $c'_0 < 0$, то могут распространяться СПВ длиной, удовлетворяющей неравенству

$$2P[1 + g\text{th}P] > -h\mu'_0\mu_0^{-1} \quad (1.16)$$

Если не выполняется ни одно из перечисленных условий, то среда не допускает существования СПВ для первого варианта (1.13).

Сравнивая вышеполученные условия с условиями существования СПВ в слабо-неоднородном полупространстве, заметим, что за счет изменения длины волны класс допускаемых волн уменьшается в случае выполнения условий б) и, наоборот, увеличивается в случае в). При выполнении условий а) класс волн изменений не терпит. Однако, необходимо отметить, что к вышеперечисленным условиям а), б) и в) приходится присоединить условия, полученные от требования ограниченности функции $\text{th}(P\beta_1)$. После несложных вычислений эти условия запишутся

$$P_1 < P < P_2 \quad (1.17)$$

где

$$P_1 = P_2 \left[1 + g(1 - \eta_0\theta)^{1/2} (1 - \eta_0)^{-1/2} \right]^{-1}$$

$$P_2 = (-h/2)(1 - \eta_0)^{-3/2} \left[(1 - \eta_0)\mu'_0\mu_0^{-1} + c'_0c_0^{-1}\eta_0 \right]$$

Тут нужно, чтобы P_2 было положительным, что, в свою очередь, приводит к усложнению уже имеющиеся условия (1.12), а именно: для каждой из условий а), б) и в) оно запишется соответственно в следующих формах:

$$\eta_0^* < \eta_0 < 1 \quad (1.18a)$$

$$0 < \eta_0 < \eta_0^* \quad (1.18б)$$

$$0 < \eta_0 < 1 \quad (1.18в)$$

2. Для наглядности рассмотрим конкретный пример слабо-неоднородной среды. Допустим плотность и модуль сдвига среды изменяются по следующим законам:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \varepsilon_1 \sin(\pi x_2 / l) \right) \quad (2.1)$$

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \varepsilon_2 \sin(\pi x_2 / l) \right) \quad (2.2)$$

с условием $0 < \varepsilon_{1,2} \ll 1$, где ρ_0, μ_0 - соответствующие значения ρ и μ на границе $x_2 = 0$, а l - период изменения неоднородности по глубине подложки. Для среды (2.1), (2.2) выполняемы условия существования волны а), если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Дисперсионное уравнение (1.14) в данном случае примет вид

$$2Pg(1 - \eta_0)(1 - \eta_0\theta)^{1/2} \text{th} \left[P(1 - \eta_0\theta)^{1/2} \right] + 2P(1 - \eta_0)^{3/2} + q\varepsilon_2(1 - d\eta_0) = 0 \quad (2.3)$$

здесь $q = \pi h / l$, $d = 3/2$.

При выводе (2.3) предполагалось, что $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$. Если толщина слоя намного меньше периода неоднородностей ($h \ll l$), а это значит, что слой не "чувствует" неоднородности подложки, приходим к классической

задаче Лява, которая при расположении скоростей (1.13) решений не имеет.

Предположение о тонкости слоя позволяет трансцендентное уравнение (2.3) привести к квадратному уравнению

$$2P^2 g(1-\eta_0)(1-\eta_0\theta) + 2P(1-\eta_0)^{3/2} + q\varepsilon_2(1-d\eta_0) = 0 \quad (2.4)$$

Чтобы провести исследование дисперсионных кривых, задаваемых функциональной зависимостью $f(\eta_0, P) = 0$ по (2.4), зададим значения некоторых постоянных в табл. 1 (А).

Кривая фазовой скорости, начиная со значения $\eta_0^* = 2/3$, монотонно возрастает и стремится к значению $\eta_\infty = \eta_0(P \rightarrow \infty)$, определенное по

$$2k(1-\eta_\infty)^{3/2} + \eta_\infty c_0' c_0^{-1} + \mu_0' \mu_0^{-1}(1-\eta_\infty) + 2kg(1-\theta\eta_\infty)^{1/2}(1-\eta_\infty).$$

Переходим к исследованию неоднородной среды (2.1) с условием

$$-1 \ll \varepsilon_{1,2} < 0 \quad (2.5)$$

В данном случае выполняются условия б), если $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$. Исследуем (2.4) с учетом (1.15), которое при длиноволновом приближении принимает вид

$$0 < P < P_0 \quad (2.6)$$

где $P_0 = [\sqrt{1-2gq\varepsilon_2} - 1](2g)^{-1}$

Из-за длиноволнового приближения $P_0 \ll 1$, следовательно,

$$g \gg -\varepsilon_2(q/2) - 1 \quad (2.7)$$

Поскольку g должна быть положительной, получим

$$g > -2/\varepsilon_2 \quad (2.8)$$

Постоянные g, θ, q и ε_2 зададим в табл. 1 (Б). В этом случае кривая фазовой скорости, начиная со значения $\eta_0^* = 2/3$ ($P \rightarrow 0$) и монотонно убывая, стремится к значению P_0 ($\eta_0 \rightarrow 0$).

И, наконец, в последнем случае этого варианта рассмотрим неоднородную среду (2.1) с условиями

$$0 \leq \varepsilon_1 \ll 1, \quad -1 \ll \varepsilon_2 < 0 \quad (2.9)$$

Нетрудно убедиться в том, что здесь выполняются условия в). Опять исследуется дисперсионное уравнение (2.4), где $d = 1/2$ (поскольку берется $\varepsilon_1 = 0$). Условие (1.16) упрощается, принимая вид $P > P_0$. Исходя из соображений, проведенных в предыдущем случае, получим условия (2.7) и (2.8). Дисперсионная кривая начинается со значения P_0 и монотонно возрастая, асимптотически стремится к значению η_∞ .

Переходим к рассмотрению второго варианта расположения скоростей

$$c_1 < v_0 < c_0 \quad (2.10)$$

Так как в этом случае α_1 остается реальной, поэтому исследуется дисперсионное уравнение (1.9). Первая мода начинается со значения

(1.11) и с возрастанием P монотонно убывает, стремясь к нижнему пределу рассматриваемого диапазона скоростей c_1 . В отличие от предыдущих вариантов, здесь имеем моды высших порядков. Они, отделяясь от верхней границы рассматриваемого диапазона скоростей, также монотонно убывают с возрастанием P .

В конце обсудим третий вариант расположения скоростей

$$v_0 < c_1 < c_0 \quad (2.11)$$

Настоящий вариант представляет из себя комбинацию двух вариантов - при $c_1 < v < c_0$ приходим ко второму варианту, а при $0 < v < c_1$ исследование уравнения (1.14) проводится аналогично исследованию, сделанному для первого варианта (1.13). Однако, условия существования волны здесь на P ставят новые ограничения:

А3) Если $\mu'_0 > 0$ и $c'_0 < 0$, то могут распространяться СПВ длиной

$$0 < P < P_3 \quad (2.12)$$

где
$$P_3 = -\frac{h}{2} \left[c'_0 c_0^{-1} \theta^{-1} (1 - \theta^{-1})^{-3/2} + \mu'_0 \mu_0^{-1} (1 - \theta^{-1})^{-1/2} \right]$$

Учитывая условие (1.18а) и область определения в данном случае, получим

$$\eta_0^* < \eta_0 < \theta^{-1}, \quad 1 < \theta < 1/\eta_0^*$$

Б3) Если $\mu'_0 < 0$ и $c'_0 > 0$, то могут распространяться СПВ длиной

$$2P[1 + \text{gth}P] > -\mu'_0 \mu_0^{-1} h \quad P > P_3,$$

В3) Если $\mu'_0 < 0$ и $c'_0 < 0$, то могут распространяться СПВ длиной

$$2P[1 + \text{gth}P] < -\mu'_0 \mu_0^{-1} h \quad 0 < P < P_3$$

Далее целесообразно исследования продолжать для определенной неоднородной среды. Пусть среда задана в виде (2.1), (2.2). Условия А3) выполняются при $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Предполагая $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ и учитывая табл. 1(В), получим численные ограничения для η_0 , θ и P .

Таблица 1

θ	А	Б	В	Г
g	1	1	1	1
θ	0.5	0.5	1.2	1.2
q	1	300	1	300
ε_2	0.01	-0.01	0.01	-0.01

В области $\theta^{-1} < \eta_0 < 1$ они имеют вид подобно моде высших порядков. Нулевая мода, начиная со значения $\eta_0^* = 2/3$, монотонно возрастает до конца области определения θ^{-1} , при которой $P = P_3$. Неоднородная среда (2.1), (2.5) допускает распространение СПВ, если $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$. С помощью табл. 1 (Г), предположения $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ и условий (2.6)-(2.8) получаем численные ограничения для η_0, P, q, g . Легко заметить,

что нулевая мода изменений не терпит по сравнению с единственной модой. А в области $\theta^{-1} < \eta_0 < 1$ существуют моды высших порядков. Условия существования волны ВЗ выполняются для среды (2.1), (2.7). Считая, что $\varepsilon_1 = 0$ и используя постоянные табл. 1 (Г), получим новые ограничения для P , η_0 . Как видно, нулевая мода начинается со значения P_0 и монотонно возрастает до P_3 .

При втором (2.10) и третьем (2.11) вариантах фазовая скорость принимает единственное значение только в том случае, если P меньше, чем то его значение, которое принимает вторая кривая при значении $c_0(\eta_0 = 1)$. Пусть $\eta_0 = 1$, тогда $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = (\theta - 1)^{1/2}$. Исходя из (1.9), необходимое условие запишется $P < (3/2)\pi(\theta - 1)^{-1/2}$. При первом варианте (1.13) все три исследованные среды допускали единственную моду фазовой скорости СПВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В., Мухсичачоян А.Р. Сдвиговая поверхностная волна в слабо-неоднородных упругих средах. - Акуст. жур. 1995, т.41, №6, с. 3-8.
2. Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. - М.: Наука, 1991. 415 с.
3. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. - М.: Наука, 1981. 288 с.
4. F.A. Robinson, M.T. Silvia Digital Foundations of time Series Analysis. Vol. 2: Wave-Equation Space-Time Processing. San-Francisco, Holden-Day, Inc., 1981. p.534.
5. G.A. Maugin. Elastic Surface Waves with Transverse Horizontal Polarization//Advances In Applied Mechanics. V.23, p.373-434.
6. R.G. Curtis and M. Redwood. Transverse surface waves on a piezoelectric material carrying a metal layer of finite thickness// J. Appl. Phys., 1973, Vol.44, №5.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
27.11.1995